АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

5266 - 9035

№ 7 — 12 1957
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

5266—6067

*

QA
1
A373
1957
no. 7-12

Referativnyi zhurnal: Matematika

№ 7 **1957**

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

3/0.468

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Б. С. Балакшин, Е. Е. Захаров, С. М. Лисичкин (зам. председателя), В. Ю. Ломоносов, А. И. Михайлов (председатель), С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . 3
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 6
Алгебра 11
Группы 11
Многочлены и линейная алгебра . . . 12
Поля, кольца и структуры 16
Алгебраическая теория схем связи и управления 19
Топология 22
Теория функций действительного переменного 30
Теория множеств 32
Приближение функций полиномами и их обобщениями 35
Теория функций комплексного переменного 39
Дифференциальные уравнения 51
Обыкновенные дифференциальные уравнения 51
Уравнения в частных производных . . 61
Приложения к физике, технике и естественным наукам 68
Интегральные уравнения 71
Вариационное исчисление 73
Анализ (другие вопросы) 75
Числовые ряды 79
Специальные функции 80
Интегральные преобразования и операционное исчисление 83
Приложения общих методов математического анализа 84
Функциональный анализ 85
Теория вероятностей 91
Математическая статистика 97
Теория игр и математическая экономика 102
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 103
Геометрия 104
Приложения геометрии 105
Элементарная геометрия 106
Проективная и начертательная геометрия 107
Алгебраическая геометрия 108
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 110
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 112
Глобальная теория дифференциальных многообразий 119
Метрические методы в геометрии . . 120
Геометрия выпуклых многообразий . . 122
Численные и графические методы 123
Таблицы 136
Вычислительные машины и математические приборы 137
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . —
Авторский указатель 150

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

Рефераты 5266—6067 **№ 7** **Июль 1957 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

5266. **Вычислительный центр Академии наук СССР.** Дородницын А. А., Вестн. АН СССР, 1957, № 1, 9—12

Приводятся сведения о созданном в 1955 г. вычислительном центре Академии наук СССР и его деятельности в настоящее время.

5267 Ж. **Журнал Польской Академии наук.** Варшава, «Ossolineum», 1956, 1, № 1, квартальный

С 1956 г. в Польше начал выходить «Журнал Польской Академии наук», предназначенный для освещения вопросов развития польской науки и научной жизни во всей стране. Первый номер журнала посвящен вопросам планирования науки в Польше, научной хронике и организационным вопросам.

5268. **Четвертый конгресс румынских математиков.** Теодореску (Cel de al IV-lea congres al matematicienilor romîni. Teodorescu N.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, A8, № 7, 376—388 (рум.)

Освещается подготовка конгресса, его открытие 27 мая 1956 г. в Бухаресте, даются сведения о 74 иностранных делегатах из 18 стран. Работа конгресса проходила в 5 секциях: алгебра и теория чисел; математический анализ; геометрия и топология; приложения математики; методология и история математики. Дается программа работы секций с указанием названий докладов и сообщений по секциям.

А. Н. Гливич

5269. **Конгресс румынских математиков.** Векуа И. Н., Вестн. АН СССР, 1956, № 11, 76—77

Сообщение о 4-м конгрессе румынских математиков, о некоторых достижениях румынских математиков и о главных математических центрах Румынии.

А. Н. Гливич

5270. **Институт статистики факультета статистической, демографической и страховой науки Римского университета.** Кастеллано (L'Istituto di statistica della facoltá di scienze statistiche, demografiche ed attuariali dell'Universitá di Roma. Castellano Vittorio), Statistica, 1956, 16, № 1, 61—67 (итал.)

Институт статистики, носивший до 1930 г. наименование Института статистики и политической экономики, был учрежден в 1925 г. В жизни Института в течение 30 лет большую роль играл проф. Джини — директор института (до 1954 г.) и редактор журнала «Метрон». В 1936 г. путем слияния Школы статистики и Школы страховой науки (актуариев) образовался факультет статистики. С 1955 г. Институт совместно с кафедрой социологии предпринял статистические исследования. При Институте работает семинар, состоящий из двух секций — общей статистики (руководитель проф. Джини) и методологии статистики (руководитель проф. Кастеллано). Институт поддерживает связь с заграничными аналогичными институтами, в частности с университетом Вайана, Детройт. Предполагается издать в честь проф. Джини том статей. Институт рассчитывает на пополнение своих кадров из числа 200 студентов, записавшихся в этом году на 1-й курс факультета.

Г. П. Боев

5271. **Институт статистики факультета экономики и коммерции Флорентийского университета.** Паренти (L'Istituto di statistica della facoltà di economia e commercio della Università di Firenze. Parenti Giuseppe), Statistica, 1956, 16, № 2, 219—224 (итал.)

В 1926 г. был учрежден Высший институт экономической и коммерческой науки, преобразованный в 1936 г. в факультет экономики и статистики университета. В настоящее время Институт статистики этого факультета располагает аудиторией, залом для практических занятий, помещением для ассистентов и комнатой дирекции. Оборудование состоит из нескольких ручных и электрических арифмометров и магнитного регистратора. Библиотека — 1000 томов. С 1933—34 г. ведется семинар по статистике под руководством проф. М. М. Либелли. Институт оказывает помощь лекторам, читающим курсы теоретической, экономической и демографической статистики, и лицам, готовящим диссертации, связанные со статистикой, проводит вычисления, организует учебные экскурсии. Институт является и организатором коллективных исследований. Из работ упомянуто исследование об условиях и занятиях работников каменноугольной и железорудной промышленности и сбор и обработку статистических материалов (с 1861 г.), относящихся к экономике Тосканы.

Г. П. Боев

5272. **Летнее собрание в Сиэттле.** Кли (The Summer Meeting in Seattle. Klee V. L., Jr), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, 62, № 6, 541—611 (англ.)

Сообщение о 64-м летнем собрании Американского математического общества 21—24 августа 1956 г. и тезисы 225 докладов. Примерно в то же время в г. Сиэттле проходили собрания Математической ассоциации Америки, Института математической статистики, Биометрического общества и Экономического общества.

К. А. Рыбников

5273. **Философия неопозитивизма и наука.** Нарский И., Коммунист, 1955, № 13, 70—85

Историко-критический очерк неопозитивизма (он же: современный позитивизм, логический позитивизм) — одного из субъективно-идеалистических течений современной философии.

Особое внимание неопозитивисты проявляют к математике, потому что они вообще сводят задачи философии к изучению формально-логических отношений между терминами и предложениями наук, выраженными в символической форме. При этом проявляется тенденция к идентификации математики и логики и к ненаучному пониманию их основ. В математике последнее проявляется в универсализации ее роли (вплоть до утверждений о тождественности структуры мира структуре математики), в попытках придать аксиомам математики характер произвольных допущений, в субъективно-идеалистической трактовке проблемы правильности методов математики и истинности ее результатов.

Примечание референта. Общефилософские высказывания автора и материал, относящийся к другим наукам, в реферате не отражены.

К. А. Рыбников

5274. Возрастающая роль математики. Глисон (The expanding role of mathematics. Gleason A. M.), Enseign. math., 1955, 1, № 1—3, 188—191 (англ.; рез. франц.)

Роль математики и математиков в Америке возрастает ввиду требований со стороны физики и других наук, а также техники. Для современной американской математики характерны два обстоятельства: переход ряда ученых на решение практических военных проблем и развитие электронно-вычислительной техники. Из 1320 опрошенных докторов-математиков 88% занято в колледжах и университетах, из остальных половина занимает государственные должности, а половина — работает в промышленных и промышленно-исследовательских компаниях. Из математиков, занятых педагогической работой, многие также работают по государственным контрактам и консультируют промышленные фирмы. Процент внеакадемических математиков быстро растет: из 200 человек, получивших в 1951 г. степень доктора, более $^1/_4$ занимают государственные должности или работают в промышленности. Автор опасается, что высокие ставки, предлагаемые промышленностью, отвлекут лучших ученых от академической работы и от теоретических исследований.

Г. П. Боев

5275. Математика как философия. Гонзет (Des mathématiques à la philosophie. Gonseth F.), Dialectica, 1956, 9, № 3—4, 222—243 (франц.)

Автор считает, что философия должна обобщать реальные достижения новейшей математики и не применять к ней априорного философского понятия истины. Исходя из этого, автор отвергает картезианство и логический эмпиризм как философские обобщения математики. В собственной трактовке истины в математике автор допускает уклон в сторону позитивизма и пробабилизма.

В. А. Айзенштейн

5276. Нормализация математических символов. Палле (La normalisation des symboles mathématiques. Pallez A.), Ingrs et techniciens, 1956, № 89, 69—70 (франц.)

Разъясняются французские нормативы для следующих шести групп математических символов:

1. NF×02-003: Принципы написания чисел, единиц и величин.
2. NF×02-101: Алгебраические символы.
3. NF×02-102: Геометрические и векторные символы.
4. NF×02-109: Символы операционного исчисления.
5. NF×02-110: Символы матричного исчисления.
6. NF×02-111: Символы тензорной алгебры.

Нормативы разработаны в течение 1945—1955 гг.

А. Н. Гливич

5277. Математика в школах Новой Зеландии. Риск (Mathematics in New Zealand schools. Riske Max), Math. Teacher, 1956, 49, № 6, 431—434 (англ.)

Краткий обзор школьной системы английского доминиона Новая Зеландия и более подробное описание состояния математического обучения в ней. Посещение школы является обязательным с 7 до 15 лет, но для всех почти детей начальное обучение начинается с 5 лет и продолжается до 13 лет. Далее идут 4 года обучения в средней школе (post-primary edication), причем первые 2 (от 13 до 15 лет) являются обязательными. Здесь математика изучается по двум различным программам — обязательной основной (Core) и необязательной полной (Full), включающей основную. Полная программа значительно отличается от основной и охватывает арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию. В немногих средних школах изучается как особый предмет прикладная математика (прикладная механика, геометрическое и техническое черчение).

После минимум 3 лет обучения в средней школе учащиеся могут сдавать экзамен на получение школьного аттестата (School Certificate Examination). После получения школьного аттестата учащиеся (главным образом мальчики, готовящиеся к научной и инженерной деятельности) изучают математику как серьезный предмет, включающий алгебру (корни, прогрессии, биномиальную теорему, теорию логарифмов), геометрию (теорему Птолемея и начальные сведения по стереометрии), тригонометрию (функции кратных углов, функции углов любой величины, тригонометрические уравнения и тождества). Требования здесь значительно выше, чем для получения школьного аттестата, но ниже, чем надо для обучения в университете, ввиду чего многие учащиеся проходят подготовку в университет в старшем шестом классе при 6 часах занятий математикой в неделю. Отмечается большой недостаток квалифицированных учителей математики, преподающих главным образом в старших классах, в силу чего уровень преподавания основного курса математики часто ниже того, что следовало бы.

Статья ничего не говорит об изучении математики в школах для коренного населения (маори), составляющего около 5% населения Новой Зеландии.

Н. П. Бибикова

5278. Обсуждение значения экстремальных задач в преподавании. Мейер (Die Behandlung der Extremwertaufgaben im Unterricht. Meyer W.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 6, 261—265 (нем.)

Автор считает необходимым при исследовании функций на экстремум давать учебникам не только простые задачи, но и такие, которые требовали бы от них глубокого понимания метода, и излагает свой опыт решения подобных задач с учениками старших классов средней школы.

Е. С. Шатунова

5279. Таблицы логарифмов в школьном обучении. Кольберг (Die Logarithmentafeln im Schulunterricht. Zum Beitrag von A. Kopff in MNU VIII/3. Colberg R.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956, 9, № 6, 270—271 (нем.)

Обсуждается предложение о введении в школах новых пятизначных таблиц логарифмов с десятичным делением дуг и углов.

Автор считает наиболее рациональными пятизначные таблицы логарифмов с десятичным делением старого градуса, а не нового (новый градус равен одной сотой прямого угла).

Е. С. Шатунова

5280. Значение учебного плана для будущего студента. Сейдел (De betekenis van het leerplan voor de toekomstige student. Seidel J.), Euclides (Nederl.), 1955—1956, 31, № 5—6, 245—256 (голл.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

5281. **Решенные и нерешенные проблемы классической математики. Вилла** (Problemi matematici classici risolti e non risolti. Villa Mario), Archimede, 1956, 8, № 2, 68—70 (итал.)

Автор указывает на проблемы математики классической древности (квадратура круга, трисекция угла и удвоение куба), которые оставались нерешенными более 2000 лет и получили окончательное разрешение только в прошлом столетии. Однако и сейчас не решены еще такие, тоже не новые, проблемы, как теорема Ферма и задача о 4 красках. Высказывается предположение, что средствами современной математики их вообще решить нельзя, несмотря на простоту их формулировки.

А. Е. Раик

5282. **Аристарх и Аполлоний. Гелиоцентрическая и геоцентрическая системы мира классической древности. Миланкович** (Aristarchos und Apollonios. Das heliozentrische und das geozentrische Weltsystem des klassischen Altertums. Milankovitch M.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, 9, 79—92 (нем.)

Автор исследует генетическую связь между гелиоцентрической системой мира Аристарха и геоцентрической Аполлония. Из сочинений Аристарха до нас дошло одно: «О величине и расстоянии от Солнца до Луны», которое было включено во введение к учебнику астрономии Птолемея.

Исследуя взаимное расположение Солнца, Земли и Луны во время дихотомии Луны и ее полного центрального затмения и измерив кажущийся диаметр Солнца, Аристарх элементарными геометрическими средствами нашел уравнения, которые выражают расстояния Земли и Луны от Солнца, диаметры Солнца и Луны через диаметр Земли. Из результатов измерения Аристарха непосредственно вытекает, что не большое Солнце движется вокруг маленькой Земли, а наоборот. Но несравненно важнее результатов измерения автор считает геометрический метод Аристарха, правильность которого подтвердил Венделин в 1650 г., получив этим способом значение солнечного параллакса, превосходящее по своей точности все предыдущие.

По свидетельству Плутарха и Архимеда Аристарх учил, что: 1) сфера неподвижных звезд неподвижна и ее центр находится в центре Солнца; 2) Земля движется вокруг Солнца по окружности, центр которой тоже находится в центре Солнца; 3) Земля вращается вокруг своей оси, которая наклонена к плоскости орбиты Земли и 4) радиус сферы неподвижных звезд бесконечно велик по сравнению с радиусом Земли. Этим самым Аристарх познал и объявил неизмеримость Вселенной. Но его гелиоцентрическое учение о Вселенной было вскоре забыто, и только Коперник его опять восстановил и научно обосновал.

Автор дает геометрическую реконструкцию получения эпициклов Аполлония. Свойства последних выявились как только был поставлен вопрос о том, как протекает движение планет, если их наблюдать с Земли, которая согласно учению Аристарха, движется по окружности вокруг Солнца. Отсюда автор делает вывод, что гелиоцентрическая система мира Аристарха послужила основой и рабочей гипотезой созданной Аполлонием теории эпициклов.

Птолемей использовал теорию эпициклов Аполлония и усовершенствовал его геометрический аппарат.

А. Е. Раик

5283. **Трактат Архимеда «О плавающих телах». Башмакова И. Г.** В сб.: Историко-матем. исследования. Вып. 9. М., Гостехиздат, 1956, 759—788

Анализируется содержание второй части трактата Архимеда «О плавающих телах», посвященной определению положений равновесия плавающего сегмента параболоида вращения. Автор подробно разбирает доказательства Архимеда и устанавливает использование им некоторого аналога поверхности центров, но не соглашается с мнением Экке (Ver Eecke P., Les oeuvres complètes d'Archimède, Paris—Bruxelles, 1921) о том, что Архимед владел понятием метацентра. Автор подчеркивает общность метода Архимеда, пригодного для произвольных плавающих тел, поверхность центров которых является поверхностью вращения, а центр тяжести лежит на ее оси.

В заключение высказываются критические замечания по поводу существующей в литературе недооценки роли и развития прикладных наук в классической Греции.

Г. К. Михайлов

5284. **Об отношении Гюйгенса к исчислению бесконечно малых и о двух кривых, интересовавших этого ученого. Кроммелин** (Sur l'attitude de Huygens envers le calcul infinitésimal et sur deux courbes intéressantes du même savant. Crommelin C. A.), Simon Stevin, 1956, **31**, № 1, 5—18 (франц.)

Приводятся метод Гюйгенса (1629—1695) отыскания касательных к кривым и переписка Гюйгенса с Лейбницем (1646—1716) в части, относящейся к анализу бесконечно малых. Основной источник — собрание сочинений Гюйгенса (Oeuvres complètes, 22 vols, 1888—1950).

Метод известен с 1663 г.; разработан только для кривых, уравнения которых имеют вид: $P_n(x, y) = 0$ (P_n — полином). Рассматривается характеристический треугольник, катеты которого равны $l\,(=dx)$ и yl/z, где z — подкасательная. Соответствующее правило состоит в том, что в уравнение кривой подставляют $x + l$ вместо x, а также $y + \frac{yl}{z}$ вместо y. В получившемся выражении отбрасываются совокупность членов, равная нулю, а также члены, содержащие l в степени, большей единицы. Метод продемонстрирован на так называемом листе Декарта (кривой $x^3 + y^3 - axy = 0$).

В начале переписки (1679 г.) Гюйгенс еще не признавал за исчислением Лейбница особых преимуществ. В последние годы жизни (с 1690 г.) он изучил это исчисление и приобрел навык в оперировании специфической символикой Лейбница. В статье воспроизводятся задачи, решенные Гюйгенсом без применения исчисления бесконечно малых и предложенные им для решения Лейбницу: об определении касательных к кривым $y = \sqrt{2a^2 + 2ax} \pm \sqrt{2a^2 - 2ax}$ и $x^3 + xy^2 - a^2y = 0$.

К. А. Рыбников

5285. **История брахистохроны. Кимбалл** (A history of the brachistochrone. Kimball William S.), Pi Mu Epsilon J., 1955, 2, № 2, 57—77 (англ.)

Автор начинает изложение с известного обращения И. Бернулли (январь, 1697 г.) к математикам всего мира, в котором он предложил задачу о брахистохроне. Далее дается аналитическая формулировка задачи, метод Лагранжа для ее решения, рассказывается о поле экстремалей для брахистохроны, построенном Бернулли, о рассмотренном им случае брахистохроны с подвижным концом и т. п. Приводится описание и рисунок модели, иллюстрирующей свойство и вид брахистохроны.

М. К. Керимов

5286. **Относительно понятия функции. Беннетт** (Concerning the function concept. Bennett A. A.), Math. Teacher, 1956, 49, № 5, 368—371 (англ.)

Учебники для выпускников средних школ и колледжей США разъяснению понятия функции уделяют большое внимание; часто это делается неудачно. Такое положение дел побудило автора дать исторический очерк

развития понятия функции. Очерк сжат и неполон. Представляет интерес указание на работу Форсайта (A. R. Forsyth) «Theory of Function» (1900), как на пример следования идеям Л. Эйлера о введении функции как аналитического выражения. Заканчивается очерк разъяснением современного понимания функции как соответствия на основе первичных понятий множества, последовательности и отображения.

Касаясь вопросов преподавания, автор считает целесообразным сосредотачивать внимание учащихся средних учебных заведений только на ограниченном классе функций действительного аргумента: алгебраических и элементарных трансцендентных (тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных и логарифмических). К. А. Рыбников

5287. **Гаусс — король математиков. Джонсон** (Gauss, the prince of mathematicians. Johnson R. P.), Proc. Pennsylvania Acad. Sci., 1955, 29, 220—222 (англ.)

Краткая биография Карла Фридриха Гаусса, написанная к 100-летию со дня его смерти; содержит только широко известные биографические сведения о Гауссе. То, что Гаусс не публиковал многих результатов своих исследований, автор объясняет, со ссылкой на мнение других ученых, тем, что публикация результатов имела для него второстепенное значение, а также тем, что Гаусс успевал обработать только часть своих идей. Автор делит творчество Гаусса на следующие периоды: до 1800 г. — чистая математика; 1800—1820 гг. — астрономия; 1820—1830 — геодезия, картография, теория поверхностей; 1830—1840 — «анализ положения». Эти соображения автора не всегда согласуются с фактами из жизни и деятельности Гаусса, изложенными в имеющейся литературе. С. Е. Белозеров

5288. **К 100-летию со дня смерти Фаркаша Бойаи. Маурер** (100 de ani de la moartea lui Farkas Bolyai. Maurer I.), Gaz. mat. și fiz., 1956, B7, № 11, 563—566 (рум.)

Краткий биографический очерк Фаркаша Бойаи (1775—1856) — отца Яноша Бойаи; дается характеристика его математической деятельности, особенно в области геометрии, в связи с попытками доказать постулат Евклида о параллельных. А. Н. Гливич

5289. **Р. И. Бошкович — почетный член Петербургской Академии наук. Раскина Н. М.**, Вестн. АН СССР, 1957, № 1, 92—93

Публикуется текст письма с сообщением об избрании (1760) сербо-хорватского ученого Р. И. Бошковича (1711—1787) иностранным почетным членом Петербургской Академии наук. Перечисляются документальные материалы Архива Академии наук СССР о связях Петербургской Академии с Р. И. Бошковичем. К. А. Рыбников

5290. **Математика в Хорватии. Ниче** (La science mathématique en Croatie. Ničе V.), Bull. scient. Conseil acad. RPFY, 1955, 2, № 3, 69—72 (франц.)

Очерк развития математики в Хорватии, начиная с XVI в. Содержатся сведения о деятельности Геталдича (1566—1626) и Бошковича (1711—1787), об открытии первых университетов и институтов, о развитии математических центров, о преподавательском составе, о первых работах по математике. В конце дан обзор разделов математики, в которых ведут научные исследования хорватские математики в настоящее время (теория относительности, дифференциальные и интегральные уравнения, теория множеств, номография, математическая статистика, теория групп, теория чисел, проективная геометрия и т. д.). В статье неправильно указан год рождения Бошковича (1771 вместо 1711). А. Н. Гливич

5291. **О математических исследованиях в Румынии. Стоилов С.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 207—225

Автор отмечает, что математические исследования в Румынии были начаты во второй половине XIX в. Начало творческой математической деятельности в Румынии относится к началу XX в. и связано с такими именами, как Г. Цицейка, А. Давидоглу, Д. Помпейю, А. Миллер, В. Миллер-Лебедева, Тр. Лалеску, К. Попович, С. Санилевич. Почти все труды перечисленных ученых концентрировались вокруг теории интегральных уравнений и дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными.

Г. Цицейка (Бухарест) и А. Миллер (Яссы) являются основателями геометрической школы в Румынии. Исследования в области интегральных и интегро-дифференциальных уравнений тесно связаны с именами Тр. Лалеску и К. Поповича. Дифференциальная геометрия и функциональные уравнения (главным образом интегральные уравнения, некоторые типы дифференциальных уравнений и особенно уравнения в частных производных) были преобладающими в румынских математических исследованиях почти до начала второй мировой войны.

Автор останавливается подробнее на развитии математики в Румынии после 1944 г. В области дифференциальной геометрии значительных результатов добились А. Пантази и Г. Врынчану. Затем М. Никулеску создал теорию полигармонических функций. Н. Теодореску исследовал уравнения в частных производных высшего порядка, обобщив метод Адамара. М. Хаймович работает над сведением к простейшему виду и интегрированием систем уравнений Пфаффа. А. Фрода развил теорию дифференциальных уравнений первого порядка, в которых правая часть является разрывной функцией. А. Фрода и Т. Попович занимаются исследованиями в теории функций действительного переменного. Работы по теории функций комплексного переменного были начаты Д. Помпейю. В 1916 г. С. Стоилов занялся вопросом теории функций двух комплексных переменных. Затем теорией функций комплексной переменной занимались А. Гика и Г. Калугэряну. В области абстрактной алгебры Д. Барбилиан и М. Бенадо работали в направлении теории разложения для групп и структур. Некоторые проблемы функционального анализа исследуются А. Гика, К. Ионеску-Тульча и Г. Маринеску. Значительных успехов достигли О. Оническу и Г. Михок в области теории вероятностей. В области механики плодотворно работают В. Вылкович и Е. Карафоли. Г. Моисил и его ученики занимаются вопросами алгебры логики и, в частности, алгебры модальных логик. С. Стоилов первый начал систематически применять понятия и методы топологии в исследованиях по теории функции комплексной переменной. Исследования Стоилова в этом направлении были продолжены Тудором Ганя.

Статья завершается несколькими замечаниями относительно исследовательской и руководящей в румынской науке деятельности автора и списком литературы. А. Н. Гливич

5292. **Эмиль Борель и современный математический анализ. Стоилов** (Émile Borel si analiza matematică modernă. Stoilow S.), Gaz. mat. și fiz., 1956, A8, № 4, 169—175 (рум.)

В феврале 1956 г. умер в Париже в возрасте 85 лет Э. Борель. Отмечается, что Э. Борель первый начал систематически применять к теории функций канторовские концепции и методы, а также впервые формулировал задачи на языке теории множеств. Он построил теорию расходящихся рядов, ввел в науку понятие измеримого множества «B» (множество Бореля). С фи-

лософских позиций Борель расценивается как предшественник интуиционистов и конструктивистов.

А. Н. Гливич

5293. Морис Фреше в Академии наук. Дюбрей (Maurice Fréchet à l'Académie des Sciences. Dubreil Paul), Rev. gén. sci. pures et appl., 1956, 63, № 7—8, 193—195 (франц.)

Биографический очерк и сообщение об избрании Мориса Фреше (родился в 1878 г.) в Парижскую Академию наук, где он в секции геометрии заместил Эмиля Бореля, скончавшегося в феврале 1956 г.

Е. С. Шатунова

5294. Софья Александровна Яновская (К шестидесятилетию со дня рождения). Успехи матем. наук, 1956, 11, № 3, 219—222

5295. Проф. Курт Шрёдер награжден национальной премией 2-го класса. Грелль (Prof. Dr. Kurt Schröder mit dem Nationalpreis II. Klasse ausgezeichnet. Grell Heinrich), Math. und Phys. Schule, 1957, 9, № 1, 48—49 (нем.)

При очередном (пятом) присуждении национальной премии удостоен К. Шрёдер, проф. университета им. Гумбольдта (Берлин), директор 2-го Математического института, известный своими работами по теории несущего крыла, теории упругости и гидродинамики.

К. А. Рыбников

5296. Сто лет со дня смерти Николая Ивановича Лобачевского. Балада (Sto let od smrti Nikolaje Ivanoviče Lobačevského. Balada František), Mat. škole, 1956, 6, № 2, 65—71 (чешск.)

5297. Герман Вейль. Некролог (Herman Weyl (Nekrolog)), Verslag. Koninkl. nederl. akad. wetensch. Afd. natuurkunde, 1955, 64, № 10, 123—124 (голл.)

5298. Некролог Фредерика Рисса. Жюлия (Notice nécrologique sur Frédéric Riesz. Correspondant pour la section de géométrie. Julia Gaston), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 18, 2193—2195 (франц.)

5299. Реймонд Клэр Арчибалд. Сартон (Raymond Clare Archibald. Sarton George), Osiris, 1956, 12, 5—34 (англ.)

Обстоятельный очерк жизни, научной и общественной деятельности американского историка математики проф. Р. К. Арчибалда (1875—1955). Приложен список опубликованных работ последнего по истории и библиографии математики (144 названия). Автор публикует также добавление («аппендикс») о последних днях жизни проф. Арчибалда (см. также РЖМат, 1957, 2830)..

К. А. Рыбников

5300. Памяти Реймонда Клэра Арчибалда. Адамс, Нёйгебауэр (Raymond Clare Archibald. In memoriam. Adams C. R., Neugebauer Otto), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 10, 743—745 (англ.)

5301. Артур Ли Диксон. Феррар (Arthur Lee Dixon. Ferrar W. L.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 1, 126—128 (англ.)

5302. К столетию со дня рождения проф. Милослава Пелишка. Писка (K stému výročí narozenín prof. Miloslava Pelíška. Piska Rud.), Mat. škole, 1956, 6, № 6, 363—366 (чешск.)

5303. Профессор Г. Ф. Бейкер. Некролог. Ходж (Prof. H. F. Baker, F. R. S. Obituary. Hodge W. V. D.), Nature, 1956, 177, № 4511, 685—686 (англ.)

5304. Генри Роналд Ассе. Винт (Henry Ronald Hasse. Vint J.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 122, 252—255 (англ.)

5305 К. История математики. Беккер, Гофман Перевод с немецкого с предисловием Г. Булигана (Histoire des Mathématiques. Becker, Hofmann. Préface de M. Bouligand, Paris, Lamarre, 1956, 377 p.) (франц.)

Книга входит в серию изданий по истории наук, выпускаемую указанным издательством. Она является переводом с немецкого оригинала, написанного О. Беккером (Бонн) и И. Гофманом (Тюбинген). Первому принадлежит история античной математики (Египет, Вавилон, Древняя Индия, Греция), второму — история математики Запада и Востока в Средние века и Новое время.

Французский перевод Жуана проверен Ф. Руссо, которого редактор рекомендует как «бывшего ученика Политехнической школы, известного многочисленными работами по истории и документации в области физико-математических наук и техники». Титульный лист книги содержит ошибку: автор предисловия, профессор Парижского университета Г. Булиган (Bouligand), известный по очень многим книгам и статьям, назван Булинганом.

Первая часть (127 стр.) дает сжатое, но очень насыщенное перечисление достижений античной математики, причем греческие достижения сопровождаются указанием терминов и названий работ на языке оригинала. В заключение этой части дается подробная библиография по странам, а в греческой математике по отдельным авторам. В ней указаны все источники, которые представляют какой-либо интерес (17 стр.).

Вторая и третья части книги — история математики Запада и Востока — охватывают время, начиная с VI в (историю математики в Китае с древнейших времен). Краткий, но очень четкий обзор включает следующие основные разделы:

1) Восточная математика: Индия, арабы, Китай и Япония;

2) Средние века: влияние арабов и греков, схоластика;

3) Эпоха Возрождения: начало алгебры, изучение античной культуры и первые оригинальные достижения европейской математики, прогресс прикладной математики, метод неделимых;

4) Ньютон и Лейбниц, непосредственное влияние их великих открытий, оживление в арифметике, алгебре и элементарной геометрии. Все данные сопровождаются указанием заглавий оригинальных трудов и дат их появления. Глава «XIX век» представляет преимущественно перечень имен. Изложение заканчивается главой «Развитие истории математики», в которой подробно характеризуются книги и журналы по истории математики в прошлом и настоящем. 70 страниц мелкого шрифта занимает указатель имен и трудов, упомянутых в книге. Все имена сопровождаются соответствующими датами. Поэтому указатель представляет собой полезный и нужный справочник. Имена русских математиков включены в индекс.

От читателя этой книги потребуется предварительная историко-математическая подготовка.

И. Я. Депман

5306 Д. Эратосфен из Кирены как математик и философ. Вольфер (Eratosthenes von Kyrene als Mathematiker und Philosoph. Diss. Wolfer Ernst Paul. Zürich, Noordhoff, Groningen—Djakarta, 1954, 67 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 21, 1545 (нем.)

См. также: 5310, 5312, 5572 К, 5707, 5811 К, 5847 К, 6026, 6032, 6060

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

5307. Доказательство ε-теорем. Расёва (A proof of ε-theorems. Rasiowa H.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1955, Cl. 3, **3**, № 6, 299—301 (англ.); Бюл. Польской АН, 1955, Отд. 3, **3**, № 6, 297—300

Автор дает набросок нового доказательства двух логических теорем, известных под названием ε-теорем. В этом доказательстве автор использует алгебраические средства, которые уже были использованы в работах Расёвой (РЖМат, 1956, 6335) и Расёвой—Сикорского (Rasiowa H., Sikorski R., Fundam.-math., 1950, **37**, 193—200; 1951, **38**, 230—232). Прежде всего это понятие алгебраического функционала и алгебраической модели. Аналогично автор получает простые и изящные доказательства, применимые также к несчетным теориям и теориям, основанным на неклассических функциональных исчислениях. Применяя ε-теоремы к несчетным теориям, можно получить простое доказательство теоремы Сколема-Гёделя для этих теорий. W. Szmielew

5308. Рекурсивные определения, в которых используется переменное число предыдущих значений функции. Петер (Rekurzív definíciók melyek változó számú korábbi függvényèrtéket használnak fel. Péter Rózsa), Mat. lapok, 1954, 5, № 1, 7—9 (венг.)

Венгерское резюме работы автора (РЖМат, 1956, 123).

5309. Примеры множеств, определимых посредством двух и трех кванторов. Мостовский (Examples of sets definable by means of two and three quantifiers. Mostowski A.), Fundam. math., 1955, 42, № 2, 259—270 (англ.)

Работа относится к теории рекурсивных функций, в частности, к известной классификации определимых множеств, идущей от Мостовского и Клини. Множество X целых положительных чисел принадлежит классу Q_3, если существует такая рекурсивная функция f, что $X = \mathrm{E}_y\left[\prod_x \sum_z \prod_u f(x, y, z, u) = 0\right]$. Автор исследует двойные последовательности вида $\{a^g_{x,y}\} = \{10^{-x} g(x, y)\}$, где g — рекурсивная функция, и получает следующие результаты: Класс Q_3 тождествен с классом множеств X_g вида $X_g = \mathrm{E}_y[\lim \{a^g_{x,y}\} = 0]$. Класс Q_3 тождествен с классом множеств X_g вида $X_g = \mathrm{E}_y[\lim \{a^g_{x,y}\}$ есть целое число$]$. Класс Q_3 тождествен с классом множеств вида $X_g = \mathrm{E}_y[\lim \{a^g_{x,y}\}$ есть иррациональное число$]$.

Остальные результаты носят аналогичный характер. Методы доказательства не выходят за пределы обычных методов теорем рекурсивных функций.

A. Grzegorczyk

5310. О невозможности доказать совместимость аксиом арифметики. Адамар (Sur l'impossibilité de démontrer la compatibilité des axiomes de l'arithmétique. Hadamard Jacques), Penseé, 1954, № 58, 82 (франц.)

Высказывается соображение о наличии разницы между основаниями геометрии и основаниями арифметики. В то время как изучение геометрии может происходить на чисто аксиоматической основе без какого-либо знакомства с интуитивной идеей протяженности, сомнительно, чтобы могло существовать мыслящее существо, незнакомое с понятиями «нуль», «один» и т. д. Критикуется претензия логицистов дать точное определение числа «один», так как понятие «точного определенного» (bien déterminé) объекта равнозначно понятию «однозначно определенного» (unique) объекта. Утверждается, что и Гильберт не сумел избавиться от этой трудности, поскольку, показывая непротиворечивость аксиом Пеано, он рассуждает о числе выводов, приписывая такого рода числам все свойства обычных целых чисел, включая «аксиому рекуррентности». A. С. Есенин-Вольпин

5311. О рекурсивных определениях в эмпирических науках. Бар-Хеллил (On recursive definitions in empirical sciences. Bar-Hillel Yehoshua), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5. Amsterdam—Louvain, 1953, 160—165 (англ.)

Автор замечает, что из-за вхождения определенного понятия (или термина) в обе части рекурсивного определения, последнее может быть воспринято неискушенным человеком как порочный круг — и что в эмпирических науках наблюдается бракование рекурсивных определений, как порочных. Приводятся примеры из лингвистики, где существует угроза такого смешения (например, понятия «предложение» и «подлежащее» определяются друг через друга, но это определение можно рассматривать не как порочный круг, а как совместную рекурсию).

A. С. Есенин-Вольпин

5312. По поводу ошибочной редукции понятий существования и истины. Краэ (A propos d'une réduction fallacieuse des notions d'existence et de vérité. Crahay Franz), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953,5. Amsterdam—Louvain, 1953, 156—159 (франц.)

Критикуется философская установка, согласно которой содержание понятий истины и существования исчерпывающим образом изучается в логике. Обсуждаются работы Юхоса (Juhos B., Die Anwendung der logistischen Analyse auf philosophische Probleme, Methodos, 1951, 10) и Эра (Ayer M., La vérité, сообщение на заседании Бельгийского философского общества, 1951). В связи с последней статьей оспаривается, в частности, мнение, что можно во всех случаях утверждать эквивалентности: «p» истинно$\equiv p$ и «p» ложно $\equiv \sim p$. A. С. Есенин-Вольпин

См. также: 5918

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

5313. Представление чисел в виде $n = \pm x_1^{k_1} \pm \pm x_2^{k_2} \pm \ldots \pm x_s^{k_s}$. Састри (Representation of numbers in the form. $n = \pm x_1^{k_1} \pm x_2^{k_2} \pm \ldots \pm x_s^{k_s}$. Sastry S.), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1955—1956, 6, № 2, 214—216 (англ.)

Элементарно выводится, что всякое натуральное число n представляется с целыми x_i в виде:

а) $n = \pm x_1^{k_1} \pm \ldots \pm x_s^{k_s}$, где $k_1, \ldots, k_s$ — натуральные $\geqslant 2$ и $\leqslant k$, $s \leqslant 2^k + 2k$;

б) $n = x_1^4 - x_2^4 - x_3^3 + x_4^3 + x_5^3$;

в) $n = x_1^5 + x_2^5 - 2x_3^5 + x_4^5 - x_5^3 + x_6^3 - x_7^3$. В. И. Нечаев

5314. О проблеме Пруэт-Лемера. Дин (On Prouhet Lehmer problem. Din Deota), J. Scient. Res.

Banaras Hindu Univ., 1955—1956, 6, № 2, 221—226 (англ.)

Пусть $P(k, s)$ обозначает наименьшее j такое, что система $k(s-1)$ диофантовых уравнений

$$\sum_{i=1}^{j} x_{1i}^h = \sum_{i=1}^{j} x_{2i}^h = \ldots = \sum_{i=1}^{j} x_{si}^h \quad (1 \leqslant h \leqslant k)$$

имеет нетривиальное решение в натуральных числах. Доказывается, что $P(4, s) \leqslant 2s+1$, $P(6, s) \leqslant 3s+2$ и при $k \geqslant 6$ $P(k, s) \leqslant s^{k-6}(3s+1)+1$.

Указывается, что для малых k получающиеся оценки улучшают результаты Е. М. Райта и Хуа Ло-гэна (см. также РЖМат, 1956, 4295, 4296). В. И. Нечаев

5315. Проблема аддитивной теории чисел. Састри, Сингх (A problem in additive number theory. Sastry S., Singh Raghuraj), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1955—1956, 6, № 2, 251—265 (англ.)

Доказываются:

Теорема 1: Пусть $K(n)$ — число целых чисел u, не превосходящих действительного числа n, не представимых в форме

$$u = x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^6, \qquad (1)$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 — целые положительные числа. Тогда для любого положительного числа ε_1

$$K(n) = O(n^{1-1/9+\varepsilon_1}).$$

В частности, почти все положительные целые числа представимы в форме (1).

Теорема 2. Любое достаточно большое целое положительное число n может быть представлено в форме

$$n = x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^6 + \sum_{s=5}^{45} x_s^{s+1},$$

где все x_i — целые положительные числа. С. В. Огай

5316. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. Постников А. Г., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 6, 751—764

Пусть $f(x)$ — функция, принимающая целые значения при целых значениях x, $r_{n,p}(N)$ — число решений уравнения $f(x_1) + \ldots + f(x_n) = N$ в целых x_j при условии $0 \leqslant x_j \leqslant p$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть p — натуральное. Если ξ_j $(j = 1, \ldots, n)$ — одинаково распределенные случайные величины, каждая из которых принимает значения $f(0)$, $f(1)$, $\ldots$, $f(p)$ с равными вероятностями $(p+1)^{-1}$, то

$$r_{n,p}(N) = (p+1)^n P\left\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j = N\right\},$$

где $P\{\ldots\}$ — вероятность события, указанного в скобках. При $n \to \infty$ и фиксированном p оценка $r_{n,p}(N)$ следует из известных локальных предельных теорем теории вероятностей. В случае же, когда p может расти вместе с n, такие оценки получаются путем привлечения оценок тригонометрической суммы

$$\sum_{x=0}^{p^r} \exp\{2\pi i a f(x)\}.$$

Рассматриваются конкретно два частных случая $f(x) = x$ и $f(x) = x^2$ и показывается, что существует такая константа $K > 1$, что при $n \to \infty$ и $p \leqslant K^n$ равномерно относительно целых N

$$r_{n,p}(N) = (p+1)^n (2\pi n\sigma^2)^{-1/2}\{\exp[-(N-na)^2/2n\sigma^2] + O(n^{-1/2})\},$$

где a, σ^2 — среднее значение и дисперсия случайной величины ξ_j: 1) $a = p/2$, $\sigma^2 = p(p+2)/12$ при $f(x) = x$, 2) $a = p(2p+1)/6$, $\sigma^2 = p(p+2)(2p+1)(8p-3)/180$ при $f(x) = x^2$.

Предварительное сообщение о результатах было опубликовано автором ранее (РЖМат, 1957, 2005, 3726).

Опечатка: в формуле (2) вместо $2\pi i f(x)$ следует читать $2\pi i a f(x)$. П. И. Кубилюс

5317. Аддитивная теория простых чисел в поле алгебраических чисел. Тацудзава (Additive prime number theory in an algebraic number field. Tatuzawa Tikao), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, Suppl. dec., 409—423 (англ.)

Пусть K — поле алгебраических чисел степени n над рациональным полем, I — аддитивная группа целых чисел поля K, Γ — кольцо целых рациональных чисел, J — аддитивная группа простых чисел поля K (т. е. таких целых чисел K, которые порождают простые главные идеалы поля K) с областью операторов Γ. Очевидно J — подгруппа группы I.

Пусть ζ — целое число поля K, удовлетворяющее условию

$$\|\zeta\| \leqslant c_1 \sqrt[n]{N(\zeta)},$$

т. е. неравенствам

$$|\xi^{(i)}| \leqslant c_1 \sqrt[n]{N(\zeta)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где c_1 — постоянное число. Обычным методом подсчета целых точек n-мерного пространства находится асимптотическая формула

$$P(\alpha, \zeta) = c\frac{(N\zeta)}{N(\alpha)} + O\left(\left(\frac{N(\zeta)}{N(\alpha)}\right)^{1-1/n} + 1\right) \qquad (1)$$

для числа $P(\alpha, \zeta)$ целых чисел ξ поля K, удовлетворяющих условиям $\xi \equiv \beta \pmod{\alpha}$, $\|\xi\| \leqslant c_1\|\zeta\|$, $\|\zeta - \xi\| \leqslant c_1\|\zeta\|$, где α — целый идеал поля K, $\beta \in I$.

На основе (1), пользуясь методом решета Бруна применительно к алгебраическим числовым полям, дается оценка (теорема 1):

$$P(\zeta) = O\left(\frac{N(\zeta)}{\log^2 N(\zeta)} \sum_{\zeta \in \alpha} \frac{1}{N(\alpha)}\right)$$

для числа $P(\zeta)$ решений уравнения $\zeta = \lambda + \mu$ в целых простых числах λ и μ поля K, удовлетворяющих условиям:

$$\|\lambda\| \leqslant c_0 \sqrt[n]{N(\lambda)}, \quad c_1\|\zeta\|; \quad \|\mu\| \leqslant c_0 \sqrt[n]{N(\mu)}, \quad c_1\|\zeta\|.$$

Из теоремы 1 и закона распределения простых идеалов в алгебраическом числовом поле доказывается неравенство

$$E(x) > cx^n$$

для числа $E(x)$ целых чисел $\zeta \in I$, представимых как сумма $\zeta = \lambda + \mu$ двух простых чисел λ, μ с условиями: $\|\zeta\| \leqslant x$; $\|\lambda\|$, $\|\mu\| \leqslant c_1 x$ (теорема 2).

Дается обобщение теоремы Шнирельмана для полей алгебраических чисел: всякое целое число поля K может быть представлено как сумма не более чем c простых чисел этого поля, где c — константа, зависящая от структуры поля K (теорема 3). Оценка для c не дается. Доказывается, что J — подгруппа конечного индекса в аддитивной группе J.

Б. М. Уразбаев

5318. Исследования о поведении последовательности $\{(p_{n+1} - p_n)/\log p_n\}$. Риччи (Recherches sur l'allure de la suite $\{(p_{n+1} - p_n)/\log p_n\}$. Ricci Giovanni), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège—Paris, 1956, 93—106 (франц.)

Рассматривается последовательность

$$\left\{\frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n}\right\}, \qquad (1)$$

где p_1, p_2, ... — последовательные простые числа, а также множество ее значений. Доказывается несколько предложений о множестве значений (1) со «сгущенной» плотностью. Они рассматривают длину и положение интервала-минимум, содержащего это множество, и меру самого множества.

Работа является вариантом других работ автора (РЖМат, 1955, 5575, 5576; 1956, 132—134).

Опечатка: На стр. 98 неверно дана константа Шаха и Вильсона. Нужно $H=\prod_{p\geqslant 3}\{1-1/(p-1)^2\}=0{,}6601\ldots$

В. А. Голубев

5319. К структуре некоторых теорем о простых числах. Хорнфек (Zur Struktur gewisser Primzahlsätze. Hornfeck Bernhard), J. reine und angew. Math., 1956, 196, № 3—4, 156—169 (нем.)

Обозначения и определения:

$$\mathfrak{M}=\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$$

— возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$M(x)=\sum_{0<m_n\leqslant x}1,\quad \delta^*(\mathfrak{M})=\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}$$

— асимптотическая плотность последовательности $\mathfrak{M}$, $\overline{\delta}^*(\mathfrak{M})=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{M(x)}{x}$ — верхняя асимптотическая плотность $\mathfrak{M}$,

$$\delta_*(\mathfrak{M})=\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{M(x)}{x}=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{M(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}$$

— натуральная плотность $\mathfrak{M}$, $\delta(\mathfrak{M})=\inf_{x=1,2,3,\ldots}\frac{M(x)}{x}$ — конечная плотность (по Шнирельману).

Если $0<\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{M(x)}{\psi(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{M(x)}{\psi(x)}<\infty$, $\psi(x)\to\infty$ монотонно, то говорят, что $\mathfrak{M}$ имеет характеристическую ψ-плотность.

Множество $\mathfrak{M}$ называется рациональным, если, начиная с некоторого места, оно состоит из полных классов вычетов по некоторому модулю m.

Множество $\mathfrak{M}$ называется псевдорациональным, если существует пара таких рациональных множеств $\mathfrak{R}_\varepsilon$ и $\mathfrak{R}^\varepsilon$, что $\mathfrak{R}_\varepsilon\subseteq\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{R}^\varepsilon$ и $\delta_*(\mathfrak{R}^\varepsilon)-\delta_*(\mathfrak{R}_\varepsilon)<\varepsilon$. $\mathfrak{A}=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, для которых $(a_i, a_j)=1$ $(i\neq j)$; T — совокупность всех $\mathfrak{A}$.

Типичные теоремы:

Теорема 2. Если $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k\in T$, то $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\ldots\mathfrak{A}_k$ псевдорационально.

Теорема 3. Если $\mathfrak{A}\in T$, $A_\nu^*(x)$ обозначает число всех a_i, $a_i\leqslant x$, $a_i\in\mathfrak{A}$, содержащих не менее ν простых множителей (учитывая их кратность), то

$$A_\nu^*(x)=O\left(x^{1/\nu}\right).$$

Теорема 5. Если $\mathfrak{A}\in T$, $d_1=0$, $d_2, \ldots, d_k$ — любые целые числа и $A(x; d_1, d_2, \ldots, d_k)$ — число всех a_i, $a_i\leqslant x$, $a_i\in\mathfrak{A}$, для которых a_i+d_λ $(\lambda=1, 2, \ldots, k)$ принадлежит $\mathfrak{A}$, то

$$A(x; d_1, d_2, \ldots, d_k)<c_5(k; d_1, d_2, \ldots, d_k)\frac{x}{\log^k x},$$

Теорема 9. (Обобщение теоремы Н. П. Романова). Если $\mathfrak{A}\in T$, $x/\log x$ — характеристическая плотность $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}^*\subseteq\mathfrak{G}=\{a^0, a^1, a^2, \ldots\}$, где $a\geqslant 2$ — целое, то для $H^*=\mathfrak{A}+\mathfrak{G}^*$ при $x\geqslant x_0(a)$

$$H^*(x)>c_0\frac{x\mathfrak{G}^*(x)}{\log x}.$$

П. Г. Когония

5320. О распределении значений некоторых арифметических функций. Делаж (Sur la distribution des valeurs de certaines fonctions arithmétiques. Delange Hubert), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège-Paris, 1956, 147—161 (франц.)

Множество простых чисел E автор называет регулярным, если существуют положительное число $\alpha\leqslant 1$ и голоморфная при $\mathrm{Re}\, s\geqslant 1$ функция $\delta(s)$ такие, что

$$\sum_{p\in E}p^{-s}=-\alpha\log(s-1)+\delta(s). \qquad (1)$$

Пусть $\omega_E(n)$ — число различных простых делителей, а $\Omega_E(n)$ — число всех простых делителей натурального n, принадлежащих E; F — семейство функций $\omega_E(n)$ и $\Omega_E(n)$, соответствующих всем возможным регулярным E. Пусть q, q' — любые натуральные, r, r' — любые целые числа, $x\to\infty$.

Доказывается: 1) Если $f(n)\in F$, то число натуральных $n\leqslant x$, для которых $f(n)\equiv r\pmod q$, асимптотически равно x/q.

1) Если $f(n)$ и $g(n)\in F$ и соответствуют одному и тому же множеству E или двум различным множествам простых чисел без общих элементов, то число натуральных $n\leqslant x$, удовлетворяющих условиям $f(n)\equiv r\pmod q$, $g(n)\equiv r'\pmod{q'}$, асимптотически равно x/qq'.

Доказательство основано на рассмотрении рядов

$$\sum_{n\in A}z^{f(n)}n^{-s},\quad \sum_{n\in A}u^{f(n)}v^{g(n)}n^{-s},$$

где A — некоторое множество натуральных чисел.

Результаты, аналогичные 1) и 2), получены также для случая, когда n пробегает не все натуральные числа, а лишь свободные от квадратов, а также для n, принадлежащих заданной арифметической прогрессии, если E совпадает с множеством всех простых чисел.

Высказывается предположение, что результаты остаются в силе при замене условия (1) условием ряда $\sum_{p\in E}p^{-1}$.

И. П. Кубилюс

5321. Об одном нелинейном дифференциальном операторе, связанном с автоморфными функциями. Левин Б. В., Тр Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 129—138

Вводится оператор

$$B_{r,k}(f(\tau), \varphi(\tau))=$$
$$=\sum_{n=0}^{r}{}'(-1)^nC_{2r}^n\frac{(k+2r-1)\ldots(k+2r-n)}{k\ldots(k+n-1)}\frac{d^n}{d\tau^n}f(\tau)\frac{d^{2r-n}}{d\tau^{2r-n}}\varphi(\tau).$$

Здесь штрих обозначает, что последний член взят с коэффициентом 1/2. Рассматривается несколько свойств этого оператора.

Основным результатом является

Теорема. Если $f(\tau)$ — модулярная функция типа $\{-k, N, C\}$, то $B_{r,k}(f(\tau), \varphi(\tau))$ — модулярная функция типа $\{-4r-2k, N, C^2\}$.

С помощью этой теоремы и одной известной теоремы из теории модулярных функций автор получает решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений типа Ван дер Поля и некоторые тождества для функции $\tau(n)$ Рамануджана.

Этим методом автор также получает простой вывод формул для числа представлений натуральных чисел суммами четного числа квадратов целых чисел

Далее, используя также теорию операторов Гекке, автор показывает, что $a(n)$, определенная равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i z n} = -\frac{1}{2\pi^2} B_{1,1/2}(\vartheta(\tau),\ \vartheta(\tau)),$$

удовлетворяет следующему правилу умножения:

$$a(n)\, a(m) = \sum_{d \mid (m,n)} a\left(\frac{mn}{d^2}\right) d^4 \chi(d),$$

где $\vartheta(\tau)$ — тэта-функция, $\chi(d)$ — неглавный характер mod 4. Оператор $B_{r,k}$ является упрощением оператора $A_{\rho,k,l}$ предыдущей работы автора (РЖМат, 1957, 3738).

Имеются опечатки. Г. А. Ломадзе

5322. Теоремы о трансцендентных числах. Попкен (Un théorème sur les nombres transcendants. Popken J.), Bull. Soc. math. Belgique, 1955, 7, № 2, 124—130 (франц.)

Основная теорема. Пусть $F(z)$ — многочлен с алгебраическими коэффициентами, не равный тождественно нулю, такой, что $F(0) = 0$, а r — произвольное рациональное число. Положим для $n = 1, 2, \ldots$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+r}\left(\dfrac{d^n}{dz^n} e^{(n+r)F(z)}\right)_{z=0}, & \text{если } n + r \neq 0, \\ 0, & \text{если } n + r = 0. \end{cases}$$

Тогда $f(z) = \sum_1^{\infty} F_n \dfrac{z^n}{n!}$

порождает многозначную аналитическую функцию, которая для каждого алгебраического z, отличного от нулей $F(z)$, регулярна, и в таких точках z $f(z)$ и все ее последовательные производные принимают трансцендентные значения.

Статья не содержит новых идей в теории трансцендентных чисел. Сформулированная теорема есть следствие известного факта, что $\exp z$ принимает трансцендентные значения в любой алгебраической точке $z \neq 0$. А. Б. Шидловский

5323. Теоремы о трансцендентных числах. Попкен (Some theorems concerning transcendental numbers. Popken M. J.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège—Paris, 1956, 107—110 (англ.)

Формулируются результаты, опубликованные в статье автора (реф. 5322). А. Б. Шидловский

5324. Об одном результате Маршалла Холла. Касселс (On a result of Marshall Hall. Cassels J. W. S.), Mathematika, 1956, 3, № 6, 109—110 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — любые вещественные числа. Существует такое вещественное число α, что

$$|\alpha + \beta_j - y/x| > (1/8)(r+1)^{-2} x^{-2} \quad (j = 1, \ldots, r) \quad (1)$$

для всех целых $x > 0$, y.

Случай $r = 2$ с некоторой другой константной вместо $(1/8)(r+1)^{-2}$ следует из одного результата Холла (Holl M., Ann. Math., 1947, 48, 966—993). Теорема вытекает непосредственно из следующего предложения, доказываемого в статье: существует последовательность открытых интервалов $\mathfrak{I}_n$ ($n = -1, 0, 1, \ldots$) длины R^{-2n-2} таких, что $\mathfrak{I}_{n+1} \subset \mathfrak{I}_n$ и имеет место для всех $\alpha \in \mathfrak{I}_n$, всех целых y и всех натуральных $x \leqslant R^n$, где $R = (2(r+1))^{1/2}$. И. П. Кубилюс

5325. Одновременные диофантовы приближения. Давенпорт (Simultaneous diophantine approximation. Davenport H.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 9—12 (англ.)

Обзор некоторых работ по одновременным диофантовым приближениям. Библ. 5 назв. А. В. Малышев

5326. О представлении чисел квадратичной формой $x^2 + y^2 + pz^2 + pt^2$. Левин Б. В., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 123—128

Пусть n и r — целые положительные числа; $N_r(n)$ — количество представлений числа n формой $x^2 + y^2 + rz^2 + rt^2$. Элементарным путем получен ряд соотношений для $N_r(n)$. Отметим для примера следующую формулу: пусть p — простое нечетное число, $r = p^k$, $n = 2^\alpha p^\beta m$, где m просто с $2p$, $\beta \geqslant k - 1$; тогда

$$N_{p^k}(2^\alpha p^\beta m) = \frac{1}{4}\{2k(1+\chi(p))(-1)^{\beta+k+1} + (1-(-1)^k(1-\chi(p)))\, N_p(2^\alpha m) + 2\{2[k(p-1)(p^{\beta-k+1} + (-1)^{\beta+k}) + (p+1)(p^{\beta-k+1}-1)](1+\chi(p)) + (p+1)(p^{\beta-k+1}-1)(1+(-1)^k)(1-\chi(p))\}\frac{2+(-1)^n}{p^2-1}\sigma(m),$$

где $\chi(p) = (-1)^{(p-1)/2}$, $\sigma(m) = \sum_{d \mid m} d$.

А. В. Малышев

5327. Неопределенные квадратичные формы от многих переменных. Давенпорт (Indefinite quadratic forms in many variables. Davenport H.), Mathematika, 1956, 3, № 6, 81—101 (англ.)

Пусть $Q(x_1, \ldots, x_n)$ — неопределенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами и $n \geqslant 5$. Имеется до сих пор не доказанная гипотеза о том, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие целые числа $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, что

$$|Q(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Для случая форм вида $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ гипотеза доказана Давенпортом и Гейльбронном (Davenport H., Heilbronn H., J. London Math. Soc., 1946, 21, 185—193). Другие частные случаи рассмотрены Уотсоном (РЖМат, 1954, 2506). В реферируемой статье обобщением метода Давенпорта и Гейльбронна (см. выше) эта гипотеза доказана для общих форм $Q(x_1, \ldots, x_n)$ в случае, когда $r \geqslant 37$, $n - r \geqslant 37$, где r — количество отрицательных квадратов в представлении $Q(x_1, \ldots, x_n)$ суммой квадратов.

А. В. Малышев

5328. Неопределенные квадратичные полиномы от n переменных. Фостер (Indefinite quadratic polynomials in n variables. Foster D. M. E.), Mathematika, 1956, 3, № 6, 111—116 (англ.)

Пусть $q(x_1, \ldots, x_n)$ — неопределенная квадратичная форма от n переменных с вещественными коэффициентами и определителем $\Delta_n \neq 0$. Бланей (Blaney H., J. London Math. Soc., 1948, 23, 153—160) доказал, что для любого $\gamma \geqslant 0$ найдется такое число $\Gamma = \Gamma(\gamma, n)$, что неравенство

$$\gamma |\Delta_n|^{1/n} < q(x_1 + \alpha_1, \ldots, x_n + \alpha_n) < \Gamma |\Delta_n|^{1/n}$$

разрешимо в целых числах $x_1, \ldots, x_n$ при любых вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Доказывается, что за такое Γ можно взять число

$$\Gamma(\gamma, n) = \gamma + C_n \gamma^{1/2^n} + C_n',$$

где C_n и C_n' зависят только от n. А. В. Малышев

5329. К теории бинарных кубических форм. Пилер (Zur Theorie der binären kubischen Formen. Piehler Joachim), Math. Ann., 1956, 132, № 3, 177—179 (нем.)

Пусть $f(x, y)$ — бинарная кубическая форма с целыми взаимно простыми коэффициентами. Пусть все коэффициенты ее гессиана делятся на простое число $p = 3n + 1$. Тогда из одного тождества сразу вытекает, что все числа, представимые формой $f(x, y)$, имеют одинаковый кубический характер по модулю p. Путем более длительных рассуждений установлено, что никакие другие простые модули этим свойством не обладают. В. Д. Подсыпанин

5330. Диофантово уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$. Морделл (The diophantine equation $(x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$. Mordell L. J.), Colloq. théorie nombres, Bruxelles, 1955. CBRM. Liège—Paris, 1956, 67—76 (англ.)

Диофантово уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$ симметрично и однородно относительно неизвестных. Поэтому из любого его решения можно получить другие решения перестановкой значений неизвестных или умножением их на любое целое число. Не будем считать эти решения за различные. Тогда при любом k уравнение имеет тривиальное решение $(1, -1, 0)$.

Как показал Гурвиц (Hurwitz, Math. Werke, B. II, 1917, 465—468) при $k \neq 1$ или -5 уравнение или не имеет других целых решений или же имеет их бесконечное множество. В статье исследованы случаи $k = 1$ и -5. Доказано, что в этих случаях, кроме тривиального решения, уравнение имеет только одно решение $(1, 1, -1)$ для $k = 1$ и $(1, 1, 2)$ для $k = -5$. В. Д. Подсыпанин

5331. Уравнение Ферма. Цеккендорф (L'équation de Fermat. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy sci. Liège, 1956, 25, № 6, 414—425 (франц.)

В уравнении $x^2 + 1 = My^2$ число M должно представлять сумму квадратов двух взаимно простых чисел. Доказывается, что данное уравнение может иметь целые решения лишь в случае, если коэффициент M есть простое число $p \equiv 1 \pmod 4$ или число вида $8C_x^2 + 5$. Определяется 6 групп чисел $M = a^2 + b^2$, при которых данное уравнение не может иметь решений в целых числах. В. А. Голубев

5332. О делимости числа классов квадратичных полей. Анкень, Човла (On the divisibility of the class number of quadratic fields. Ankeny N. C., Chowla S.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 321—324 (англ.)

Доказывается, что если d свободно от квадратов и удовлетворяет условиям:

$$d = 3^{2g} - x^2,\ 2 \mid x,\ 0 < x < (2 \cdot 3^{2g-1})^{1/2},$$

то $2g \mid h$, где h — число классов идеалов в поле $R(\sqrt{-d})$. При g достаточно большом, число таких чисел d будет $\geqslant 3^g/25$. Отсюда следует, что существует бесконечно много мнимых квадратичных полей с числом классов идеалов, делящимся на любое заданное натуральное число.

Аналогично устанавливается, что если d свободно от квадратов, $d = n^{2g} + 1$, $n > 4$, то $g \mid h_1$, где h_1 — число классов идеалов поля $R(\sqrt{d})$. Из этой теоремы, однако, нельзя заключить, что существует бесконечно много d, для которых h_1 делится на заданное g, ибо неизвестно, существует ли бесконечно много свободных от квадратов чисел вида $n^{2g} + 1$. А. А. Киселев

5333. Правило для построения полей с четным числом классов идеалов. Кон (A device for generating fields of even class number. Cohn Harvey), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 595—598 (англ.)

Пусть $g > 0$, m, $k > 1$ — целые числа. Доказываются теоремы:

1. Если $m = (k^2 - 1)/g + g$, а $f = m^2 + 4$ свободно от квадратов, то квадратичное поле дискриминанта f имеет четное число классов идеалов.

2. Если $m = (k^2 - 2g - 1)/g(g + 1) + g - 1$, а $f = m^2 + 3m + 9$ свободно от квадратов, то могут быть построены абелевы кубические поля дискриминанта f^2 с четным числом классов идеалов.

Приложена таблица неразветвленных квадратичных расширений кубических полей с четным числом классов идеалов и простым ведущим идеалом $f = m^2 + 3m + 9 < 100\,000$, образованных присоединением чисел $[\xi(\xi - g)]^{1/2}$, нормы k, где $\xi^3 - m\xi^2 - (m + 3)\xi - 1 = 0$. А. А. Киселев

5334. Некоторые комбинаторные задачи с точки зрения вычислительной математики. Брук (Computational aspects of certain combinatorial problems. Bruck R. H.), Proc. Sympos. Appl. Math., 6. New York—Toronto—London, 1956, 31—43 (англ.)

Разбирается применение счетных машин к решению задач теории чисел. Рассматривается решение следующей проблемы. Пусть m — фиксированное положительное целое, p — простое вида $p \equiv 1 \pmod m$, g — первообразный корень сравнения $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$; пусть $(u, v)_m$ обозначает количество пар расположенных в определенном порядке целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant x < (p - 1)/m,\ 0 \leqslant y < (p - 1)/m,$$

и таких, что

$$g^{u+mx} + g^{v+my} + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Задача состоит в определении количества таких пар (x, y) для каждой пары целых u и v.

Для $m = 3$ задача решена еще Гауссом, решена она и для некоторых других значений m. Автор указывает, по какой схеме удобно решать эту задачу при любом m, применяя счетную машину. Рассматривается также, как найти число решений сравнения $g^{u+mx} + g^{v+my} + g^{w+mz} + 1 \equiv 0 \pmod p$ для каждой тройки целых u, v, w.

К определению числа решений подобных сравнений сводятся многие задачи теории чисел, например, изучение сумм Гаусса

$$S_m(a) = m^{-1} \sum_{x=1}^{p-1} \exp(2\pi i a x^m/p),$$

где a — целое, взаимно простое с p. Е. П. Ожигова

5335. О выражении интегрального частного двух арифметических функций. Суччи (Sulla espressione del quoziente integrale di due funzioni aritmetiche. Succi Francesco), Rend. mat. e applic., 1956, 15, № 1—2, 80—92 (итал.)

Интегральным произведением двух арифметических функций $f(n)$ и $g(n)$ называется арифметическая функция

$$h(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g(n/d).$$

Совокупность всех арифметических функций образует коммутативное кольцо относительно обычного сложения и интегрального умножения. Интегральное деление — обратная операция интегральному умножению — не всегда выполнимо. Аманте (Amante S., Atti Accad. Palermo, 1937, 20), и Пеллегрино предложили для вычисления интегрального частного $f(n)$ двух функций $h(n)$ и $g(n)$, когда оно существует, формулы в виде определителей, элементами которых являются значения функций $h(n)$, $g(n)$ и порядки растут вместе с n. Автор дает две аналогичные формулы в виде определителей вообще меньшего порядка,

а также необходимые и достаточные условия для существования интегрального частного.
И. П. Кубилюс

5336. Об одной теореме Л. Е. Диксона. II. Канольд (Über einen Satz von L. E. Dickson. II. Kanold Hans-Joachim), Math. Ann., 1956, 132, № 3, 246—255 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 58. Доказывается обобщенная теорема (шестая) первой части: Пусть k, n, N, r, Z — натуральные числа, фиксированные, кроме n, при этом $(N, Z)=1$. Пусть $V(n)$ — число различных простых делителей n и $\sigma_r(n)=\sum_{d|n} d^r$. Существует бесконечное множество чисел n, удовлетворяющих равенствам $\sigma_r(n)/n^r=Z/N$ и $V(n)=k$ тогда и только тогда, когда удовлетворяются четыре следующие условия: 1) $r=1$; 2) $Z\equiv 0 \pmod 2$; 3) имеется по крайней мере одно нечетное число m, удовлетворяющее соотношениям $\sigma_1(m)/m=\sigma(m)/m=Z/2N$ и $V(m)=k-2$; 4) существует бесконечное множество четных совершенных чисел. Во всяком случае имеется самое большее только конечное число чисел n, удовлетворяющих вышеуказанным равенствам и не имеющих вида $n=mv$, где $(m, v)=1$ и v — совершенное четное число, о котором можно предположить, что оно находится вне любого данного отрезка S.

Довольно длинное доказательство основано на лемме: Пусть a, b, x, y — натуральные числа; a и b — фиксированные числа, удовлетворяющие неравенствам $1<a<b$. Тогда уравнение $1+a+a^2+\ldots+a^{x-1}=1+b+b^2+\ldots+b^{y-1}$ имеет только конечное число решений x, y. Дан ряд следствий из теоремы.
В. А. Голубев

5337. Об одном вопросе диофантова анализа. Митринович (Sur une question d'analyse diophantienne. Mitrinovitch Dragoslav S. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz., 1956, № 6, 4 p.) (франц.; рез. сербохорв.)

Если a, b, p, q — рациональные числа, то сумма $\sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)p][b+(k-1)q]$ выражается в виде произведения трех линейных множителей в n с рациональными коэффициентами тогда и только тогда, когда выражение $9(aq+bp-pq)^2-8pq[pq-3(aq+bp)+6ab]$ является квадратом рационального числа.

Даны три независимых решения этого вопроса, и поставлена задача его обобщения.
В. А. Голубев

5338. Один результат в элементарной теории чисел. Шеффер (A result in elementary number theory. Schäffer Juan Jorge), Nieuw arch. wiskunde, 1956, 4, № 3, 118—123 (англ.)

Доказывается, что существует только десять натуральных чисел, именно 1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 28, 30, 36 таких, что сумма цифр любого из них, написанного в любой системе счисления с нечетным простым основанием системы, меньше основания системы счисления.
В. А. Голубев

5339. Наименьшее решение диофантова уравнения. Левит (A minimum solution of a diophantine equation. Levit R. J.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 9, 646—651 (англ.)

Известно, что уравнение $ax+by=c$ имеет целые решения в случае, если c делится на наибольший общий делитель чисел a и b. Описывается несколько измененный способ Эйлера для нахождения наименьших по абсолютной величине целых решений данного уравнения.
В. А. Голубев

5340. О систематическом решении задачи о взвешивании. Айгнер (Über die systematische Lösung einer Wägungsaufgabe. Aigner Alexander), Math.-phys. Semesterber., 1956, 5, № 1—2, 162—163 (нем.)

Рассматривается вариант известной задачи об определении фальшивой монеты наименьшим числом взвешиваний.
Н. Н. Воробьев

АЛГЕБРА

5341 К. Элементарная алгебра. Шут (Elementary algebra. Shute William G. and others. Amer. book, 1956, 488 pp., ill., 3.20 doll.), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 2, 86 (англ.)

5342 К. Лекции по алгебре. Элементы теории чисел, поля и области целостности, многочлены, алгебраические уравнения. Асколи (Lezioni di algebra. Elementi di teoria dei numeri, corpi e campi d'integrità polinomi, equazioni algebriche. Ascoli Guido. Torino, Ed. tip. Gheroni, 1955, 340 p., 2200 L.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 68 (итал.)

5343 К. Элементы современной алгебры. Лентен, Ривo (Eléments d'algèbre moderne. Lentin André, Rivaud Jacques. Paris, Vuibert, 1956, viii, 283 p., 2000 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 24, 558 (франц.)

5344 К. Основные концепции высшей алгебры. Алберт (Fundamental concepts of higher algebra. Albert Abraham Adrian. Chicago, Univ. Press; London, Cambridge Univ. Press, 1956, ix, 165 pp., 49 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 367, 14 (англ.)

5345 К. Высшая алгебра и дифференциальное исчисление. Такэути (高等代數學と微分學. 竹内五一. 電氣書院, 83 頁, 150 圓, Дэнки-сёин, 1954, 83 стр., 150 иен) (японск.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

5346. Характеристические корни произведения матриц. Хан (The characteristic roots of the product of matrices. Khan N. A.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 138—143 (англ.)

Пусть $c(A)$ — произвольное характеристическое число матрицы $A=(a_{ij})_1^n$, $R(A)=\max_i \sum_j |a_{ij}|$ и $T(A)=\max_i \sum_i |a_{ij}|$. Для любых $n\times n$-матриц A и B доказано неравенство:

$$|c(AB)|\leqslant \min\{R(A)R(B), T(A)T(B)\}.$$

Для $B=J$ из этого неравенства вытекает известное неравенство Фарнеля: $|c(A)|\leqslant [R(A)T(A)]^{1/2}$ (Bull. Amer. Math. Soc., 1951, 57, 103—108).
Ф. Р. Гантмахер

5347. О характеристическом многочлене произведения нескольких матриц. Рот (On the characteristic polynomial of the product of several matrices. Roth William E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 578—582 (англ.)

Пусть A — произвольная $n\times n$-матрица, R и S_i — произвольные $1\times n$-матрицы над некоторым полем.

Полагая $A_i = A + R^T S_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ где R^T — транспонированная матрица для R и $|xI - A_i| =$

$$= m_{i0} + m_{i1}x + \ldots + m_{i,r-1}x^{r-1},$$

где m_{ij} — многочлены относительно x^r, рассмотрим определитель $\Delta(x^r) = |C_{ij}|$, где $c_{ij} = m_{i,r-j+i}\, x^{r-j+i}$, если $i < j$ и $c_{ij} = m_{i,\,i-j}x^{i-j}$, если $i \geqslant j$. Оказывается, что

$$|xI - A_1A_2 \ldots A_r| = (-1)^{(r-1)n}\Delta(x).$$

Пусть далее D_i $(i = 1, \ldots, r)$ — матрицы, перестановочные друг с другом и с матрицей A. Полагая $|xI - A| = m_0 + m_1x + \ldots + m_{r-1}x^{r-1}$, где m_i — многочлены относительно x^r, рассмотрим определитель $\bar{\Delta}(x^r) = |d_{ij}|$, $d_{ij} = m_{r-j+i}x^{r-j+i}$, если $i < j$, и $d_{ij} = m_{i-j}x^{i-j}$, если $i \geqslant j$. Оказывается, что

$$|xI - (A + D_1)(A + D_2) \ldots (A + D_r)| = (-1)^{(r-1)n}\bar{\Delta}(x).$$

Ф. Р. Гантмахер

5348. Новое доказательство теоремы Тауски и Гайрингера. Бреннер (Neuer Beweis eines Satzes von Taussky und Geiringer. Brenner J. L.), Arch. Math., 1956, 7, № 4, 274—275 (нем.)

Доказано, что любую прямоугольную матрицу $A = (a_{ij})$, элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_j{}' |a_{ij}| \quad \begin{matrix}(i = 1, \ldots, r)\\ (j = 1, \ldots, p)\end{matrix} \quad (r \leqslant p),$$

можно перестановками строк и столбцов привести к виду

$$\begin{pmatrix} P, & R \\ O, & Q \end{pmatrix},$$

где P — квадратная невырожденная матрица, причем элементы матрицы Q удовлетворяют соотношениям $|a_{ii}| = \sum_{j \neq i}{}' |a_{ij}|$. Если хотя бы один из главных миноров матрицы A равен нулю, то матрица Q не пуста. А. Ф. Голубчиков

5349 К. Осцилляционные теоремы для алгебраических задач на собственные значения и их приложения. Зинден (An oscillation theorem for algebraic eigenvalue problems and its applications. Sinden F. W.), Mitt. Inst. f. angew. Math. Eidg. Techn. Hochschule, Zürich, № 4, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1954, 57 S., Sfr. 6. 25 (англ.)

Пусть $V(\mathbf{x})$ — число перемен знака в последовательности координат некоторого n-мерного вещественного вектора $\mathbf{x}$. Вещественная матрица A называется знакопонижающей, если $V(\mathbf{x}) \geqslant V(A\mathbf{x})$ для любого вектора $\mathbf{x}$. Симметрическая положительно определенная матрица (только такие матрицы, как правило, и встречаются в приложениях) тогда и только тогда знакопонижающая, когда она вполне неотрицательна.

В первой части реферируемой книги рассматривается задача на собственные значения:

$$A\mathbf{x} = \lambda D(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где $A = (a_{ij})$ — знакопонижающая симметрическая положительно определенная матрица, а D — диагональная матрица с положительными элементами.

Доказывается (ср. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, М., Гостехиздат, 1950, изд. 2-е, стр. 105, теорема 61), что если все околодиагональные элементы $a_{i-1,i}$, $a_{i+1,i}$ матрицы A отличны от нуля, то 1) все собственные значения задачи (1) простые и положительные: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \ldots > \lambda_n > 0$; 2) если $\mathbf{f}_k$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k, то $V(\mathbf{f}_k) = k - 1$; 3) если $\mathbf{w} = \sum_{i=r}^{s} C_i\mathbf{f}_i$, где $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$, то $r - 1 \leqslant V(\mathbf{w}) \leqslant s^* - 1$.

Во второй части книги приводятся примеры часто встречающихся на практике задач, где свойство матрицы A понижать число перемен знака легко проверяется. Кроме того, указываются приложения к задачам на собственные значения, возникающим в теории дифференциальных уравнений. В качестве примера приводится уравнение поперечных колебаний стержня $(py'')'' = \lambda qy$ $(p(x) > 0$ и $q(x) > 0)$. При некоторых граничных условиях (например, при условиях $y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$) самосопряженный оператор $(py'')''$ (так же как и его конечноразностный аналог) является в силу теоремы Ролля знакоповышающим оператором. В. Б. Лидский

5350 К. Матричное исчисление. Ловаш-Надь (Mátrixszámítás. Lovass-Nagy Viktor. Budapest, Tankönyvkiadó, 1956, 207 l., 22 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1956, № 6, 192 (венг.)

5351 К. Линейные уравнения. Пинту (Equações lineares. Pinto Hébert Feliciano. Rio de Janeiro, Livro Técnico, 1956, 106, p., 50 crus.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 2, 81 (порт.)

5352 К. Определители и системы линейных уравнений. Стихи (Determinanți și sisteme de ecuații liniare. Stihi E. E., Ministerul Învățămîntului, Orașul Stalin, 1955, 89 p., il. — Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 10, 388 (рум.)

5353 К. Алгебраические уравнения. Решение в общем виде. Седили (Equazioni algebriche. Soluzione del problema generale. Sedili Rodolfo. Firenze, Ind. tipogr. fiiorent., 1955, 47 p., 200 l.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 71 (итал.)

ГРУППЫ

5354. Факторизация конечных групп. Чунихин С. А., Матем. сб., 1956, 39, 465—490

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 1063, 8598).

В. К. Туркин

5355. Дополнение к статье «Критические пары подмножеств группы простого порядка». Воспер (Addendum to «The critical pairs of subsets of a group of prime order». Vosper A. G.), J. London Math., Soc., 1956, 31, № 3, 280—282 (англ.)

Некоторое упрощение доказательства теоремы из указанной в заголовке статьи (РЖМат, 1957, 1149).

В. С. Чарин

5356. Дополнение прямого слагаемого абелевой группы, имеющего конечное число образующих. Кон (The complement of a finitely generated direct summand of an abelian group. Cohn P. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 3, 520—521 (англ.)

Доказано, что абелевы группы G и H изоморфны, если существует такая абелева группа F с конечным числом образующих, что группы $F + G$ и $F + H$ изоморфны. А. П. Мишина

5357. Заметка о ниль-группах без кручения. Риснер (A note on torsion-free nil groups. Ree R., Wisner R. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 6—8 (англ.)

Абелева группа G называется сильно ниль-группой (соответственно ниль-группой), если она не является аддитивной группой никакого (соответственно — никакого ассоциативного) кольца с ненулевым умножением. Доказывается, что группа $G = \sum_{\nu \in \Lambda} H_\nu$, где H_ν —

абелевы группы без кручения ранга 1, тогда и только тогда является сильно ниль-группой (соответственно, ниль-группой), когда для любых индексов $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ (соответственно, для любых индексов $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$, подчиненных условиям $\lambda = \mu = \nu$ или $\lambda \neq \nu, \mu \neq \nu$) тип a_ν группы H_ν либо меньше, либо не сравним с типом, соответствующим характеристике, полученной в результате почленного сложения характеристики типа a_λ с характеристикой типа a_μ. При этом если группа $G = \sum_{\nu \in \Lambda} H_\nu$ является ниль-группой, то она является и сильно ниль-группой. Таким образом, для групп, разлагающихся в прямую сумму абелевых групп без кручения ранга 1, классы ниль-групп и сильно ниль-групп совпадают. А. П. Мишина

5358. О предположении Анны Нёйман. Нёйман (On a conjecture of Hanna Neumann. Neumann B. H.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1956, 3, № 1, 13—17 (англ.)

Группа называется n-метабелевой, если любые ее n элементов порождают метабелеву подгруппу. А. Нёйман высказала предположение, что существуют 2-метабелевы группы, не являющиеся 3-метабелевыми и что класс 3-метабелевых групп не совпадает с классом метабелевых групп. Автор строит примеры, доказывающие оба эти предположения и, в частности, показывает, что силовская 2-подгруппа симметрической группы 8-й степени является 2-, но не 3-метабелевой.

А. И. Ширшов

5359. Центральные расширения абелевых групп. I. Калужнин Л. А., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 3, 262—272

Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — произвольные группы. Под $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s)$-расширением (G, G_i, φ_i) (сокращенно — Г-расширением) понимается группа G вместе с некоторым неполным нормальным рядом $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{s-1} \supset G_s$, у которого последняя группа G_s антиинвариантна (т. е. пересечение всех сопряженных с ней подгрупп равно единице) и такой системой гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$, что φ_i отображает группу G_{i-1} на группу Γ_i и имеет ядром группу G_i. Если $G_s = 1$, то Г-расширение называется регулярным. Для любой подгруппы H группы G положим $H_i = H \cap G_i$, $\bar{\varphi}_i = \varphi_i|_{H_{i-1}}$. Если $(H, H_i, \bar{\varphi}_i)$ также является Г-расширением, то она называется подрасширением расширения (G, G_i, φ_i). Два Г-расширения (G, G_i, φ_i) и (G', G'_i, φ'_i) называются изоморфными, если существует такой изоморфизм $\mu: G \approx G'$, что $\mu(G_i) = G'_i$ и $\varphi_i = \varphi'_i \mu|_{G_{i-1}}$.

Для любого $i = 1, \ldots, s$ рассмотрим множество C^i всех отображений произведения $\Gamma^i = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_i$ в группу Γ_i (здесь $C^1 = \Gamma_1$). Каждый элемент $u = (u_1, u_2, \ldots, u_s)$ произведения $C^1 \times \ldots \times C^s$ индуцирует на множестве Γ^s подстановку: $u(x_1, \ldots, x_s) = (u_1, x_1, u_2(x_1)\, x_2, \ldots, u_s(x_1, \ldots, x_{s-1})\, x_s)$, $x_i \in \Gamma_i$. Все получаемые таким образом подстановки множества Γ^s образуют некоторую группу A. Те подстановки из A, которые не меняют первых i координат элемента $e = (e_1, \ldots, e_s)$, где e_i — единица группы Γ_i, образуют некоторую подгруппу A_i. Если $u \in A_{i-1}$, то $ue = (e_1, \ldots, e_{i-1}, x, \ldots)$; причем отображение $\psi_i: u \to x$ является гомоморфизмом группы A_{i-1} на группу Γ_i с ядром A_i. Подгруппа A_s антиинвариантна в A. Следовательно, система (A, A_i, ψ_i) является Г-расширением. Это расширение называется универсальным расширением. Показывается, что любое Г-расширение изоморфно некоторому подрасширению универсального расширения (A, A_i, ψ_i). Любой изоморфизм между двумя подрасширениями универсального расширения A, A_i, ψ_i индуцируется внутренним автоморфизмом группы A, порождаемым некоторым элементом подгруппы A_s. З. И. Боревич

5360. О структуре бернсайдовской группы с двумя образующими и простым показателем $p > 3$. Мейер. Вундерли (Über die Struktur der Burnsidegruppen mit zwei Erzeugenden und vom Primzahlexponenten $p > 3$. Meier-Wunderli Heinrich), Comment. math. helv., 1956, 30, № 2, 144—160; № 3, 161—174 (англ.)

Пусть F — свободная группа с двумя образующими a_1 и a_2, $F = F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ — ее убывающий центральный ряд, B^p — фактор-группа группы F по нормальному делителю, порожденному p-тыми степенями ее элементов, $B^p = B^p_1 \supset B^p_2 \supset B^p_3 \supset \ldots$ — нижний центральный ряд группы B^p и $\delta^p_{(w_1, w_2)} = d_{(w_1, w_2)} - d^p_{(w_1, w_2)}$, где $d_{(w_1, w_2)}$ — число базисных коммутаторов группы F_w/F_{w+1}, имеющих относительно образующей a_i, $i = 1, 2$ вес w_i, а $d^p_{(w_1, w_2)}$ — число аналогичных элементов группы B^p_w/B^p_{w+1}. Доказано, что для любого $\tau = 0, 1, \ldots, p-2$

$$\delta^p_{(3,\, p+\tau-3)} = \frac{1}{3!}(a + 2\tau + 3\tau^2),$$

где число a определяется условиями: $-1 \leqslant a \leqslant 6$, $a \neq 0$, $a \neq 5$ и $a \equiv \tau \pmod 6$.

Отсюда с помощью ряда дополнительных соображений выводится, что класс нильпотентности c группы B^p при $p > 3$ больше или равен $2p - 1$. Из теоремы, доказанной ранее Грином (Green J. A., J. London Math. Soc., 1952, 27, 476—485), следовала оценка $c \geqslant 2p - 2$.

Попутно высказывается несколько утверждений относительно вида показателей в холловском тождестве, о строении свободной нильпотентной группы и т. д., частично известных из более ранних работ Холла и автора. А. И. Кострикин

5361. Замечания о группах. Оно, Цубои (Remarks on groups. Ono Katsuhiro, Tsuboi Teruo), Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I, 1953, 2, 13—15 (англ.)

Пусть G — группа, K — ее коммутант и Z — ее центр. Доказывается, что если в группе G существует абелев нормальный делитель A, фактор-группа по которому G/A является конечной циклической группой, то $A/(Z \cap A) \simeq K$. Этот результат обобщает теорему Туана о p-группах (Tuan, Acad. Sinica Sci. Record, 1950, 3, 17—23). R. Brauer

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 852.

5362. Замечание об S-группах. Итo (Note on S-groups. Itô Noboru), Proc. Japan. Acad., 1953, 29, 149—150 (англ.)

Пусть G — разрешимая группа с условием максимальности для подгрупп. Автор доказывает следующие теоремы. 1. Если подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ содержит коммутант группы G, то группа G нильпотентна (ранее этот результат был получен референтом (Proc. London Math. Soc., 1946, 49, № 2, 184—194). 2. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ нильпотентна. (Другое доказательство этого результата было дано референтом в указанной выше работе; см. также работу Бера (РЖМат, 1955, 1668)). 3. Если H — подгруппа группы G, коммутант которой является собственной подгруппой коммутанта группы G, то коммутант подгруппы $\Phi(G)H$ также будет собственной подгруппой коммутанта группы G. K. A. Hirsch

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 851.

5363. Структурные изоморфизмы групп, обладающих конечным рациональным рядом. Пекелис А. С., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 143—147

Доказано, что при структурном изоморфизме групп без кручения изолированный абелев нормальный делитель переходит в изолированный абелев нормальный делитель, изолированный нормальный делитель, обладающий возрастающим изолированным инвариантным во всей группе рядом с абелевыми факторами, переходит в нормальный делитель, обладающий теми же свойствами, конечный рациональный ряд переходит в конечный рациональный ряд, и, наконец, в группах, обладающих конечным рациональным рядом, изолированный нормальный делитель переходит в изолированный нормальный делитель. Л. Е. Садовский

5364. Замечание относительно одной теоремы Эллиса. Вальe-Флорес (Observacion sobre un teorema de D. Ellis. Valle Flores Enrique), Bol. Soc. mat. mexicana, 1953, 10, № 3—4, 31—32 (исп.)

Отмечается, что теорема Эллиса (РЖМат, 1953, 1086), сформулированная им для конечных и счетных групп, справедлива для групп произвольной мощности.

М. И. Граев

5365. Об одном результате Нёймана. Скотт (On a result of B. H. Neumann. Scott W. R.), Math. Z., 1956, 66, № 3, 240 (англ.)

Простое доказательство теоремы Нёймана (РЖМат, 1956, 5116).

5366. Образующие модулярной группы. Клинген (Über die Erzeugenden gewisser Modulgruppen. Klingen Helmut), Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. IIa, 1956, № 8, 175—185 (нем.)

Модулярной группой $M_n(k)$, где k — конечное расширение поля рациональных чисел P, называется совокупность всех перестановочных с матрицей $\left\| \begin{matrix} 0E_n \\ -E_n 0 \end{matrix} \right\|$ матриц порядка $2n$, элементы которых являются целыми элементами поля k. Доказано, что матрицы

$$\left\| \begin{matrix} u_\nu & 0 \\ 0 & u_\nu'^{-1} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} E_n & v_\mu e_{nn} \\ 0 & E_n \end{matrix} \right\|, \quad \nu = 1, \ldots, r \quad \mu = 1, \ldots, s$$

$$\left\| \begin{matrix} E_n + (\alpha_i - 1) e_{nn} & \beta_i e_{nn} \\ \gamma_i e_{nn} & E_n + (\delta_i - 1) e_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad i = 1, \ldots, t,$$

где $u_1, \ldots, u_r$ — система образующих унимодулярной группы степени n над k, $a_i = \left\| \begin{matrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{matrix} \right\|$, $i = 1, \ldots, t$ — система образующих группы $M_1(k)$ и $v_1, \ldots, v_s$ — базис группы целых чисел поля k, составляют систему образующих группы $M_n(k)$.

Найдена также аналогичная система образующих эрмитовой модулярной группы Д. А. Супруненко

5367. О непрерывных дважды транзитивных группах; исправления и дополнения. Титс (Sur les groupes doublement transitifs continus: correction et compléments. Tits J.), Comment. math. helv., 1956, 30, № 3, 234—240 (франц.).

Исправления к работе автора (Comment. math. helv., 1952, 26, 203—224). М. И. Граев

5368. О бесконечных непрерывных группах. I. Основы теории; подгруппы. Лаугвиц (Über unendliche kontinuierliche Gruppen. I Grundlagen der Theorie; Untergruppen. Laugwitz Detlef), Math. Ann., 1955, 130, № 4, 337—350 (нем.)

Рассматриваются так называемые B-группы, т. е. локальные топологические группы, обладающие окрестностью единицы, гомеоморфной некоторой окрестности нуля банахова пространства B. По аналогии с конечными группами Ли дается определение дифференцируемой (аналитической) B-группы, а также некоторых других понятий (однопараметрической подгруппы, канонических координат и т. д.). Изучаются подгруппы локальных дифференцируемых B-групп; формулируется необходимое и достаточное условие, при котором связная замкнутая подгруппа является локальной дифференцируемой группой. Доказывается, что связная локально-компактная подгруппа и центр локальной дифференцируемой (аналитической) B-группы являются локальными дифференцируемыми (аналитическими) B'-группами, где B' — некоторое линейное подпространство пространства B. В качестве приложения устанавливается, что группа вещественной банаховой алгебры B (т. е. совокупность всех элементов алгебры, обладающих обратным элементом) является аналитической B-группой.

М. И. Граев

5369. Об одном классе локально компактных нульмерных топологических групп. Виленкин Н. Я., Матем. сб., 1956, 40, № 4, 479—496

Указывается способ объединения известной ульмовской конструкции для нульмерных локально компактных абелевых групп с конструкцией, двойственной ей в смысле теории характеров. Выделяется класс групп, для которого полученные с помощью подобной конструкции обобщенные (двухиндексные) ульмовские факторы разлагаются в прямые суммы (с отмеченными подгруппами) нульмерных локально компактных групп ранга 1. Этот класс включает в себя как вполне правильно расслоенные группы с условиями сервантности, изученные в более ранних работах автора (Матем. сб., 1951, 28, 503—536; 29, 13—62), так и двойственные им группы. Высказывается предположение, что для групп этого класса могут быть доказаны теоремы существования и единственности, аналогичные известным теоремам Ульма и Цыпина. В. М. Глушков

5370. Автоморфизмы мультипликативных полугрупп матричных алгебр. Глускин Л. М., Успехи матем. наук., 1956, 11, № 1, 199—206

Описываются все автоморфизмы мультипликативной полугруппы $\mathfrak{A}_M$ кольца $\mathfrak{A}$, порожденного некоторым множеством матричных единиц E_{ik} в кольце $\mathfrak{M}_n(K)$ всех квадратных матриц порядка n с элементами из евклидова кольца K; предполагается, что в кольце $\mathfrak{A}$ содержатся все матричные единицы вида E_{ii}. Множество чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ разбивается на классы: два числа i и k тогда и только тогда принадлежат к одному классу I_α, когда $E_{ik} \in \mathfrak{A}$ и $E_{ki} \in \mathfrak{A}$; без ограничения общности предполагается, что каждый класс состоит из последовательных чисел. В множестве Ω индексов классов I_α вводится отношение порядка: $\alpha > \beta$, если из $i \in I_\alpha$ и $k \in I_\beta$ следует, что $E_{ik} \in \mathfrak{A}$. Каждую матрицу $X = (x_{ik})$ можно разбить на блочные матрицы $X = X(X_{\alpha\beta})$; блок $X_{\alpha\beta}$ состоит из элементов x_{ik}, у которых $i \in I_\alpha$ и $k \in I_\beta$. Блок $X_{\alpha\beta}$ может быть лишь тогда отличен от нуля, когда $\alpha > \beta$. Если частично упорядоченное множество Ω разложимо в кардинальную сумму неразложимых частично упорядоченных множеств Ω_λ ($\lambda = 1, \ldots, k$), то кольцо $\mathfrak{A}$ разложимо в двустороннюю прямую сумму прямо неразложимых идеалов $\mathfrak{A}_\lambda$, состоящих из таких матриц $X = (X_{\alpha\beta})$, что $X_{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \notin \Omega_\lambda$ или $\beta \notin \Omega_\lambda$.

Рассматриваются следующие четыре типа автоморфизмов мультипликативной полугруппы $\mathfrak{A}_M$ кольца $\mathfrak{A}$:

1) $\varphi_c(X)=C^{-1}XC$, где C — обратимая матрица из $\mathfrak{A}$.

2) $\varphi_\psi(x_{ik})=(\psi_\lambda x_{ik})$ $(E_{ik}\in\mathfrak{A}_\lambda)$, где ψ_λ $(\lambda=1, 2, \ldots, k)$ — автоморфизм кольца K, если $\mathfrak{A}_\lambda\not\approx K$, и автоморфизм мультипликативной полугруппы кольца K, если $\mathfrak{A}_\lambda\approx K$.

3) $\varphi_\varepsilon(X_{\alpha\beta})=(\varepsilon_{\alpha\beta}x_{\alpha\beta})$, где $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha>\beta$ — такие обратимые элементы $\varepsilon_{\alpha\beta}\in K$, что $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}=\varepsilon_{\alpha\gamma}$ для любых $\alpha>\beta>\gamma$.

4) $\varphi_{\bar s}(x_{\alpha\beta})=(x_{\bar s\alpha\,\bar s\beta})$, где $\bar s$ — такая подстановка степени n, что для любого $\alpha\in\Omega$ существует такое $\beta\in\Omega$, что из i, $k\in I_\alpha$, $i>k$ следует $\bar s_i$, $\bar s_k\in I_\beta$ и $\bar s_i>\bar s_k$.

Основная теорема. Произвольный автоморфизм φ полугруппы $\mathfrak{A}_M$ можно представить в виде композиции $\varphi=\varphi_c\varphi_{\bar s}\varphi_\varepsilon\varphi_\psi$.

Эта теорема является обобщением одного результата Халезова (РЖМат, 1956, 238). Так как отображения 1), 3), 4) и отображение 2) в случае, когда все ψ_λ являются автоморфизмами кольца K являются автоморфизмами кольца $\mathfrak{A}$, то из основной теоремы следует, в частности, что если кольцо $\mathfrak{A}$ не содержит одномерного прямого слагаемого, то каждый автоморфизм мультипликативной полугруппы $\mathfrak{A}_M$ будет автоморфизмом кольца $\mathfrak{A}$.

Автор отмечает, что основная теорема остается справедливой и для мультипликативной полугруппы $\mathfrak{A}_M^r$ всех матриц кольца $\mathfrak{A}$, имеющих ранг $\leqslant r$.

Е. Г. Шульгейфер

5371. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. Судзуки (Suzuki Michio). Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Ergebn. Math., 1956, № 10, 96 S.) (англ.)

Монография, посвященная изучению структуры подгрупп группы и вопросу, в какой мере свойства этой структуры отражаются на свойствах самой группы. Несмотря на то, что эта проблематика возникла сравнительно недавно — в основном в течение последних 20 лет —, монография показывает, что за короткий срок образовалась большая теория с отчасти законченными результатами. В книге не отражены в достаточной мере связи теорий прямых произведений и теории нормальных рядов с теорией структур (Р. Бэр, В. Коржинек, А. Г. Курош, О. Оре, А. И. Узков и др.); в остальном же книга хорошо освещает современное состояние теории.

В гл. 1 изучается вопрос: что можно сказать о свойствах групп, структуры подгрупп которых удовлетворяют тем или иным условиям. Здесь доказывается теорема О. Оре, устанавливающая строение групп с дистрибутивной структурой подгрупп (Курош А. Г., Теория групп, 1940, изд. 1-е, стр. 328), а также следующая теорема автора: структура $L(G)$ подгрупп группы G тогда и только тогда является прямым произведением структур L_λ, когда группа G является прямым произведением таких подгрупп G_λ, что $L(G_\lambda)\cong L_\lambda$, все подгруппы G_λ периодичны и порядки элементов групп G_μ и G_λ, $\lambda\neq\mu$, взаимно просты. Далее излагаются результаты Ивасава (J. Univ. Tokio, 1941, 4-3, 171-199) относительно влияния выполнения модулярного тождества в структуре $L(G)$ на строение группы G. Пара подгрупп (U, V) группы G называется модулярной, если для всех подгрупп $W\supseteq U$ выполняется модулярное тождество $(U\cup V)\cap W=U\cup(V\cap W)$. Модулярную пару образуют, например, перестановочные подгруппы U и V. Если группа G конечна, то любая модулярная пара тогда и только тогда состоит из перестановочных подгрупп, когда группа G нильпотентна. Подгруппа $N\subset G$ называется квазинормальным делителем, если она перестановочна со всеми подгруппами; группа G называется квазигамильтоновой, если любая ее подгруппа является квазинормальным делителем. Оказывается, что конечная группа тогда и только тогда квазигамильтонова, когда она нильпотентна и структура подгрупп любой ее подгруппы Силова дедекиндова. Далее доказывается, что в конечной подгруппе тогда и только тогда выполняется условие Жордана—Дедекинда, когда группа обладает главным рядом с примарными факторами (вопрос о существовании бесконечных групп, удовлетворяющих условию Жордана—Дедекинда, остается открытым). Подробно излагаются результаты Ивасова (Ивасова, Japan. J. Math., 1943, 18, 709-728) о строении групп с дедекиндовой структурой подгрупп. В этой же главе сообщаются некоторые результаты о строении групп, структура подгрупп которых является структурой с дополнением (Hall. P., J. London Math. Soc., 1937, 12, 201-204; Zacher G., Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1953, 22, 111—122), а также о строении групп с полудедекиндовой структурой подгрупп (Jones, Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, Sato H., Osaka Math. J. 1949, 1, 135-149).

В гл. 2 изучаются структурные изоморфизмы групп, а также рассматривается вопрос, в какой мере абстрактная группа G определяется структурой $L(G)$ своих подгрупп. Как показал Л. Е. Садовский (Докл. АН СССР, 1941, 32, 171—174), при изучении последнего вопроса можно в основном ограничиться случаем групп с конечным числом образующих. Глава начинается с изложения результатов Р. Бэра (Amer. J. Math., 1939, 61, 1—44) о структурных изоморфизмах абелевых групп; затем излагается теорема Л. Е. Садовского о том, что для локально свободных групп всякий структурный изоморфизм однозначно определяется групповым изоморфизмом, и условия Джонса (Duke Math. J., 1945, 12, 541—560), необходимые и достаточные для того, чтобы две конечные группы были структурно изоморфны. Для групп с дедекиндовой структурой подгрупп доказывается теорема Бэра (Amer J. Math., 1944, 66, 341—404) о том, что любая локально конечная не гамильтонова p-группа, обладающая дедекиндовой структурой подгрупп структурно изоморфна абелевой группе, причем структурный изоморфизм индуцируется некоторым скрещенным изоморфизмом. Далее излагаются результаты автора (Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, 345—371) относительно структурных изоморфизмов конечных групп, сохраняющих индексы. Доказывается теорема, характеризующая широкий класс конечных групп, для которых всякий структурный изоморфизм сохраняет индексы. Из этой теоремы выводится ряд важных следствий относительно структурных изоморфизмов конечных групп, как, например, следующие: всякий структурный изоморфизм отображает конечную разрешимую группу на разрешимую, совершенную группу — на совершенную; порядки двух структурно изоморфных конечных групп делятся на одинаковое число простых чисел и т. д.

В заключение доказывается, что любой структурный автоморфизм конечной группы без центра индуцируется не более чем одним групповым автоморфизмом, а также, что группа H, структурно изоморфная конечной простой неабелевой группе G, также является неабелевой простой группой и ее порядок равен порядку группы G. Две конечные простые группы G и H тогда и только тогда изоморфны, когда структурно изоморфны группы $G\times G$ и $H\times H$.

Гл. 3 посвящена гомоморфизмам (в основном, полным) структур подгрупп. Излагаются результаты Уайтмэна, Цаппа и автора о строении группа G, для которых структуры $L(G)$ обладают полными гомоморфизмами на структуры подгрупп циклических групп. Например, структура $L(G)$ тогда и только тогда обладает полным гомоморфизмом на структуру подгрупп бесконечной циклической группы, когда группа G является абелевой группой без кручения ранга 1. Пусть φ — гомоморфизм структуры $L(G)$ подгрупп группы G на некоторую структуру L и пусть I, 0 — соответственно наибольший и наименьший элементы структуры L. Пересечение всех подгрупп U группы G, для которых $\varphi(U)=I$, называется верхним ядром гомоморфизма; а объединение всех подгрупп $V \subset G$, для которых $\varphi(V)=0$ — его нижним ядром; как верхнее, так и нижнее ядро является нормальным делителем группы G. Для нетривиального гомоморфизма φ нижнее ядро состоит из элементов конечного порядка; а если группа G не периодична, то нижнее ядро содержит только единицу группы G. Для любой подгруппы H группы G отображение φ, определенное формулой $\varphi(U)=U \cup H$, отображает структуру $L(G)$ на интервал G/H и сохраняет операцию объединения. Подробно излагаются результаты Цаппа (Giorn. mat. Battaglini, 1949, 78, № 4, 182—192), Хигмана (Proc. Amer. Math. Soc. 1951, 2, 467-478) и Сато (Osaka Math. J., 1952, 4, 229-234) об условиях, необходимых и достаточных для того, чтобы отображение φ сохраняло также и пересечения, т. е было гомоморфизмом структур. В заключение рассматриваются неполные гомоморфизмы, а также отображения, сохраняющие только операцию пересечения или только операцию объединения.

В последней главе рассматриваются дуальные изоморфизмы между структурами подгрупп, а также дуальные структурные автоморфизмы. Группа H называется дуальной к группе G, если структуры $L(G)$ и $L(H)$ дуально изоморфны. Излагается результат Р. Бэра (Duke Math. J., 1939, 5, 824-838) о том, что абелева группа тогда и только тогда обладает дуальной группой, когда она периодична и все ее примарные компоненты конечны, а также результат автора о том, что нильпотентная группа тогда и только тогда обладает дуальной группой, когда она периодична, все ее примарные компоненты конечны, а примарная компонента для $p=2$ не является гамильтоновой 2-группой. Аналогичные результаты доказываются и для конечных разрешимых групп. Л. А. Калужнин

5372 К. Введение в теорию групп. Александров (Wstęp do teotii grup. Aleksandrov Pavel Sergeevič. Z ros. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 153, 1 nlb. s., il., 4. 70 zł), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 25, 371 (польск.)

5373 К. Теория групп. Шпехт (Gruppentheorie. Specht Wilhelm. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1956, VII, 457 S., 69. 60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 31, 2200 (нем.)

5374 К. Топологические группы. Понтрягин (Grupuri topologice. Ed. 2-a rev. si compl. Vol. 2. Pontreaghin L. S. Inst. studii rom. — sov. Acad. R. P. R., Bucuresti, 1956, p. 367—675, 20 lei), Bul. bibliogr., 1956, A, № 19, 734 (рум.)

5375 К. Алгебра. Бурбаки, Сент-Лагю (Algèbre. Bourrée André, Sainte-Laguë André. Paris, Foucher, 1954, 257 p., ill.), Bibliogr. France, 1957, 146, № 25, 582 (франц.)

5376 Д. О метабелевых p-группах степени p. Спринг (On metabelian p-groups of exponent p. Spring Ray Frederick. — Doct. diss., Univ. Illinois, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 10, 1868 (англ.)

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

5377. О p-расширениях. Шафаревич (On p-extensions. Šafarevič I. R.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 4, 59—72 (англ.)
Перевод из Матем. сб., 1947, 20 (62), 351—363

5378. Основные понятия теории структур. Кришанич (Osnovni pojmi teorije mrež. Krišanič France), Obz. mat. in fiz., 1956, 5, № 2, 49—57 (словенск.)

5379. О построении полей с данной группой Галуа порядка l^a. Шафаревич (On the construction on fields with a given Galois group of order l^a. Šafarevič I. R.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 4, 107—142 (англ.)
Перевод из Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, 261—296 (РЖМат, 1956, 244).

5380. О задаче погружения полей. Шафаревич (On the problem of imbedding fields. Šafarevič I. R.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, 4, 151—183 (англ.)
Перевод из Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, 389—418 (РЖМат, 1956, 243).

5381. Об одном предположении Крулля из теории оценок. Рибенбойм (Sur une conjecture de Krull en théorie de valuations. Ribenboim P.), Nagoya Math J., 1955, 9, oct., 87—97 (франц.)

Пусть A — область целостности с единицей и K — ее поле частных. Элемент $x \in K$ называется почти целым над A, если существует такой отличный от нуля элемент $a \in K$, что $ax^n \in A$ для любого целого положительного числа n. Область целостности A называется вполне целозамкнутой, если она содержит все элементы, почти целые над A, и примарной, если она обладает единственным максимальным простым идеалом F. Автор рассматривает примарную и вполне целозамкнутую область целостности A, максимальный идеал которой является объединением строго возрастающей последовательности At_r главных идеалов. Для любых элементов $a \in K$ и $t \in F$ через $m_t(a)$ обозначается наибольшее целое число m, для которого $Aa \subseteq At^m$, через $n_t(a)$ — наименьшее целое число n, для которого $At^n \subseteq Aa$, через $\mu_t(a)$ — верхняя грань всех рациональных чисел m/n, для которых $Aa^n \subseteq At^m$, через $\nu_t(a)$ — нижняя грань всех рациональных чисел m/n, для которых $At^m \subseteq Aa^n$, через $M(r)$ — число $m_{t_r}(t_1) \dots m_{t_r}(t_{r-1})$ и через $N(r)$ — число $n_{t_r}(t_1) \dots n_{t_r}(t_{r-1})$.

Доказано, что если $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_{t_r}(a)}{\nu_{t_r}(a)} = 1$ (условие B)) или если $\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{N(r)} = 1$ (условие C)) и для любого r из $a, b \notin At_{r+1}$ следует, что $ab \notin At_r$ (условие D)), то область целостности A является кольцом (нетривиальной действительной) оценки, определенной в поле K (т. е. является отличным от K максимальным подкольцом поля K). Из условий (C) и (D) следует, кроме того, что область целостности A содержится в кольце (действительной, т. е. ранга 1) оценки, содержащем все кольца оценок (произвольного ранга), содержащие область A. Условие (D) означает, что последовательность главных идеалов At_r определяет в кольце A топологию, относительно которой умножение главных идеалов непрерывно. На примере показано, что это условие опустить нельзя.
А. Х. Лившиц

5382. К заметке Нагата о проблеме Крулля. Рибенбойм (Sur une note de Nagata relative à un

problème de Krull. Ribenboim P.), Math. Z., 1956, **64**, № 2, 159—168 (франц.)

Пусть K — алгебраически замкнутое поле, w — оценка поля K, значениями которой являются рациональные числа, и α, β — такие иррациональные числа, что $0<\alpha<\beta$. Тогда для любого элемента $e\in K$ и любого действительного числа $\lambda\geqslant 0$ формула $w_{e,\lambda}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i (x+e)^i\right)=\min\{w(a_i)+i\lambda\}$ определяет некоторую оценку поля рациональных функций $K(x)$. Пересечение A всех колец оценок $w_{e,\lambda}$, для которых $w(e)>\alpha$, $\alpha<\lambda<\beta$, где λ — рациональное число, не будучи кольцом оценки, является примарной вполне целозамкнутой областью целостности, в которой существует такая строго возрастающая последовательность главных идеалов At_r, что объединением этих идеалов является единственный максимальный простой идеал кольца A, и каждый идеал этой последовательности является степенью следующего идеала. Однако свойством (D) (реф. 5381) эта последовательность не обладает.

Приводится также пример примарного и вполне целозамкнутого кольца A^0, являющегося пересечением дискретных колец оценок, но также не являющегося кольцом оценки. А. Х. Лившиц

5383. Одна теорема о примарных и вполне целозамкнутых кольцах. Рибенбойм (Un théorème sur les anneaux primaires et complètement intégralement clos. Ribenboim P.), Math. Ann., 1956, **130**, № 5, 399—404 (франц.)

Пусть K — поле частных примарной вполне целозамкнутой области целостности A с максимальным простым идеалом F (реф. 5381). Если для некоторого отличного от нуля элемента $t\in F$ существует такой элемент $a\in K$, что $\mu_t(a)=\nu_t(a)$, то идеал Aa обозначается через $(At)^s$, где $s=\mu_t(a)$. Доказано, что если в области целостности A существует строго возрастающая последовательность главных идеалов At_r, для которой $F=\bigcup_{r\geqslant 1} At_r$, удовлетворяющая условию (D) (реф. 5381) и следующему условию (I): для любого $r>1$ существует такое положительное число $s(r)$, что $At_{r-1}=(At_r)^{s(r)}$, то A является кольцом оценки и существует кольцо оценки ранга 1, содержащее все кольца оценок поля K (произвольного ранга), в которых содержится кольцо A.

А. Х. Лившиц

5384. Замечание к одной работе Самюэля. Мули (A note on a paper of P. Samuel. Muhly H. T.), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 576—577 (англ.)

Идеалы A и B нетерова кольца R называются асимптотически эквивалентными в смысле Самюэля, если $A^{n+0(n)}\subseteq B^n\subseteq A^{n-0(n)}$ для всех $n\geqslant 0$. Доказывается, что если кольцо R является областью целостности, то идеал, максимальный среди всех идеалов, асимптотически эквивалентных данному идеалу A, совпадает с идеалом, состоящим из всех элементов кольца R целых относительно идеала A, а также совпадает с идеалом, состоящим из таких элементов $x\in R$, что для любой R-оценки v_α поля частных области целостности R в идеале A найдется элемент y, для которого $v_\alpha(x)\geqslant v_\alpha(y)$. Е. Г. Шульгейфер

5385. Радикалы колец многочленов. Амицур (Radicals of polynomial rings. Amitsur S. A.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 3, 355—361 (англ.)

Пусть π — произвольное RZ-свойство ассоциативных колец (РЖМат, 1955, 5654). Доказано, что если ассоциативное кольцо R является алгеброй над бесконечным полем, или имеет характеристику нуль, или, наконец, если для любого простого p

$$\pi(R_p[x])\cap R_p[x^p-x]\subseteq\pi(R_p[x^p-x]),$$

где R_p — множество всех элементов кольца R, имеющих характеристику p, то $\pi(R[x])=p[x]$, где $p=\pi(R[x])\cap R$. Если, кроме того, кольцо многочленов над любым π-радикальным кольцом π-радикально, то $\pi(R[x])=\pi(R)[x]$.

В частности, для любого ассоциативного кольца R радикал Бэра кольца $R[x]$ является кольцом многочленов над радикалом Бэра кольца R. Аналогично, радикал Джекобсона $J(R[x])$ кольца $R[x]$ является кольцом многочленов над кольцом $N=J(R[x])\cap R$. Кольцо N является нильидеалом кольца R, содержащим радикал Левицкого. Если кольцо R удовлетворяет полиноминальному тождеству (Levitzki J., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 331—333), или является алгеброй над несчетным полем, то N является максимальным нильидеалом. Автор предполагает, что N всегда является максимальным нильидеалом. Это предположение без труда можно было бы доказать в случае положительного ответа на открытый пока вопрос о совпадении радикалов Левицкого и Кётэ.

А. Ф. Сулиньский

5386. О максимальных коммутативных подалгебрах полной линейной алгебры. Супруненко Д. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 3, 181—184

Строится бесконечное множество неизоморфных нильпотентных коммутативных алгебр третьего класса шестого ранга над произвольным алгебраически замкнутым полем P характеристики 0. В качестве следствий этого результата доказывается что: 1) для любого $r>5$ под полем P существует бесконечное множество неизоморфных нильпотентных коммутативных алгебр класса 3 и ранга r; 2) если $n>6$, то множество всех неизоморфных максимальных нильпотентных коммутативных подалгебр класса 3 полной матричной алгебры P_n бесконечно; 3) если $n>6$, то полная линейная группа $GL(n, P)$ обладает бесконечным множеством не сопряженных между собой $GL(n, P)$ максимальных коммутативных подгрупп.

Е. Г. Шульгейфер

5387. Доказательство гипотезы Капланского. Широков Ф. В., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 167—168

Доказывается, что в полном ассоциативном нормированном кольце коммутатор $c=ab-ba$, если он перестановочен с a или с b, квазинильпотентен (т. е. $\lim \sqrt[n]{\|c^n\|}=0$). Г. Е. Шилов

5388. Заметка о ядрах алгебр Ли характеристики p. Хохшилд (Note on Lie algebra kernels in characteristic p. Hochschild G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 551—557 (англ.)

Для конечномерных алгебр Ли над полем характеристики $p\neq 0$ доказано, что любое препятствие конечномерного К-ядра уничтожаемо (РЖМат, 1956, 7202).

А. Л. Онищик

5389. Алгебраическое доказательство формулы Хаусдорфа. Картье (Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff. Cartier P.), Bull. Soc. math. France, 1956, 84, № 3, 241—249 (франц.)

Дается прямое доказательство известного утверждения Хаусдорфа о том, что если $e^x=e^xe^y$, то z представляется в виде ряда с элементами, являющимися однородными многочленами Ли от (некоммутативных) переменных x и y. Попутно передоказываются некоторые другие известные результаты.

А. И. Ширшов

5390. Точное представление произвольного кольца Ли. Витт (Treue Darstellungen beliebiger Liescher Ringe. Witt Ernst). Collectanea Math., 1953, 6, 107—114 (нем.)

Соответствующим образом изменяя известные методы, с помощью которых доказывалась независимость стандартных одночленов в универсальной ассоциативной алгебре алгебры Ли, автор доказывает, что естественное отображение кольца Ли L в его универсальное ассоциативное кольцо является точным. Техническая задача, вытекающая из отсутствия базиса в L, решается использованием в аддитивной группе L подходящей подгруппы, являющейся прямой суммой циклических групп. Для случая, когда L — кольцо Ли с коммутативной областью операторов Ω, указываются достаточные условия для Ω, при которых применим этот метод доказательства. В последнем замечании цитируется пример, показывающий, что некоторое ограничение на Ω существенно для существования точного отображения. W. G. Lister

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 5

5391. Замечание о тензорном произведении модулей. Хилтон (Remark on the tensor product of modules. Hilton P. J.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1956, Cl. 3, 4, № 6, 325—328 (англ.); Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, 4, № 6, 317—320

Модуль (унитарный) A над кольцом Λ с единицей называется локально проективным, если каждый его подмодуль с конечным числом образующих проективен.

Говорят, что (правый) модуль A «имеет свойство (P)», если любой мономорфизм $i: B \to C$ (левых) модулей индуцирует мономорфизм $A \otimes B \to A \otimes C$. Как легко видеть (что впервые заметил Иокеда), любой проективный модуль обладает свойством (P). Оказывается, что свойством (P) обладает и любой локально проективный модуль. Соответствующие примеры показывают, что существуют проективные, но не локально проективные модули, а также модули, обладающие свойством (P), но не проективные и не локально проективные. Однако, если кольцо Λ является кольцом без делителей нуля, в котором каждый правый и левый идеал является главным, то Λ-модуль A обладает свойством (P) тогда и только тогда, когда он локально свободен.

В заключение показано, что утверждение упр. Е 6 на стр. 159 книги Эйленберга и Стинрода (S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952) ошибочно.

J. W. Jaworowski

5392. Строение альтернативных и йордановых двойных модулей. Джейкобсон (Structure of alternative and Jordan bimodules. Jacobson N.), Osaka Math. J., 1954, 6, № 1, 1—71 (англ.)

Линейное пространство $\mathfrak{M}$ над полем Φ называется двойным модулем над некоторой Φ-алгеброй A, если для любых элементов $a \in A$ и $m \in \mathfrak{M}$ определены билинейные произведения am, $ma \in \mathfrak{M}$. Для любого двойного модуля линейное пространство $G = A + \mathfrak{M}$ естественным образом является алгеброй (произведение любых элементов из M считается равным нулю). Если алгебра G удовлетворяет некоторой системе Σ полилинейных тождеств, то $\mathfrak{M}$ называется Σ-двойным модулем. В соответствии с этим определением можно говорить о двойных модулях ассоциативных, альтернативных, лиевых, йордановых и т. п.

В первую очередь автор описывает унитарные альтернативные двойные модули над матричными алгебрами D_n, где D — ассоциативная алгебра с единицей. Оказывается, что для $n \geqslant 3$ все такие модули ассоциативны. Примером неассоциативного альтернативного двойного модуля над алгеброй Φ_2 является аддитивная группа $\mathfrak{M}$ алгебры Φ_2, определенная как двойной модуль над Φ_2 посредством формул $am = a_\circ m$, $ma = (\mathrm{tr}\,(a)\,\varepsilon - a)_\circ m$, $a \in \Phi_2$, $m \in \mathfrak{M}$, где ε — единица алгебры Φ_2, $a_\circ$ — умножение в Φ_2. Этот двойной модуль называется двойным модулем Кели. Оказывается, что любой унитарный альтернативный двойной модуль над Φ_2 является прямой суммой ассоциативных двойных модулей и двойных модулей Кели.

Пусть теперь алгебра D обладает инволюцией $d \to \bar{d}$. Тогда формула $(\Sigma d_{ij} e_{ij})^* = \Sigma \bar{d}_{ij} e_{ji}$ определяет некоторую инволюцию и в матричной алгебре D_n. Подалгебра алгебры D_n относительно операции $ab + ba$ называется самосопряженной, если для любого ее элемента h имеет место соотношение $h^* = h$. Оказывается, что при $h \geqslant 3$ любому унитарному йорданову двойному модулю над произвольной самосопряженной подалгеброй алгебры D_n взаимно однозначно соответствует некоторый унитарный альтернативный двойной модуль над алгеброй D. Этот результат можно рассматривать как описание унитарных йордановых двойных модулей.

Для случая алгебр конечного ранга в работе получены следующие результаты, часть которых имеет окончательный характер.

Любой альтернативный (йорданов) двойной модуль над алгеброй Кели (не специальной J-алгеброй) C разлагается в прямую сумму подмодуля, аннулируемого алгеброй C, и подмодулей, изоморфных алгебре C. Альтернативный двойной модуль над центральной простой ассоциативной алгеброй ранга n^2 вполне приводим. Если $n \neq 2$, то все неприводимые двойные модули ассоциативны и существует три типа таких модулей. При $n = 2$, кроме того, появляется двойной модуль Кэли. Пусть теперь F — ассоциативная свободная алгебра с единицей над пространством некоторой йордановой алгебры J с единицей 1, I — идеал алгебры F, порожденный всеми элементами вида $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 + a_3 \otimes a_2 \otimes a_1 + a_1 a_3 a_2 - a_1 \otimes a_2 a_3 - a_2 \otimes a_1 a_3 - a_3 \otimes a_1 a_2$, $a_1 \otimes a_2 a_3 + a_2 \otimes a_1 a_3 + a_3 \otimes a_1 a_2 - a_2 a_3 \otimes a_1 - a_1 a_3 \otimes a_2 - a_1 a_2 \otimes a_3$ (знаком $\otimes$ обозначается умножение в алгебре F), I_s — идеал алгебры F, порожденный всеми элементами вида $a \otimes b + b \otimes a - ab$, I_1 — идеал алгебры F, порожденный всеми элементами вида $a \otimes 1 - a$ и $1 \otimes a - a$ и $U(J) = F/I$, $U_s(J) = F/I_s$, $U_1(J) = F/I_1$. Оказывается, что $U(J) = U_s(J) + U_1(J)$.

Если J — специальная простая J-алгебра, максимальное число ортогональных идемпотентов которой конечно и больше двух, то алгебра $U(J)$ полупроста и относится к одному из следующих типов:

Тип	Размерности простых компонентов	Размерность алгебры U
A_{I}	n^2, n^2, n^4, $n^2(n-1)^2/4$, $n^2(n-1)^2/4$, $n^2(n+1)^2/4$, $n^2(n+1)^2/4$	$n^2(2n^2+3)$
A_{II}	$2n^2$, n^4, $n^2(n-1)^2/2$, $n^2(n-1)^2/2$	$n^2(2n^2+3)$
B	n^2, $n^2(n-1)^2/4$, $n^2(n+1)^2/4$	$n^2(n^2+3)/2$
C, $n>3$	$4n^2$, $n^2(2n-1)^2$, $n^2(2n+1)^2$	$2n^2(4n^2+3)$
C, $n=3$	36, 225, 441, 36	738

Если $J = R + \Phi e$, где R — конечномерное линейное пространство, в котором определено симметрическое (вообще говоря, вырожденное) скалярное произведение $(x, y) \in \Phi$, причем

$$(r_1 + \lambda_1 e)(r_2 + \lambda_2 e) = \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1 + ((r_1, r_2) + \lambda_1 \lambda_2) e,$$
$$r_1, r_2 \in R, \lambda_1, \lambda_2 \in R,$$

то алгебра $u_s(J)$ называется алгеброй Клиффорда, а алгебра $u_1(J)$ — алгеброй мезона. Строение этих алгебр полностью описывается.

Отметим еще следующий результат: если в двойном модуле $\mathfrak{M}$ над йордановой алгеброй J выполнены соотношения $m(ab)=(ma)\,b+(mb)\,a$, $(ab)\,m=a\,(bm)+b\,(am)$, $(am)\,b=a\,(mb)$, то относительно умножения $m\circ p=ma+am$ двойной модуль $\mathfrak{M}$ является йордановым модулем над алгеброй J. Йорданов модуль тогда и только тогда изоморфен подмодулю модуля такого типа, когда построенная для него алгебра G (напомним, что J-алгебры коммутативны) является специальной J-алгеброй.

Л. А. Скорняков

5393. О теореме Жордана—Гёльдера—Шрейера. Фудзивара, Мурата (On the Jordan—Hölder—Schreier theorem. Fujiwara Tsuyoshi, Murata Kentaro), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 151—153 (англ.)

Доказывается, что теорема Жордана—Гёльдера—Шрейера справедлива для «модулярных элементов» произвольной структуры. Элемент a называется модулярным, если

$$\text{из } x\geqslant a \text{ следует } (x\cap y)\cup a=x\cap(y\cup a)$$

и

$$\text{из } x\geqslant y \text{ следует } (x\cap a)\cup y=x\cap(a\cup y).$$

(Относящиеся к рассматриваемому вопросу определения и литературу см. в книге Биркгофа Г. «Теория структур», Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 131—133).

G. Birkhoff

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 848.

5394. О неразложимых в объединение элементах и об аддитивных базисах в структуре. Космак, Коутский, Новотный (Über additiv irreduzible Elemente und additive Basen im Verbande. Kosmák L., Koutský K., Novotný M.), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy univ., 1956, A13, B8, № 4, 165—175 (нем.; рез. чешск., русск.)

Элемент x структуры S с нулем называется m-неразложимым в объединение, где m — некоторая бесконечная мощность, если для любого непустого множества $M\subset S$ мощности меньшей m из $x=\underset{t\in M}{Vt}$ вытекает, что $x\in M$. Множество $B\subset S$ называется аддитивным m-базисом структуры S, если для любого элемента $x\in S$ существует такое непустое множество $B_x\subset B$ мощности, меньшей m, что $x=\underset{t\in B_x}{Vt}$. Оказывается, что элемент $x\in S$ тогда и только тогда m-неразложим в объединение, когда он является элементом любого аддитивного m-базиса. Структура S тогда и только тогда обладает единственным аддитивным m-базисом, когда любой ее элемент m-неразложим в объединение; в этом случае структура является упорядоченным множеством. Структура S тогда и только тогда обладает аддитивным m-базисом, содержащимся в любом другом аддитивном m-базисе, когда множество всех ее m-неразложимых элементов является аддитивным m-базисом. Имеются и другие результаты того же рода.

Е. И. Мочульский

5395. Медианы и промежуточность. Шолендер (Medians and betweenness. Sholander Marlow), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 801—807 (англ.)

Медианной полуструктурой называется множество S, замкнутое относительно тернарной операции (a, b, c), подчиненной двум тождествам:

(M) $(a, a, b)=a$.

(N) $((a, b, c), (a, b, d), e)=((c, d, e), a, b)$

Элемент (a, b, c) называется медианой элементов a, b и c. Говорят, что элемент x лежит между элементами a и b (в записи: axb), если $x=(a, x, b)$. Множество (a, b) всех элементов, лежащих между a и b, называется сегментом, определяемым элементами a и b. Оказывается, что $(a, b)=(b, a)$, $(a, a)=\{a\}$ и (P) для любых элементов a, b и c существует такой элемент d, что $(a, b)\cap(a, c)=(a, d)$; (Q) если $(a, b)\cap(a, c)=(a, b)$, то $(x, a)\cap(x, c)\subset(b, x)$ для любого x; (R) если $(a, b)\cap(a, c)=(a, a)$, то $(a, a)\cap(b, c)=\{a\}$. Если определить понятие сегмента аксиоматически как подмножества (a, b) множества S, определенного для всякой пары элементов из S и удовлетворяющего условиям (P, Q, R), то можно ввести понятие «лежать между», полагая, что b лежит между a и c тогда и только тогда, когда $b\in(a, c)$. Тогда оказывается, что (D_1) для любых элементов a, b и c существует такой элемент w, что $awb\cdot bwc\cdot cwa$; (B_1) из aba следует, что $a=b$; (I) из $abc\cdot abd\cdot cxd$ следует, что xba.

Тернарное отношение abc, обладающее свойствами (D_1, B_1, I), называется медианной промежуточностью. Оказывается, что предусмотренный в (D_1) элемент w определен однозначно и тернарная операция $w=(a, b, c)$ обладает свойствами (M), (N). Таким образом условия (M, N), (P, Q, R) и $(D_1, B_1 I)$ по существу равносильны. Далее автор рассматривает условия: (D) для любых элементов a, b, c существует единственный элемент w, для которого $awb\cdot bwc\cdot cwa$; (A) если abc, то cba; (B_2) $abc\cdot acb$ тогда и только тогда, когда $b=c$; (E) если $abc\cdot acd$, то dcb; (F) если $abc\cdot acd$, то dba; (G) если $abc\cdot adc\cdot bxd$, то cxa; (H) если $abc\cdot acd\cdot ade$, то edb; (J) если $abc\cdot bcd\cdot ade$, то ecb.

Изучаются различные комбинации этих постулатов, характеризующие медианные полуструктуры. В заключение указываются приложения к дистрибутивным структурам. Дальнейшее исследование медиан и промежуточностей в структурах см. РЖМат, 1956 2829.

Ю. И. Соркин

5396 Д. О некоторых классификациях систем отношений. Фраиссе (Sur quelques classifications des systèmes de relations. Fraïssé Roland. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris. Chartres, impr. de Durand, 1955, 156 p.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 22, 511 (франц.)

5397 Д. Некоторые вопросы общей теории радикалов. Сулиньский А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. МГУ, М., 1957

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

5398. Алгебраическая теория работы многотактных релейно-контактных схем. Мойсил (Teoria algebrică a funcționării schemelor cu contacte de relee în mai multi timpi. Moisil Gr. C.), Studii și cercetări mat., 1955, 6, № 1—2, 7—53 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются схемы, где состояние промежуточных элементов $x, y, \ldots, z$ и исполнительных элементов $u, \ldots, w$ в момент времени $N+1$ зависит от состояния приемных элементов $a, b, \ldots, c$

и промежуточных элементов в момент времени N:

$$\begin{cases} x_{N+1} = f(a_N, b_N, \ldots, c_N, x_N, y_N, \ldots, z_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{N+1} = g(a_N, b_N, \ldots, c_N, x_N, y_N, \ldots, z_N) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{N+1} = \varphi(a_N, b_N, \ldots, c_N, x_N, y_N, \ldots, z_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{N+1} = \psi(a_N, b_N, \ldots, c_N, x_N, y_N, \ldots, z_N) \end{cases}$$

Эти уравнения названы характеристическими. Если заданы условия работы промежуточных элементов, то на функции $f, \ldots, g$ накладываются условия

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \beta_1, \ \ldots, \ g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \beta_r,$$

где α_i, β_i — неопределенные параметры. Возможны случаи: 1) количество условий достаточно для определения $f, \ldots, g$ и тогда схема непосредственно реализуема; 2) число условий недостаточно для определения $f, \ldots g$ и тогда $f, \ldots, g$ представимы в виде $f = f(\alpha, \ldots, \gamma), \ \ldots, \ g = g(\delta, \ldots, \varepsilon)$, где $\alpha, \ldots, \gamma, \ldots, \delta, \ldots, \varepsilon$ выбираются произвольно (число схем равно числу возможных комбинаций значений $\alpha, \ldots, \gamma, \ldots, \delta, \ldots, \varepsilon$); 3) количество условий превосходит число неопределенных параметров в функциях $f, \ldots, g$, и тогда необходимо добавить по крайней мере еще один промежуточный элемент и проделать заново все вычисления. В заключение приводится классификация многотактных схем в зависимости от последовательности состояний, принимаемых схемой при воздействии на приемный элемент. Приводится 9 примеров синтеза многотактных схем. В. М. Остиану

5399. Сравнение целых чисел в теории автоматических механизмов. Мойсил (Congruenţele de numere întregi în teoria mecanismelor automate. Moisil Gr. C.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 2, 53—61 (рум.)

Теория функций над полем вычетов по модулю 2 применяется к синтезу релейно-контактных схем. Доказывается, что последовательное соединение контактов описывается функцией xy, а параллельное — функцией $xuy \equiv xy + x + y \pmod 2$. В качестве примера разобрана схема включения освещения из n точек. Функция $f(a_1, \ldots, a_n)$, описывающая эту схему, должна при любом i удовлетворять соотношению

$$f(a_1, \ldots, a_i + 1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + 1.$$

Доказывается, что над полем вычетов по модулю 2 существуют только две функции, удовлетворяющие этим соотношениям:

$$a_1 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad a_1 + \ldots + a_n + 1.$$

В. М. Остиану

5400. Об алгебраической теории многопозиционных элементов и ее применении к реальным элементам. Иоанин (Asupra teoriei algebrice a contactelor multipoziţionale şi aplicaţiile ei la studiul contactelor reale. Ioanin Gh.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 2, 231—240 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что многопозиционный элемент с контактами $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, для которых верны соотношения

$$c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n = 1,$$

$$c_i c_j = 0, \quad i \neq j,$$

можно заменить $n - 1$ двухпозиционными элементами по формулам

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \ldots \bar{a}_{n-1} \\ c_2 &= a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \ldots \bar{a}_{n-1} + \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3 \ldots \bar{a}_{n-1} + \ldots + \\ &\quad + \bar{a}_1 \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{n-2} a_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1} &= \bar{a}_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} + a_1 \bar{a}_2 a_3 \ldots a_{n-1} + \ldots + \\ &\quad + a_1 a_2 a_3 \ldots \bar{a}_{n-1} \\ c_n &= a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n-1}$ суть контакты двухпозиционных элементов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если элементы A_i включаются в порядке возрастания индексов, а отключаются в обратном порядке, то уравнения (1) заменяются уравнениями:

$$c_i = a_{i-1} \bar{a}_i \qquad \text{для} \quad i \neq 1 \ \text{и} \ i \neq n,$$

$$c_1 = \bar{a}_1 = \bar{a}_{n-1} \bar{a}_1,$$

$$c_n = a_{n-1} = a_{n-2} a_{n-1}.$$

Доказывается, что схема с трехпозиционной идеальной кнопкой

$$E = c_1 f + c_2 g + c_3 h$$

может быть приведена к схеме с двухпозиционными реальными кнопками

$$E = \bar{a}_1 f + a_1 \bar{a}_2 g + a_2 h,$$

где a_i — контакты двухпозиционных кнопок, c_i — контакты трехпозиционных кнопок. Исследуются частные случаи: 1) $h = 0$; 2) $f = 0$; 3) $g = h$; 4) $f = g$. Приводятся примеры. Сделанное утверждение обобщается на случай n-позиционных кнопок.

В. М. Остиану

5401. Синтез релейных схем. Свобода. (Synthesa reléovych sítí. Svoboda Antonín), Sbor. Českosl. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, **№ 2**, 157—208 (чешск.; рез. русск., англ.)

См. РЖМат, 1955, 4756.

Рассматриваются контактные многополюсники с n приемными реле, состояния которых нумеруются числами от 0 до $2^n - 1$ по двоичному коду. Ветвью многополюсника между данной парой узлов называется совокупность путей между этими узлами, не проходящих через остальные узлы. По определению ветвь, состоящая не более чем из одного контакта, обладает элементарной проводимостью (průchodnost). Проводимость ветви (ПВ) между узлами M и N обозначается через $|MN|$, проводимость схемы (ПС) между M и N — через MN. $|MN|$ задается множеством номеров состояний, при которых ветвь между M и N проводит, а MN — множеством номеров состояний, при которых между M и N существует проводимость. Действия со множествами номеров состояний (объединение, пересечение, дополнение) изоморфны операциям булевой алгебры. Множества номеров, описывающие элементарные проводимости, соответствуют булевым переменным. Приведена таблица для перехода от множества номеров к соответствующей булевой функции (в виде нормальной дизъюнктивной формы), и таблица множеств номеров для элементарных проводимостей (обе для 5 и менее реле). Частичная диаграмма проводимостей ветвей (ДПВ) есть фигура, где узлы изображены кружками, а ветви, проводящие в данном состоянии приемных элементов, изображены соединительными

линиями между кружками. Совокупность всех частичных ДПВ есть развернутая ДПВ. Аналогично определяются частичная и развернутая диаграммы проводимости схемы (ДПС). Предлагается методика анализа и синтеза контактных схем, основанная на представлении проводимостей с помощью диаграммы, множеств номеров и булевых функций. При анализе узлы выбираются так, чтобы все ПВ были элементарными. ПС между узлами можно найти, вычертив развернутую ДПС по развернутой ДПВ. Однако гораздо быстрее ПС находятся по ДПВ, в которой рядом с каждой ветвью записана ее проводимость. В этом случае проводимость пути из M в N есть теоретико-множественное пересечение ПВ, входящих в путь, а MN есть теоретико-множественное объединение проводимостей всех путей из M в N. Непосредственное разыскание номеров состояний, при которых проводит тот или иной путь, довольно длительно. Анализ схем облегчают, применяя «числовые косточки» (číselné kůstky) — полоски бумаги, на которых нанесены буквенное обозначение контакта (a, $\bar{a}$, b, $\bar{b}$ и т. д.) и множество номеров, описывающее соответствующую элементарную проводимость. «Косточки», сделанные для n реле, пригодны также для схем менее чем с n реле. При анализе из «числовых косточек» составляется модель ДП ветвей. При синтезе различают узлы главные (предписанные условиями работы) и вспомогательные (все прочие). Условия работы задаются матрицей ПС между главными узлами. Элементы матрицы суть либо булевы функции, либо множества номеров состояний. Обычно эти проводимости не являются элементарными. Синтез схемы делится на этапы: 1) выбор ПВ между главными узлами по заданной матрице ПС; 2) синтез ветвей; 3) окончательный синтез схемы. Подробно описан только 1-й этап. Условие совместимости заданных ПС гласит, что развернутая ДП должна содержать только многоугольники, снабженные всеми диагоналями. В матрице заданных ПС не все элементы обязательно предписываются условиями работы. Допустимая проводимость между узлами P и Q есть множество номеров состояний, при которых проводимость между P и Q можно выбрать произвольно, не нарушая ни одной предписанной проводимости. Учет допустимых проводимостей упрощает схему. Графически это делают так. По условиям работы чертится развернутая ДП схемы, где тонкими линиями изображаются предписанные непроводимости между главными узлами, толстыми — предписанные проводимости. В каждой частичной ДП чертятся также: 1) проводимости, вытекающие из предписанных проводимостей ввиду условия совместности, — толстыми линиями; 2) допустимые проводимости в возможно большем числе — толстыми перечеркнутыми линиями. Последние должны не совпадать с тонкими линиями и образовывать многоугольники, снабженные всеми диагоналями. Такой подбор допустимых проводимостей неоднозначен. Рекомендуется ограничиться одним вариантом и переходить к следующему лишь тогда, когда окончательная схема неудовлетворительна. Диаграмма, в которой предписанные и введенные указанным образом допустимые проводимости обозначены номерами, стоящими рядом с соединительными линиями, называется максимальной ДПС. При этом линии, соединяющие узлы, между которыми проводимость полностью предписана, чертятся сплошными, а прочие линии — штрихами. Алгебраизация максимальной ДП состоит в алгебраизации проводимостей диаграммы, заданных множествами номеров. С помощью алгебраизированной максимальной ДП выбираются ПВ синтезируемой схемы. Для этого служат два основных правила: 1) если ДП содержит контур $PQR \ldots SP$, в котором пересечение проводимостей между соседними узлами равно p, и если $x + p \equiv p$, где x — слагаемое проводимости PQ, то надо выбрать $|QR|, \ldots, |SP|$ так, чтобы $x + q \equiv q$, где q — пересечение множеств $|QR|, \ldots, |SP|$, и одновременно выбросить x из $|PQ|$; 2) если ДП содержит треугольник $MNPM$ и проводимость MN содержит слагаемое f, проводимость NP — слагаемое g, а $PM \equiv h$, причем $f + g + h \equiv f + g$ и проводимости MN и NP содержат слагаемые x, y, z, ..., для которых $x + h \equiv y + h \equiv z + h = \ldots = h$, то надо выбрать $|MN| \equiv f$, $|NP| \equiv g$, $|PM| = h$. Правило 2 распространимо на четырехугольник. Оно дает большее упрощение, чем правило 1, но применимо реже. В качестве примера выбираются проводимости в схеме с одним входом и 4 выходами, управляемой 5 реле и переводящей цифры 0, 1, ..., 9 из кода счетно-аналитических машин «Пауэрс» в двоичный код. Выбранные ПВ обычно не являются элементарными, так что необходимо синтезировать ветви по их проводимостям. Это делается в два приема: 1) обычными алгебраическими методами строятся параллельно-последовательные двухполюсники, реализующие выбранные проводимости; 2) эти двухполюсники упрощаются с помощью определения допустимых проводимостей между вспомогательными узлами и применения описанной выше методики выбора ПВ к ветвям между этими узлами. Вместо определения допустимых проводимостей между всеми парами узлов параллельно-последовательного двухполюсника с главными узлами R и S можно стараться упростить этот двухполюсник с помощью максимальных мостов. Максимальный мост $TU_{\text{макс}}$ есть проводимость между узлами T и U, содержащая максимум номеров состояний и не нарушающая проводимости RS. Если RS' — проводимость двухполюсника при $|TU| = 1$, то $TU_{\text{макс}} = RS + RS'$. Если этот мост не делает некоторые пути лишними, то его отбрасывают и строят мост между другой парой узлов. Построение мостов удобно вести на моделях схем из «числовых косточек». Синтез ветвей неоднозначен, и при выборе вариантов надо учитывать возможность сплетения ветвей друг с другом при окончательном синтезе. Стараются сосредоточить одинаковые или дополнительные контакты у одного и того же узла. Закончив выбор вариантов ветвей, переходят к окончательному синтезу схемы. Соединив построенными ветвями главные узлы, получают схему, где у всех ветвей проводимости являются элементарными. Эта схема упростима определением допустимых проводимостей и новым выбором ПВ. Однако проще строить максимальные мосты, особенно между вспомогательными узлами, стараясь присоединить к схеме как можно больше мостов с элементарными проводимостями. Затем чертится развернутая ДПВ и в каждой частичной ДП отыскиваются дублирующие друг друга пути. Из достаточности в каждом случае только одного пути вытекают условия для окончательного выбора ПВ, выразимые системой булевых уравнений. Сложные системы уравнений можно решать на машине. Библ. 4 назв.

Г. Н. Поваров

5402. О возможностях синтеза схем из разнообразных элементов. Л у п а н о в О. Б., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 4, 561—563

Результаты Шеннона (Shannon C. E., Bell. System Techn. J., 1949, 28, № 1, 59) при некоторых естественных предположениях обобщаются на схемы из произвольных элементов. В частности, приводятся оценки:

1) Для многотактных релейно-контактных схем, реализующих функции алгебры логики как функции проводимости, после перехода в устойчивое положение.

$$L_{\mathfrak{S}}(n) > \frac{1-\varepsilon}{n} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2^n}{n},$$

где $L_{\mathfrak{S}}(n)$ — число всех контактов.

2) Для электронных схем

$$L_{\mathfrak{S}}(n) > (1-\varepsilon)\frac{2^n}{n},$$

где $L_{\mathfrak{S}}(n)$ — число сеток.

3) Для схем из контактов и $e^{\psi(n)}$ сортов сопротивлений, реализующих монотонную функцию напряжения между некоторой парой узлов схемы,

$$L_{\mathfrak{S}}(n) > (1-\varepsilon)\,2^n/n,$$

где $L_{\mathfrak{S}}(n)$ — общее число контактов и сопротивлений.

Б. А. Трахтенброт

5403. Математическая проблематика структурной теории релейных схем. Гаврилов М. А., Поваров Г. Н., Рогинский В. Н., Шестаков В. И., Харкевич А. Д., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 150—151

См. также: 5405, 5406, 5556, 5577, 5814, 5830, 5864, 5865, 5867, 5869, 5872, 5873, 5911, 5912, 5916, 5917, 5921, 5922, 5961, 5962, 5967

ТОПОЛОГИЯ

5404. Размерность — топологический инвариант. Ломбардо-Радиче (La dimensione, invariante topologico. Lombardo-Radice Lucio), Archimede, 1955, 7, № 1, 1—9 (итал.)

Популярная статья, в которой автор после предварительных рассмотрений формулирует определение размерности с помощью покрытий и индуктивное определение размерности.

Примечание референта. Автор упоминает ряд имен в тексте статьи, кроме, однако, одного: создателя теории размерности — П. С. Урысона (его имя называется лишь в библиографическом списке). Из текста статьи может создаться впечатление, что урысоновское индуктивное определение размерности было дано Пуанкаре. В том месте, где автор говорит о двух определениях размерности для компактов, не упомянута центральная теорема Урысона о их совпадении.

В. Г. Болтянский

5405. Некоторые седловинные точки в $\lambda \otimes \overline{\lambda}$. Эллис (Some saddle-points in $\lambda \otimes \overline{\lambda}$. Ellis David), Publs mathemicae 1953, 3, № 1—2, 168—170 (франц.)

Пусть Γ — полная структура, p — некоторое свойство, Γ_p — множество элементов Γ, обладающих свойством p. Свойство p называется нижним (верхним), если $\Gamma_p \neq \varnothing$ и из $\alpha \in \Gamma_p$, $\beta \leqslant \alpha$ ($\beta \geqslant \alpha$), следует $\beta \in \Gamma_p$. $\alpha \in \Gamma$ называется седловинной точкой по отношению к нижнему свойству p и верхнему свойству q, если $\alpha \in \Gamma_p \cap \Gamma_q$, α максимально в Γ_p и минимально в Γ_q. Если $\Gamma_p \cap \Gamma_q \neq \varnothing$ и состоит лишь из седловинных точек, то p и q называются седловинно-точечными.

Топоструктурой λ бесконечного множества S называется множество всех T_1-топологий, определенных на S, с упорядочением: $\alpha \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда каждое множество, открытое в β, открыто и в α. Пусть $\overline{\lambda}$ — структура, двойственная к λ, $\lambda \otimes \overline{\lambda}$ — их кардинальное произведение и f — перестановка S. Скажем, что $(\sigma, \tau) \in \lambda \otimes \overline{\lambda}$ обладает свойством p или q, если $f(\sigma \to \tau)$ непрерывно или, соответственно, открыто. Доказывается, что так определенные свойства p и q являются седловинно-точечными в $\lambda \otimes \lambda$.

Г. Я. Арешкин

5406. О характеристике структуры топологий. Багли (On the characterization of the lattice of topologies. Bagley R. W.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 2, 247—249 (англ.)

Изучаются свойства структуры λ всех T_1-топологий на бесконечном множестве S (Vaidyanathaswami R., Treatise on set topology, J. Indian Math. Soc. Madras, 1947, см. также РЖМат, 1955, 4285). Наибольшим элементом структуры λ является топология λ_*, в которой открыты лишь пустое множество и всевозможные подмножества с конечными дополнениями в S. Наименьшим элементом структуры λ является топология φ, в которой открыты все подмножества S. Гиперплоскостями структуры λ называются топологии τ_s, $s \in S$, в которых открытыми множествами являются пустое множество, все множества с конечными дополнениями и одноэлементное множество $\{s\}$. Подмножество λ_0 структуры λ, состоящее из λ, и из всевозможных структурных произведений гиперплоскостей, обозначается через λ_0. Доказывается, что λ_0 двойственное изоморфно алгебре всех подмножеств множества S. Доказывается далее, что λ_0 не может быть расширено с сохранением свойств: 1) содержать всевозможные пересечения своих элементов и 2) содержать одно (и только одно) дополнение всякого своего элемента.

Утверждается, что в λ существуют элементы, вовсе не имеющие дополнения и что ни один элемент, отличный от λ и от φ, не может иметь в λ единственного дополнения.

Г. Я. Арешкин

5407. Об установлении топологии некоторых семейств множеств. Зайдман, Поенару (Despre topologizarea anumitor familii de multimi. Zaidmann S., Poenaru V.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 5—6, 195—197 (рум.; рез. русск., франц.)

Изучаются свойства предела последовательности множеств в смысле Бореля. Пусть M — множество произвольной мощности, $P(M)$ — система всех подмножеств множества M. Множество $H \subseteq M$ называется предельным для системы множеств $S \subseteq P(M)$, если в S существует последовательность множеств, сходящаяся к H в смысле Бореля. Обозначим через $\overline{S}$ множество всех предельных множеств для S. Главным результатом работы является доказательство того, что соответствие $S \to \overline{S}$ превращает $P(M)$ в топологическое пространство. Доказывается, далее, что счетное подпространство этого пространства компактно, однако это предложение не может быть обобщено на несчетные подпространства. Если S является семейством множеств счетного множества и имеет только одно предельное множество, то оно само счетно.

Г. Я. Арешкин

5408. Заметка о нормальных пространствах. Исеки (A note on normal spaces. Iséki Kiyoshi), Math. Japonicae, 1953, 3, 45 (англ.)

Доказывается, что к любой счетной дискретной системе замкнутых множеств нормального пространства

можно подобрать систему из попарно непересекающихся окрестностей (Эта теорема известна; см. Kuratowski, Fundam. Math. 1935, 259—268, 260).
A. H. Stone
Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 59.

5409. **Заметка о гипокомпактных пространствах. Исеки** (A note on hypocompact spaces. Iséki Kiyoshi), Math. Japonicae, 1953, 3, 46—47 (англ.)
Доказывается, что произведение гипокомпактного и бикомпактного пространств гипокомпактно. (Эта теорема известна; см. Begle, Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 577—579). A. H. Stone
Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 59.

5410. **Об отображениях многомерных односвязных областей на шары и их границы. I. Косеки** (Über die Abbildungen von mehrdimensionallen einfach-zusammenhängenden Gebieten auf Kugeln und ihre Begrenzungen. I. Koseki Ken'iti), Japan. J. Math., 1952, 22, 87—100 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)
Автор доказывает следующую теорему (в несколько иной терминологии): Предположим, что R — ограниченное множество в трехмерном евклидовом пространстве E^3, являющееся совместной границей ограниченной области G и неограниченной области G_1, причем R просто достижимо из G. Предположим, что существует гомеоморфное отображение f внутренности H единичной сферы на G, имеющее непрерывное продолжение на $\overline{H}$. Тогда существует гомеоморфное отображение g множества $\overline{H}$ на множество $\overline{G}$. (R просто достижимо из G, если для любой точки $a \in R$ и любой последовательности (a_i) точек множества G, сходящейся к a, существует дуга в $G \cup a$, которая содержит все точки a_i). Сходный результат был получен независимо Флойдом и Фортом (РЖМат, 1954, 5076).
E. E. Floyd
Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 61.

5411. **Об одной теореме Рейфенберга. Исеки** (On a theorem of Reifenberg. Iséki Kiyoshi), Portugaliae math., 1953, 12, 141—142 (англ.)
Доказывается, что если объединение конечной системы связных множеств, имеющих общую точку, отделяет две точки в S^2, то и объединение некоторой пары множеств системы также отделяет эти точки (РЖМат, 1954, 2541). A. D. Wallace
Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 547.

5412. **Значение абстрактных пространств и ультрапространств в современной топологии. Куратовский** (論抽象空間及超空間在近代拓撲學中的作用. 庫拉托夫斯基. K.), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 3, 601—607 (кит.)
Содержание доклада, прочитанного автором в Институте математики Китайской Академии наук 31 мая 1955 г.

5413. **Паракомпактность пространств. Нагами** (空間の paracompactness について. 永見啓応), 數學, Сугаку, 1954, 6, № 1, 20—23 (японск.)

5414. **О гомеоморфизме точечных множеств. Хасимото** (點集合の類似について. 橋本弘志), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 2, 100 (японск.)

5415. **Теория когомологий полиэдра. Ван-дер-Варден** (Die Cohomologietheorie der Polyeder. Van der Waerden B. L.), Math. Ann., 1955, 130, № 2, 87—101 (нем.)
Излагается доказательство инвариантности n-мерных групп когомологий бесконечного полиэдра, построенных на бесконечных цепях. Показано совпадение этих групп с группами когомологий, построенными на цепях, являющихся функциями n точек полиэдра. Для случая локально-конечного полиэдра эта теорема доказана Спаньером (Spanier, Ann. Math., 1948, 49, № 2, 407—427). В реферируемой работе автор следует Спаньеру в большинстве доказательств, доказывая также и то, что последний предполагает известным читателю или очевидным. С. С. Рышков

5416. **Замечание о теореме точности. Хасидзуме, Хосокава** (A note on exactness theorem. Hashizume Yoko, Hosokawa Fujitsugu), Math. Japonicae, 1953, 3, 41—44 (англ.)
Авторы дают другое доказательство точности когомологической последовательности пары для групп когомологий Александера—Уоллеса (Spanier, Ann. Math., 1948, 49, 407—427). E. Spanier.
Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 1, 62.

5417. **О реализации комплексов в евклидовых пространствах. I. У Вень-цзюнь** (複合形在歐氏空間中的實現問題. I. 吳文俊), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta Math. Sinica, 1955, 5, № 4, 505—552 (кит.; рез. англ.)
Возможность вложения n-мерного комплекса в евклидово пространство R^m при $m < 2n+1$ впервые обсуждалась Ван-Кампеном (Van Kampen E. R., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1932, 9, 72—78, 152—153); им и, впоследствии, Флоресом (Flores A. I., Ergebn. math. Kolloq, 1935, 6, 4—7) было установлено существование n-мерных комплексов, не вложимых в пространство R^{2n}.

В реферируемой работе результаты Ван-Кампена формулируются в когомологической форме, а затем приводится интересное обобщение этих результатов.

Пусть K — симплициальный комплекс, а $\widetilde{K}^*$ — подкомплекс клеточного комплекса $K \times K$, состоящий из всех таких клеток $\sigma \times \tau \in K \times K$, для которых σ и τ не пересекаются в K. Идентифицируя клетки $\sigma \times \tau$ и $\tau \times \sigma$ в одну и ту же клетку $\sigma * \tau = \tau * \sigma$, мы получаем новый клеточный комплекс K^*. Предположим теперь, что комплекс K реализован с самопересечениями в пространстве R^m, причем так, что его непересекающиеся симплексы находятся в R^m в общем положении. Для каждых двух непересекающихся симплексов $\sigma, \tau \in K$, сумма размерностей которых равна m, положим $\varphi(\sigma * \tau) = \pm \chi(\sigma, \tau)$, где χ — индекс пересечения симплексов σ и τ, рассматриваемый (смотря по четности числа m) либо как целое число (в этом случае знак выбирается в зависимости от ориентаций симплексов σ, τ и пространства R^m), либо как вычет по модулю 2. Тогда φ есть коцикл комплекса K^*. Класс когомологий Φ^m коцикла φ не зависит от вложения, т. е. всецело определяется комплексом K. Ссылаясь на свои предыдущие исследования, автор указывает, что классы Φ^m являются топологическими (но не гомотопическими) инвариантами рассматриваемого полиэдра K. Класс Φ^{2n} совпадает, по существу, с инвариантом Ван-Кампена.

Изучаются некоторые свойства классов Φ^m. Равенство $\Phi^m = 0$ является необходимым условием реализуемости комплекса K в R^m. При любом m справедливо равенство $2\Phi^m = 0$; кроме того, выполняются соотношения $\frac{1}{2}\delta\Phi^{2m-1} = \Phi^{2m}$, $\Phi^i\Phi^j = \Phi^{i+j} \pmod 2$.

Автор указывает, что в дальнейших публикациях он предполагает изучить связь классов Φ^m со стинродовскими квадратами, а также классами Штифеля—Уитнея в случае многообразия и, кроме того, вопрос о достаточности условий $\Phi^m = 0$ для реализуемости в некоторых частных случаях. В. Г. Болтянский

5418. **Теорема о верхней границе чисел Бетти. Асанага** (Betti 數の上限に關する一定理. 朝長秉郎), 數學, Сугаку, 1953, 5, № 3, 31 (японск.)

5419. **Новое доказательство теоремы Коккрофта.** Адамс (A new proof of a theorem of W. H. Cockcroft. Adams J. F.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 4, 482—488 (англ.)

Доказывается теорема, незначительно обобщающая теорему Коккрофта (РЖМат, 1955, 3671, 5690).

С. С. Рышков

5420. **О понятии расслоенного пространства.** Гуревич (On the concept of fiber space. Hurewicz Witold), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 11, 956—961 (англ.)

Выясняется связь между различными определениями расслоенного пространства. Все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми, отображения — непрерывными; через X^I обозначается пространство путей (с любыми начальными и конечными точками) пространства X, рассматриваемое в компактно-открытой топологии.

Пусть p — отображение пространства E в B. Через Ω_p обозначается подпространство прямого произведения $E \times B^I$, состоящее из всех таких пар (e, ω), что $\omega(0) = p(e)$. Через p обозначается отображение $E^I \to \Omega_p$, определенное формулой $\tilde{p}(\tau) = (\tau(0), p\tau)$, $\tau \in E^I$. Тройку (E, B, p) автор называет расслоенным пространством, если отображение $\tilde{p}$ имеет секущую поверхность, т. е. если существует такое отображение $\lambda\colon \Omega_p \to E^I$, что $\tilde{p}\lambda$ есть тождественное отображение пространства Ω_p. Отображение λ, удовлетворяющее этому условию, называется поднимающей функцией (lifting function). Поднимающая функция, вообще говоря, не определена однозначно, однако любые две поднимающие функции гомотопны между собой внутри семейства поднимающих функций.

Приведенное определение эквивалентно следующему: тройка (E, B, p) называется расслоенным пространством, если она удовлетворяет условию существования накрывающей гомотопии (для любых пространств). Следовательно, это определение выделяет более узкий класс объектов, чем определение Серра (требующее существования накрывающей гомотопии только для отображений полиэдров).

Расслоенное пространство (E, B, p) автор называет регулярным, если существует такая поднимающая функция, которая постоянные пути переводит в постоянные (это эквивалентно условию существования «стационарных» накрывающих гомотопий). Если B — метрическое пространство, то любое расслоенное пространство (E, B, p) регулярно.

Тройка (E, B, p) называется локальным расслоенным пространством, если для каждой точки $b \in B$ существует такая окрестность U точки b в B, что тройка $(p^{-1}(U), U, p)$ является расслоенным пространством. Аналогично определяется регулярное локальное расслоенное пространство.

Очевидно, что всякое (регулярное) расслоенное пространство является (регулярным) локальным расслоенным пространством. Обратное утверждение справедливо (и доказано в работе) при условии, что пространство B паракомпактно. Это основной результат работы («теорема униформизации»).

Приведены также некоторые другие результаты.

В. Г. Болтянский

5421. **Пространства $K(\Pi, n)$** Серр. (Les espaces $K(\Pi, n)$. Serre J.-P.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 1, 1—7 (франц.)

Вкратце излагаются, с чисто топологической точки зрения, определение и основные свойства пространств $K(\Pi, n)$. Описывается стандартное расслоение, слоем которого является пространство $K(\Pi, n)$, а базой — пространство $K(\Pi, n+1)$ (пространством этого расслоения служит пространство путей пространства $K(\Pi, n+1)$ с фиксированным началом; это пространство гомотопически тривиально). Указывается универсальная роль пространств $K(\Pi, n)$ в теории когомологических операций (РЖМат, 1954, 3271). Излагается подход к теории натуральных систем референта с точки зрения теории расслоенных пространств.

Оказывается, что p-й комплекс K_p натуральной системы гомотопически простого во всех размерностях пространства X гомотопически эквивалентен некоторому расслоенному пространству, слоем которого является пространство $K(\Pi_p, p)$, а базой $(p-1)$-й комплекс K_{p-1}. Таким образом, любое (простое) пространство X можно рассматривать как многократное расслоенное пространство, слоями которого служат пространства $K(\Pi, n)$. В заключение отмечается, что комплексы натуральных систем играют в теории частичных когомологических операций ту же универсальную роль, что и пространства $K(\Pi, n)$ в теории обычных операций.

Изложению свойств пространств $K(\Pi, n)$ предпослан небольшой параграф, в котором доказывается, что любое непрерывное отображение гомотопически эквивалентно проекции некоторого расслоения. Библ. 22 назв.

М. М. Постников

5422. ***DGA*-алгебры и *DGA*-модули.** Картан (*DGA*-algèbres et *DGA*-modules. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 2, 1—9 (франц.)

Первое из цикла сообщений, посвященных вычислению групп гомологий и когомологий пространств $K(\Pi, n)$. Краткое резюме результатов, излагаемых в этих сообщениях, было опубликовано ранее (РЖМат, 1957, 2964, 2965).

Вводится (и на примере разъясняется) понятие *DGA*-алгебры над основным кольцом Λ, понятие тензорного произведения *DCA*-алгебр и понятие *DCA*-модуля, т. е. градуированного дифференциального (левого) модуля M над *DGA*-алгеброй A, обладающего таким гомоморфизмом $\eta\colon M \to \Lambda$ (пополнением), что $\eta m = 0$, если $m \in M_k$, $k > 0$, $\eta d = 0$, $\eta(am) = (\varepsilon a)(\eta m)$, $a \in A$, $m \in M$, где ε — пополнение в алгебре A. Градуировка *DGA*-модуля M должна быть связана с градуировкой алгебры A соотношением $A_h M_k \subset M_{k+h}$, а его дифференциал d должен удовлетворять формуле: $d(am) = (da)m + (-1)^k a(dm)$, где $a \in A_k$, $m \in M$.

Пусть M — произвольный *DGA*-модуль над *DGA*-алгеброй A и пусть I — идеал алгебры A, являющийся ядром ее пополнения $\varepsilon\colon A \to \Lambda$. Фактор-модуль $\overline{M} = M/IM$, естественным образом определенный как определяет естественным образом гомоморфизм *DGA*-модуль над кольцом Λ, называется модулем, ассоциированным с модулем M.

Пусть M и M' — два *DCA*-модуля над *DCA*-алгебрами A и A' соответственно и пусть $f\colon A \to A'$ — произвольный *DGA*-гомоморфизм. Линейное (над Λ) отображение $g\colon M \to M'$ называется *DGA*-гомоморфизмом, согласованным с гомоморфизмом f, если $g(M_k) \subset M'_k$, $g(am) = (fa)(gm)$, $d'g = gd$, $\eta' g = \eta$. Этот гомоморфизм определяет естественным образом гомоморфизм $\overline{g}\colon \overline{M} \to \overline{M}'$ ассоциированных модулей, обладающий аналогичными свойствами.

Пусть $f\colon A \to A'$ — произвольный *DGA*-гомоморфизм *DGA*-алгебр A и A'. Пусть далее *DGA*-модуль M обладает A-базой, состоящей из однородных элементов. Тогда для любого ациклического *DGA*-модуля M' существует по крайней мере один *DGA*-гомоморфизм $g\colon M \to M'$, согласованный с гомоморфизмом f, причем индуцированный гомоморфизмом g гомоморфизм

$g^* : H_*(\overline{M}) \to H_*(\overline{M}')$ модулей гомологий зависит от выбора гомоморфизма g.

В заключение формулируется следующая теорема: Пусть $g : M \to M$ — некоторый DGA-гомоморфизм ациклических DGA-модулей над DGA-алгебрами A и A' соответственно, обладающих однородными A-(соответственно, A'-) базами, согласованный с DGA-гомоморфизмом $f : A \to A'$, индуцирующим изоморфизм $f_* : H_*(A) \approx H_*(A')$. Тогда отображение $\bar{g}_* : H_*(\overline{M}) \to H_*(\overline{M}')$ также является изоморфизмом.

М. М. Постников

5423. DGA-модули. (Продолжение). Понятие конструкции. Картан (DGA-modules. (Suite). Notion de construction. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 3, 1—11 (франц.)

Это сообщение, являющееся непосредственным продолжением предыдущего (реф. 5422), делится на две части. В первой доказывается теорема, сформулированная в конце предыдущего сообщения. Предварительно доказывается следующая теорема, принадлежащая Муру и до сих пор не опубликованная.

Пусть $g : M \to M'$ — произвольный гомоморфизм дифференциальных градуированных Λ-модулей с фильтрацией и пусть $g^r : E^r(M) \to E^r(M')$ — индуцированный гомоморфизм g гомоморфизм соответствующих спектральных последовательностей. Пусть далее $h : U \to U'$ — произвольный гомоморфизм градуированных Λ-модулей и $\bar{g} : N \to N'$ — произвольный гомоморфизм Λ-свободных дифференциальных градуированных Λ-модулей. Определим в модулях $U \otimes_\Lambda N$ и $U' \otimes_\Lambda N$ дифференциал d, положив $d(u \otimes n) = (-1)^q u \otimes \bar{d} n$, где $u \in U_q$ (соответственно $u \in U'_q$), $n \in N$ (соответственно $n \in N'$) и $\bar{d}$ — дифференциал модуля N (соответственно модуля N'). Предположим, что существуют гомоморфизмы $\psi : E^1(M) \to U \otimes_\Lambda N$ и $\psi' : E^1(M') \to U' \otimes_\Lambda N'$ (сохраняющие двойные градуировки и перестановочные с дифференциалами), индуцирующие изоморфизмы $\psi_* : E^2(M) \to H(U \otimes N)$, $\psi'_* : E^2(M') \approx H(U' \otimes M')$, для которых $\psi' g^1 = (h \otimes \bar{g}) \psi$. Тогда имеют место следующие утверждения (последнее из которых, впрочем, тривиально):

(A) Если гомоморфизмы $g_* : H(M) \to H(M')$ и h являются изоморфизмами, а кольцо Λ — прямым слагаемым кольца U_0, то отображение $\bar{g}_* : H(N) \to H(N')$ также является изоморфизмом.

(B) Если гомоморфизмы g_* и $\bar{g}_*$ являются изоморфизмами, а кольцо Λ — прямым слагаемым кольца U_0, то отображение h также является изоморфизмом.

(C) Если гомоморфизмы h и $\bar{g}_*$ являются изоморфизмами, то отображение g_* также является изоморфизмом.

Геометрически эта теорема означает, что если некоторое отображение расслоенных пространств (фундаментальные группы которого тривиально действуют на группах гомологий слоя) индуцирует изоморфизмы групп гомологий двух из трех пространств (баз, слоев или пространств расслоений), то это отображение индуцирует изоморфизм групп гомологий третьих пространств (роль пространств расслоений играют модули M и M', роль слоев — модули U и U', роль баз — модули N и N').

В доказательстве этой теоремы используется имеющее самостоятельный интерес понятие «цилиндра гомоморфизма g». Цилиндр M'' отображения $g : M \to M'$ определяется как прямая сумма $M'' = M' + M$. Градуировка цилиндра M'' определяется формулой $M''_n = M'_n + M_{n-1}$, дифференциал — формулой $d(x', x) = (dx' + gx, -dx)$, а фильтрация — формулой $M''^p = M'^p + M^{p-1}$. Имеет место точная последовательность $0 \to M' \to M'' \to M \to 0$. В соответствующей точной гомологической последовательности:

$$\to H_{n+1}(M'') \to H_n(M) \to H_n(M') \to H_n(M'') \to \dots$$

«средний» гомоморфизм $H_n(M) \to H_n(M')$ совпадает с гомоморфизмом g_*. Первый член $E^1(M'')$ спектральной последовательности, отнесенной модулю M'', является цилиндром отображения $g^1 : E^1(M) \to E^1(M')$. Следовательно, имеет место точная последовательность

$$\dots \to E^2_{p+1,q}(M'') \to E^2_{p,q}(M)^{q'} \to E^2_{p,q}(M') \to$$
$$\to E^2_{p,q}(M'') \to \dots$$

Во второй части сообщения определяется понятие конструкции (РЖМат, 1957, 2964). Автор принимает здесь следующее более общее определение этого понятия: конструкцией называется тройка (A, N, M), состоящая из DGA-алгебры A, градуированного Λ-модуля N с пополнением и некоторого дифференциала в A-модуле $M = A \otimes_\Lambda N$, относительно которого этот модуль является DGA-модулем (соответствующее пополнение определяется формулой $\gamma_i(a \otimes n) = \varepsilon(a) \gamma_i(n)$).

Модуль N естественно изоморфен модулю $\overline{M}$, ассоциированному с модулем M, и, следовательно, является DGA-модулем. Этот модуль называется конечным модулем конструкции. Алгебра A называется начальной алгеброй. Замечается, что задание однородной A-базы в некотором DGA-модуле M определяет некоторую конструкцию. Доказывается, что для любой DGA-алгебры A существует хотя бы одна ациклическая (т. е. с ацикличным модулем M) конструкция (A, N, M). Эту конструкцию можно построить так, чтобы удовлетворялись следующие условия: пополнение $\eta : N_0 \to \Lambda$ является изоморфизмом; для любого $k \geqslant 0$ дифференциал модуля M изоморфно отображает подмодуль $1 \otimes M_{k+1}$ на подмодуль циклов $Z_k(M)$, причем при $k = 0$ подмодуль $Z_k(M)$ состоит, по определению, из всех элементов с тривиальным пополнением (конструкции, удовлетворяющие этим условиям, являются специальными конструкциями; РЖМат, 1957, 2965). С точностью до изоморфизма существует только одна конструкция, удовлетворяющая этим условиям. Существование конструкции доказывается ее непосредственным построением; при этом по существу получается B-конструкция в смысле Эйленберга—Маклейна (РЖМат, 1957, 2964, а также реф. 5422). Единственность конструкции вытекает из следующего предложения: Пусть (A, N, M) — произвольная, а (A', N', M') — удовлетворяющая указанным выше дополнительным условиям конструкции. Тогда для любого DGA-гомоморфизма $f : A \to A'$ существует один и только один DGA-гомоморфизм $\bar{g} : M \to M'$, согласованный с f и переводящий подмодуль $1 \otimes N$ в подмодуль $1 \otimes N'$.

Замеченные опечатки: на стр. 3—03, строка 5 сверху, вместо $F^1(M'')$ нужно $E^1(M'')$; на стр. 3—07, строка 17 снизу, вместо $\varepsilon(\alpha)$ нужно $\varepsilon(a)$. М. М. Постников

5424. Мультипликативные конструкции. Картан (Constructions multiplicatives. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 4, 1—8 (франц.)

Итерированные мультипликативные конструкции. Когомологии. Картан (Constructions multiplicatives itérées. Cohomologie. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 5, 1—9 (франц.)

В этих двух сообщениях под названием мультипликативных ациклических конструкций рассматриваются

конструкции, введенные автором ранее (РЖМат, 1957, 2964). Основное содержание этих сообщений — доказательство теорем, сформулированных в этой заметке. Кроме того, подробно рассматривается мультипликативное строение B-конструкций с косокоммутативной начальной алгеброй, изученное также Эйленбергом и Маклейном (РЖМат, 1956, 1201). Вопросы, связанные с понятием надстройки, не рассматриваются.

По ходу дела излагается очень простое доказательство (использующее понятие «цилиндра гомоморфизма»; реф. 5423) известной теоремы о том, что если гомоморфизм $f: X \to Y$ градуированных дифференциальных модулей, обладающих однородными базами, индуцирует изоморфизм групп гомологий, то он индуцирует также изоморфизм групп когомологий. М. М. Постников

5425. Операции в ациклических конструкциях. Картан (Opérations dans les constructions acycliques. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 6, 1—11 (франц.)

В первой половине сообщения вводится и изучается надстройка в несколько более общей ситуации, чем в ранее опубликованной заметке (РЖМат, 1957, 2964). Пусть A — произвольная DGA-алгебра, M — ациклический DGA-модуль над алгеброй A и N — ассоциированный с модулем M (реф. 5422) DGA-модуль. Предполагается, что алгебра A вложена (как DGA-подмодуль) в модуль M. Пусть $a \in Z_q(A)$. Тогда $a - \varepsilon(a) = dm$, где $m \in M$. Образ элемента m в модуле N является циклом, класс гомологий которого зависит только от класса гомологий цикла a. Получающееся естественное линейное отображение $\sigma: H_q(A) \to H_{q+1}(N)$ и называется надстройкой. (В случае, когда тройка (A, N, M) является конструкцией, это определение переходит в данное автором ранее). Доказывается, что ядро отображения σ состоит из всех разложенных элементов. Если в M задан некоторый оператор гомотопии, то индуцированное им отображение $H_q(A) \to H_{q+1}(N)$, как доказывается, совпадает с надстройкой σ. Отсюда следует, в частности, что для B-конструкции надстройка в смысле автора совпадает с надстройкой в смысле Эйленберга—Маклейна (РЖМат, 1956, 1201). Надстройка подробно изучается в итерированных B-конструкциях как общих (начинающихся с произвольной косокоммутативной алгебры), так и в групповых (начинающихся с алгебры некоторой группы).

Во второй части сообщения рассматривается произвольная мультипликативная, антикоммутативная, ациклическая конструкция (A, N, M), в предположении, что характеристика основного кольца Λ существует и равна некоторому простому числу p. Пусть ${}_p(A_{2q})$ — подмодуль модуля A_{2q} (однородной составляющей алгебры A), состоящий из таких элементов a, что $da = 0$ и $(a - \varepsilon(a))^p = 0$. Для любого такого элемента a существуют элементы $x \in M_{2q+1}$, $y \in M_{2pq+2}$, для которых $dx = a - \varepsilon a$ и $dy = (a - \varepsilon a)^{p-1} x$. Доказывается, что образ элемента y в алгебре N является циклом, класс гомологий которого зависит только от элемента a. Тем самым определяется некоторое отображение $\psi_p: {}_p(A_{2q}) \to H_{2p+2}(N)$. Для нечетного p это отображение аддитивно. Если $a^p = 0$ для любого $a \in A$ и $b\,(db)^{p-1} \sim 0$ для любого $b \in A_{2q+1}$, то отображение ψ_p индуцирует некоторое отображение $\varphi_p: H_{2q}(A) \to H_{2pq+2}(N)$, которое называется перенесением. Доказывается, что этим условиям удовлетворяет, в частности, конечная алгебра двукратной B-конструкции. В случае групповых B-конструкций перенесение

$$\varphi_p: H_{2q}(\Pi, n; Z_p) \to H_{2pq+2}(\Pi, n+1; Z_p)$$

определено для любых $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ и (при нечетном p) является линейным отображением. Для $q = 0$ отображение $\psi_p: {}_p\Pi \to H_2(\Pi, 1; Z_p)$ и надстройка $\sigma: H_2(\Pi, 1; Z_p) \to H_3(\Pi, 2; Z_p)$ определяют изоморфизм ${}_p\Pi \approx H_3(\Pi; 2; Z_p)$ (даже для $p = 2$).

М. М. Постников

5426. Разделенные степени. Картан (Puissances divisées. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 7, 1—11 (франц.)

Пусть N — произвольная градуированная алгебра (с единицей). Предполагается, что алгебра N косокоммутативна в узком смысле, т. е. что $x^2 = 0$ для любого элемента $x \in N$ нечетной степени. Говорят, что алгебра N снабжена системой разделенных степеней, если каждому элементу $x \in N$ четной, отличной от нуля степени отнесена такая последовательность $\gamma_k(x) \in N$, $k = 0, 1, \ldots$, что: 1) $\gamma_0(x) = 1$, $\gamma_1(x) = (x)$, $\deg \gamma_k(x) = k \deg(x)$; 2) $\gamma_k(x)\,\gamma_h(x) = \binom{k+h}{h} \gamma_{k+h} x$; 3) $\gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\,\gamma_j(x)$; 4) $\gamma_k(xy) = 0$, если $\deg(x)$, $\deg(y)$ нечетны, $\gamma_k(xy) = x^k \gamma_k(y)$, если $\deg(x)$, $\deg(y)$ четны и $\deg(x) > 0$ $(k \geqslant 2)$. В случае, когда N является подалгеброй некоторой дифференциальной алгебры M, система разделенных степеней называется согласованной с дифференциалом, если $d\gamma_k(x) = (dx)\,\gamma_{k-1}(x)$. Доказано, что если $N = B \otimes C$, то любые системы разделенных степеней в алгебрах B и C можно единственным образом продолжить до некоторой системы разделенных степеней в алгебре N. Если данные системы согласованы с дифференциалом некоторой алгебры $M \supset N$, то и продолженная система также согласована с этим дифференциалом. Говорят, что антикоммутативная (в узком смысле) конструкция (A, N, M) снабжена системой разделенных степеней, если алгебры A и N снабжены системами разделенных степеней, согласованных с дифференциалом алгебры $M = A \otimes N$. Согласно сказанному выше, алгебра M также является в этом случае алгеброй с системой разделенных степеней.

Доказывается, что проекция $M \to N$ переводит системы разделенных степеней друг в друга. Следовательно, система разделенных степеней в алгебре N согласована с дифференциалом этой алгебры. Наконец, если алгебра M ациклична, то заданная в N система разделенных степеней естественным образом определяет некоторую систему разделенных степеней в алгебре $H_*(N)$. С другой стороны, доказывается, что в конечной алгебре любой B-конструкции однозначно определяется некоторая естественная система разделенных степеней. Отсюда, в частности, следует, что для любого $n \geqslant 1$ алгебры $n_*(\Pi, n; \Lambda)$ обладают естественными системами разделенных степеней. Эти естественные разделенные степени удовлетворяют следующему дополнительному условию: $\gamma_k(\gamma_h(x)) = \frac{(kh)!}{k!\,(h!)^k} \gamma_{kh}(x)$. Разделенные степени, удовлетворяющие этому условию, изучаются более подробно. В частности, доказывается, что для специальных конструкций любая система разделенных степеней принадлежит к этому типу.

Специально разбирается случай, когда основное кольцо Λ имеет простую характеристику p. Тогда $x^p = 0$ для любого элемента x каждой алгебры N, обладающей системой разделенных степеней. Из указанного выше дополнительного свойства разделенных степеней в этом случае следует, что $\gamma_k(\gamma_p(x)) = \gamma_{kp}(x)$, т. е. что $\gamma_{kp} = \gamma_k \circ \gamma_p$. Отсюда легко выводится, что любая разделенная степень γ_k мультипликативно выражается через разделенную степень γ_p.

В заключение указывается, что в случае $p = 2$ можно видоизменить определение разделенных степе-

ней. Разделенные степени в новом смысле определены для элементов любых положительных степеней (даже нечетных). Они обладают свойствами: 1), 2), 3), а свойство 4) заменяется следующим: $\gamma_k(xy)=0$, если $\deg(x)>0$ и $\deg(y)>0$ и $\gamma_k(xy)=x^k\gamma_k(y)$, если $\deg(x)=0$ ($k\geqslant 2$). Видоизмененные разделенные степени определены в алгебрах $H_*(\Pi, n; Z_2)$, вообще говоря, только для $n\geqslant 2$. В случае $n=2$ необходимо предполагать, что $2\Pi=0$. М. М. Постников

5427. **Соотношения, связывающие введенные ранее операции и операции Бокштейна. Универсальная алгебра градуированного свободного модуля.** Картан (Relations entre les opérations précédentes et les opérations de Bockstein; algèbre universelle d'un module libre gradué. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, **7**, № 8, 1—9 (франц.)

В первой половине сообщения выводятся некоторые соотношения, связывающие введенные в предыдущих сообщениях операции и операции Бокштейна.

Пусть A — косокоммутативная DGA-алгебра над кольцом Λ характеристики 2 и пусть γ_2 — разделенный квадрат в алгебре $\overline{\mathscr{B}}(A)$ (в смысле, указанном в конце предыдущего сообщения; реф. 5426). Тогда для любого $q\geqslant 1$ составное отображение

$$\gamma_2\circ\sigma: H_{2q}(A)\to H_{4q+2}(\overline{\mathscr{B}}(A))$$

совпадает с перенесением φ_2. Отсюда, в частности, следует, что для $p=2$ перенесение φ_2, вообще говоря, не аддитивно.

Пусть теперь A — косокоммутативная DGA-алгебра над кольцом Z целых чисел, обладающая однородной Z-базой. Тогда для любого n надстройка σ переводит гомоморфизм Бокштейна $H_q(A')\to H_{q-1}(A)$, где $A'=A\otimes Z_n$, в гомоморфизм Бокштейна $H_{q+1}(\overline{\mathscr{B}}(A'))\to H_q(\overline{\mathscr{B}}(A))$. Если $n=p$, то перенесение $\varphi_p: {}_p(A'_0)\to H_2(\overline{\mathscr{B}}(A'))$ и гомоморфизм Бокштейна $\delta_q: H_2(\overline{\mathscr{B}}(A'))\to H_1(\overline{\mathscr{B}}(A'))$ связаны соотношением $\delta_p\varphi_p(a')=(\varepsilon a')^{p-1}(\sigma a')$, где $a'\in {}_p(A'_0)$. Если, кроме того, в алгебре A определены разделенные степени, то $\beta_p\varphi_p(\alpha)=\sigma\gamma_p(\alpha)+R(\alpha)$, для любого $\alpha\in H_{2q}(A')$, $q\geqslant 1$, где $R(\alpha)=0$, если p нечетно, и $R(\alpha)=(\beta_2\sigma\alpha)(\sigma\alpha)$, если $p=2$.

Далее рассматриваются некоторые построения, необходимые для описания алгебр $H_*(\Pi, n; Z_p)$. Пусть M — градуированный свободный модуль над коммутативным кольцом Λ. Предполагается, что модуль M обладает базой, состоящей из однородных элементов нечетных степеней. Пусть $E(M)$ — внешняя алгебра над модулем M. Для любого элемента $x=\sum x_i$, где $x_i\in E(M)$ — однородные элементы четной положительной степени, положим

$$\gamma_k(x)=\sum\nolimits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\ldots x_{i_k},$$

Система $\{\gamma_k\}$ является, как легко видеть, системой разделенных степеней.

Пусть теперь $T_k(M)$ — k-кратное тензорное произведение некоторого модуля M самого на себя и $T(M)=\sum T_k(M)$. Определим в $T(M)$ умножение $*$, положив

$$(x_1\otimes\ldots\otimes x_k)*(y_1\otimes\ldots\otimes y_h)=\sum z_1\otimes\ldots\otimes z_{k+h},$$

где сумма распространена на всевозможные последовательности $(z_1, \ldots, z_{k+h})$, получающиеся из последовательности $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_h)$ перестановками, не нарушающими взаимного расположения отдельно элементов $x_1, \ldots, x_k$ и отдельно элементов $y_1, \ldots, y_h$. Умножение коммутативно и ассоциативно.

Пусть далее $S_k(M)$ — инвариантный относительно любых перестановок множителей подмодуль модуля $T_k(M)$, и $S(M)=\sum S_k(M)$. Очевидно, что $S(M)$ является подалгеброй алгебры $T(M)$. Если модуль M градуирован и обладает базой, состоящей из элементов четных положительных степеней, то алгебра $S(M)$ также градуирована и, кроме того, обладает такой однозначно определенной системой разделенных степеней, удовлетворяющих указанному в реф. 5426 дополнительному условию, что $\gamma_k(x)=x\otimes\ldots\otimes x$ для любого элемента $x\in M$.

Пусть, наконец, M — произвольный градуированный свободный модуль, обладающий базой, состоящей из однородных элементов положительных степеней. Обозначим через M^+ его подмодуль, порожденный элементами базы с четными степенями, и через M^- — подмодуль, порожденный элементами базы с нечетными степенями. Тогда определена алгебра $U(M)=E(M^-)\otimes S(M^+)$, обладающая однозначно определенной системой разделенных степеней (реф. 5426). Эта алгебра обладает следующим свойством универсальности: произвольное линейное однородное отображение модуля M в некоторую градуированную косокоммутативную алгебру A, обладающую системой разделенных степеней, удовлетворяющих указанному в реф. 5426 дополнительному условию, можно единственным образом продолжить до однородного гомоморфизма $U(M)\to A$, сохраняющего системы разделенных степеней.

В случае характеристики 2 аналогичным свойством универсальности обладает уже алгебра $S(M)$ (относительно видоизмененных разделенных степеней; см. конец реф. 5426). М. М. Постников

5428. **Определение алгебр $H_*(\Pi, n; Z_p)$ и $H^*(\Pi, n; Z_p)$ для любого простого нечетного p.** Картан. (Détermination des algèbres $H_*(\Pi, n; Z_p)$ et $H^*(\Pi, n; Z_p)$, p premier impair. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 9, 1-10 (франц.)

Рассмотрим всевозможные слова, составленные из трех символов σ, γ_p и φ_p. Высотой некоторого слова α назовем число входящих в него символов, отличных от γ_p. Кроме того, любому слову отнесем некоторое число, называемое степенью и обозначаемое символом deg, определив его по индукции формулами

$$\deg(\sigma\alpha)=1+\deg(\alpha),\quad \deg(\gamma_p\alpha)=p\deg\alpha,$$
$$\deg(\varphi_p\alpha)=2+p\deg(\alpha)$$

(степенью пустого слова считаем число нуль). Разность между степенью и высотой назовем стационарной степенью слова. Непустое слово назовем допустимым, если за каждым символом γ_p, входящим в слово, следует четное число символов σ, причем первый и последний символ слова отличен от γ_p. Назовем допустимое слово α словом первого рода, если его последний символ равен σ; в противном случае назовем α словом второго рода.

Допустимые слова можно описать следующим образом. Пусть α_i, $i=1, 2, \ldots$, — i-й символ слова β, получающегося из слова α вычеркиванием всех символов σ, и β_i — слово, получающееся из слова β вычеркиванием всех символов, за которыми не следует символ α_i. Степень слова β_i является некоторым четным числом $2k_i$. Положим $a_i=2k_i(p-1)+u_i$, где $u_i=0$, если $\alpha_i=\gamma_p$, и $u_i=1$, если $\alpha_i=\varphi_p$. Числа a_i удовлетворяют следующим соотношениям (где n — высота, а $n+q$ — степень слова α): 1) $a_i\equiv 0$ или $\equiv 1 \pmod{2p-2}$; 2) $a_i\geqslant pa_{i+1}$; 3) $\sum a_i=q$; 4) $pa_1<$

$< (p-1)(n+q)$. Обратно, любая последовательность $\{a_i\}$ целых чисел, удовлетворяющих этим условиям, определяет, и притом только одно, допустимое слово. Это слово тогда и только тогда является словом второго рода, когда последнее отличное от нуля число последовательности $\{a_i\}$ равно единице.

Пусть Π — произвольная абелева группа. Тогда любое допустимое слово α можно рассматривать как некоторое отображение, считая символ σ надстройкой, символ γ_p — разделенной степенью и символ φ_p — перенесением. Слово α, рассматриваемое как отображение, обозначается через $f(\alpha)$. Если высота слова α равна n, а степень равна $n+q$, то $f(\alpha)$: $\Pi/_p\Pi \to H_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ при условии, что слово α первого рода, и $f(\alpha) : {}_p\Pi \to H_{n+q}(\Pi, n; Z_p)$ при условии, что слово α второго рода. Если p нечетно, то отображения $f(\alpha)$ линейны.

Каждому допустимому слову α высоты n отнесем некоторый экземпляр группы $\Pi/_p\Pi$, если слово α первого рода, и некоторый экземпляр группы ${}_p\Pi$, если слово α второго рода. Группу, отнесенную слову α, обозначим через $M_\alpha^{(n)}$, а прямую сумму всех групп $M_\alpha^{(n)}$ — через $M^{(n)}$. Группа $M^{(n)}$ является, очевидно, Z_p-модулем. Определим в этом модуле градуировку, считая элементы группы $M_\alpha^{(n)}$ однородными элементами степени q, где q — стационарная степень слова α. Построенные выше отображения $f(\alpha)$ определяют тогда некоторое однородное отображение $f^{(n)} : M^{(n)} \to H_*(\Pi, n, Z_p)$. Согласно доказанному в предыдущем сообщении (реф. 5427), отображение $f^{(n)}$ единственным образом распространяется до некоторого однородного гомоморфизма $g^{(n)} : U(M^{(n)}) \to H_*(\Pi, n; Z_p)$, сохраняющего разделенные степени. Оказывается, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Тем самым эффективно описано строение алгебры гомологий $H_*(\Pi, n; Z_p)$ (при нечетном p). Это описание совпадает, как нетрудно видеть, с описанием, указанным автором ранее (РЖМат, 1957, 2964). По соображениям двойственности отсюда легко получается аналогичное описание алгебры когомологии $H^*(\Pi, n; Z_p)$. М. М. Постников

5429. Определение алгебр $H_*(\Pi, n; Z_2)$ и $H^*(\Pi, n; Z_2)$. Стационарные группы по модулю p. Картан (Détermination des algèbres $H_*(\Pi; n, Z_2)$ et $H^*(\Pi, n, Z_2)$; groupes stables modulo p. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 10, 1—8 (франц.)

Сообщение состоит из двух частей. В первой части вычисляются алгебры гомологий и когомологий пространств $K(\Pi, n)$ по модулю 2, во второй — стационарные группы этих пространств по любому модулю p.

Алгебры гомологий и когомологий по модулю 2 вычисляются тем же методом, каким в предыдущем сообщении (реф. 5428) были вычислены алгебры по модулю $p > 2$. Необходимо только несколько изменить основные определения. Именно, в случае $p = 2$ допустимым словом следует считать любое слово, составленное только из символов σ и γ_2, которое начинается и кончается символом σ. Допустимое слово называется словом первого рода, если его предпоследним символом является символ σ. В противном случае оно называется словом второго рода. Высоты, степени, отображения $f(\alpha)$, модуль $M^{(n)}$ и отображение $f^{(n)} : M^{(n)} \to H_*(\Pi, n; Z_2)$ определяются дословно так же, как и в случае $p > 2$. В частности, описание допустимых слов с помощью последовательностей чисел полностью сохраняется. Так как для $p = 2$ универсальной алгеброй служит алгебра $S(M^{(n)})$ (реф. 5428), то отображение $f^{(n)}$ можно единственным образом распространить до некоторого гомоморфизма $g^{(n)} : S(M^{(n)}) \to H_*(\Pi, n; Z_2)$, сохраняющего разделенные степени. (При $n = 1$ предполагается, что $2\Pi = 0$; см. конец реф. 5428). Оказывается, что гомоморфизм $g^{(n)}$ является изоморфизмом. Тем самым алгебра $H_*(\Pi, n; Z_2)$, а следовательно, и алгебра $H^*(\Pi, n; Z_2)$ эффективно определены.

Вернемся теперь к случаю любого $p \geqslant 2$. Если $q < (p-1)n$, то $(n+q)$-я однородная составляющая $M_{n+q}^{(n)}$ модуля $M^{(n)}$ не зависит от n. Эта составляющая обозначается через $A_q(\Pi; Z_p)$ и называется стационарной группой. С другой стороны, если $n > q$, то $U_{n+q}(M^{(n)}) = M_{n+q}^{(n)}$. Таким образом,

$$H_{n+q}(\Pi, n; Z_p) \approx A_q(\Pi, Z_p),$$

если $0 \leqslant q < n$. Для различных n эти изоморфизмы переходят друг в друга с помощью итераций гомоморфизма σ.

Так как кольцо Z_p является полем, то строение модуля $A_q(\Pi; Z_p)$ полностью определяется его размерностью. Так как модуль $A_q(\Pi; Z_p)$ аддитивно зависит от группы Π, то достаточно определить его размерность для случая, когда группа Π циклическая; при этом следует иметь в виду, что $A_q(\Pi Z_p) = 0$, если порядок группы Π не делится на p. Пусть b_q — размерность пространства $A_q(\Pi, Z_p)$ в случае, когда Π — циклическая группа порядка p^r. Оказывается, что многочлен $\theta_p(t) = \sum b_q t^q$ определяется следующей формулой:

$$V_p(t) = \prod_{i \geqslant 0} \frac{1 - t^{2p^i - 1}}{1 - t^{2p^i + 1 - 2}}.$$

Соответствующий многочлен $\theta_p'(t)$ для бесконечной циклической группы определяется формулой

$$\theta_p'(t) = \frac{\theta_p(t)}{1 - t}.$$

М. М. Постников

5430. Определение алгебр $H_*(\Pi, n; Z)$. Картан (Détermination des algèbres $H_*(\Pi, n; Z)$. Cartan H.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér., 1954/1955, 7, № 11, 1—24 (франц.)

Заключительное сообщение цикла, посвященного вычислению алгебр $H_*(\Pi, n)$. Пусть $E(x, 2q-1)$ — внешняя алгебра от образующей x степени $2q-1$, а $P(x, 2q)$ — алгебра многочленов от разделенных степеней образующей x степени $2q$. Эти алгебры, снабженные дифференциалом d, для которого $dx = 0$, будем называть элементарными комплексами первого типа. Алгебры $E(x, 2q-1) \otimes P(y, 2q)$ и $P(x, 2q) \otimes E(y, 2q+1)$, снабженные дифференциалом d, для которого $dx = 0$, $dy = hx$, h — некоторое целое число, будем называть элементарными комплексами второго типа. Заметим, что в любом элементарном комплексе определена некоторая естественная система разделенных степеней.

Пусть теперь Π — произвольная абелева группа и n — некоторое целое положительное число. Каждому элементу $u \in \Pi$ отнесем некоторый элементарный комплекс первого типа с образующей степени n. Будем обозначать этот комплекс через $[u, n]_1$ (это и следующие обозначения принадлежат референту). Пусть далее p — произвольное простое число. Каждому p-примарному элементу $u \in \Pi$ отнесем некоторый элементарный комплекс второго типа, обозначаемый через $[u, n]_2$, степени образующих которого равны n и $n+1$, а число h выражается формулой $h = (-1)^{n-1} p^i$, где p^i — порядок элемента u. Наконец, каждому допустимому слову α высоты n (реф. 5429), имеющему вид

$\sigma^k\varphi_p\alpha'$, где слово α' непусто, и любому элементу u группы Φ, где $\Phi = \Pi/_p\Pi$, если слово α^* первого рода, и $\Phi = {}_p\Pi$, если слово α — второго рода, отнесем элементарный комплекс второго типа, обозначаемый через $[u, n, \alpha]_i$, где i — род слова α, степени образующих которого равны n и $n+1$, а число h равно $(-1)^k p$.

Образующей комплекса $[u, n]_1$ и образующей степени n комплекса $[a, n]_2$ мы поставим в соответствие элемент $\sigma^n u \in H_n(\Pi, n; Z)$, а образующей степени $n+1$ комплекса $[u, n]_2$ — элемент $\sigma^{n-1}\psi_p{}^{\mathfrak{f}}u$, где $\psi_p{}^{\mathfrak{f}}$ — отображение ${}_p{}^{\mathfrak{f}}\Pi \to H_2(\Pi, 1; Z_p{}^{\mathfrak{f}})$, строящееся следующим образом. Пусть (A, N, M) — ациклическая Z-свободная конструкция с начальной алгеброй $A = Z(\Pi)$. Тогда для любого $a \in {}_p{}^{\mathfrak{f}}\Pi$ элемент $\psi_p{}^{\mathfrak{f}}(a) \in H(N \otimes Z_p{}^{\mathfrak{f}})$ является классом гомологий образа элемента $y \in M_2$, удовлетворяющего соотношению $dy = (1 + a + \ldots + a^{p^{\mathfrak{f}}-1})\, x$, где $x \in M_1$ — такой элемент, что $dx = a - 1$. Далее, образующей степени n комплекса $[u, n, \alpha]_i$ поставим в соответствие элемент $(\beta_p \circ f'(\alpha))\, u$, а образующей степени $n+1$ — элемент $f'(\alpha)(u)$, где $f'(\alpha)$ — отображение, получающееся из отображения $f(\alpha)$ (реф. 5429) заменой первого отображения φ_p отображением ψ_p (если $i = 1$, то $f'(\alpha) = f(\alpha)$). Эти соответствия порождают естественный гомоморфизм алгебры гомологий любого тензорного произведения комплексов $[u, n]_i$, $[u, n, \alpha]_i$ в алгебру $H_*(\Pi, n, Z)$.

Пусть группа Π имеет конечное число образующих и пусть она разложена в прямую сумму примарных циклических групп. Обозначим через $\left\{u_i^{(0)}\right\}$ образующие бесконечных слагаемых и через $\left\{u_i^{(p)}\right\}$ — образующие примарных по p слагаемых. Их образы в группе $\Pi/_p\Pi$ мы обозначим через $\bar{u}_i^{(0)}$ и $\bar{u}_i^{(p)}$ соответственно. Кроме того, положим $v_i^{(p)} = p^{f_i - 1} u_i^{(p)}$, где p^{f_i} — порядок образующей $u_i^{(p)}$. Тензорное произведение комплексов вида $\left[u_i^{(p)}, n\right]_2$ и всевозможных комплексов вида $\left[\bar{u}_i^{(0)}, n, \alpha\right]_1$, $\left[\bar{u}_i^{(p)}, n; \alpha\right]_1$ и $\left[v_i^{(p)}, n; \alpha\right]_2$ обозначим через X_p. Кроме того, через X_0 обозначим тензорное произведение комплексов $\left[u_i^{(0)}, n\right]_1$, а через X — тензорное произведение комплекса X_0 и комплекса X_p по всем p. Тогда $X = X_0 + \sum_p X_0 \otimes X'_p + \sum_{p \neq q} X'_p \otimes X'_q$, где X'_p — подкомплекс комплекса X_p, состоящий из всех элементов положительных степеней и, следовательно, $H(X) = X_p + \sum_p X_0 \otimes H(X'_p) + \sum_{p \neq q} H(X'_p \otimes X_q)$ (следует иметь в виду, что $H(X_0) = X_0$). Оказывается, что естественный гомоморфизм $H(X) \to H_x(\Pi, n, Z)$ будет эпиморфизмом. Ядром этого эпиморфизма является подалгебра $\sum_p \left[X_0 \otimes H(X'_p)\right]_p + \sum_{p \neq q} H(X'_p \otimes X'_q)$, где $\left[X_0 \otimes H(X'_p)\right]_p$ (обозначение референта) — сумма q-примарных компонент алгебры $X_0 \otimes H(X'_q)$ по всем $q \neq p$. Эта теорема позволяет эффективно вычислять алгебры $H_*(\Pi, n; Z)$. Из нее, в частности, следует, что группа $A_1(\Pi)$ тривиальна, а группа $A_q(\Pi)$, для любого $q \geqslant 2$, является периодической группой, p-компонента которой для любого p является прямой суммой групп, изоморфных либо группе $\Pi/_p\Pi$, либо группе ${}_p\Pi$. Число слагаемых, изоморфных группе $\Pi/_p\Pi$ (следовательно, группе ${}_p\Pi$), равно числу допустимых слов первого (соответственно второго) рода стационарной степени q, для которых $a_1 \equiv 0 \pmod{2p-2}$. Соответствующие изоморфизмы являются естественными отображениями, и, следовательно, это утверждение верно и для групп с бесконечным числом образующих.

Описанное вычисление алгебр $H_*(\Pi, n; Z)$ зависит от разложения группы Π в прямую сумму циклических групп и поэтому не является естественным вычислением в смысле общей теории функторов. В связи с этим в сообщении излагается другой, не столь эффективный, но зато естественный способ вычисления этих алгебр.

Пусть $U(\Pi, n)$ — универсальная алгебра градуированного Z-модуля G, все однородные составляющие которого тривиальны, за исключением n-й, которая совпадает с группой Π (показывается, что универсальные алгебры существуют для любых, а не только свободных Z-модулей; ср. реф. 5429). Оказывается, что алгебра $U(\Pi, n)$ естественно вкладывается в алгебру $H_*(\Pi, n; Z)$. После вложения она совпадает с подалгеброй (относительно разделенных степеней), порожденной группой $H_n(\Pi, n; Z) \approx \Pi$.

Пусть теперь p — фиксированное простое число. Обозначим через $K_p(\Pi, n)$ — тензорные произведения элементарных комплексов $[u, n]_1$, где u — произвольный не p-примарный элемент группы Π, и всех комплексов вида $[u, n]_2$, $[u, n, \alpha]_i$, соответствующих данному p. Легко видеть, что образом естественного отображения $\Phi_p : H(K_p(\Pi, n)) \to H_*(\Pi, n; Z)$ является сумма (не прямая) подалгебры $U(\Pi, n)$ и p-компоненты алгебры $H_*(\Pi, n; Z)$. Следовательно, для полного вычисления алгебры $H_*(\Pi, n; Z)$ достаточно определить ядро N_p отображения Φ_p. Это ядро описывается следующим образом.

Пусть $f : K \to K_p(\Pi, n)$ — отображение некоторого тензорного произведения K элементарных комплексов в комплекс $K_p(\Pi, n)$, переводящее образующие в образующие. Назовем отображение $g : K \to K_p(\Pi, n)$ элементарным преобразованием отображения f, если выполнены следующие условия: 1) Пусть x-образующая некоторого множителя первого типа комплекса K и, следовательно, $f(x) = \sigma^n w$, где $w \in \Pi$. Тогда либо $g(x) = h(\sigma^n u)$, где h — такое целое число, а u — такой элемент группы Π, что $w = hn$, либо $g(x) = \sigma^n u + \sigma^n v$, где u и v — такие элементы группы Π, что $w = u + v$; 2) Пусть x, y — образующие некоторого множителя второго типа комплекса K, для которых $dy = (-1)^{n-1} p^f x$, и, следовательно, $f(x) = \sigma^n w$, $f(y) = \sigma^{n-1}\psi p^{\mathfrak{f}}(w)$, где $w \in {}_{p^{\mathfrak{f}}}\pi$. Тогда либо $g(x) = h(\sigma^n u)$, $g(y) = h(\sigma^{n-1}\psi p^{\mathfrak{f}}(u))$, где h — такое целое число, а u — такой элемент группы ${}_{p^{\mathfrak{f}}}\Pi$, что $w = hu$, либо $g(x) = p^t(\sigma^n u)$, $g(y) = \sigma^{n-1}\psi_{f+t}(u)$, где t — такой показатель, что $w = p^t u$, $u \in \Pi$, либо, наконец, $g(x) = \sigma^n u + \sigma^n v$, $g(y) = \sigma^{n-1}\psi p^{\mathfrak{f}}(u) + \sigma^{n-1}\psi p^{\mathfrak{f}} + \omega$, где u и v — такие элементы группы Π, что $w = u + v$, а $\omega = 2^{f-1}(\sigma u)(\sigma v)$, если $n = 1$, $p = 2$, $\omega = 0$ в противном случае; 2) Пусть x, y — образующие некоторого множителя второго типа комплекса K, для которых $dy = (-1)^{n-1} p^{f+t} x$. Тогда если $f(x) = \sigma^n u$, $f(y) = \sigma^{n-1}\psi_{f+t}(u)$, где $u \in {}_{p^f}\Pi$, то $g(x) = \sigma^n u$, $g(y) = p^t \sigma^{n-1}\psi p^{\mathfrak{f}} u$ (этот случай в тексте опущен; референт добавил его в соответствии со списком ошибок, опубликованным автором позднее) (реф. 5431); 3) Пусть x, y — образующие комплекса K, для которых $dy = (-1)^k px$ и, следовательно, $f(x) = (\beta_p \circ f'(\alpha))(w)$, $f(y) = f'(\alpha)(w)$, где α — допустимое слово вида $\sigma^k\varphi_p\alpha'$, а $w \in \Pi/_p\Pi$, если слово α первого рода и $w \in {}_p\Pi$, если слово α — второго рода (см. выше). Тогда либо $g(x) = h(\beta_p \circ f'(\alpha))(u)$, $g(y) = hf'(\alpha)(u)$, где h — такое целое число, а u — такой

элемент группы Π, что $w = hu$, либо $g(x) = (\beta_p \circ f'(\alpha))(u) + (\beta_p \circ f'(\alpha))(v) + \omega_1$, $g(y) = f'(\alpha)(u) + f'(\alpha)(v) + \omega_2$, где u и v — такие элементы группы Π, что $w = u + v$, а $\omega_1 = \omega_2 = 0$, если $k > 0$ или $p > 2$ (выражения для $\omega_1\omega_2$ в случае $k = 0$, $p = 2$ здесь не приводим ввиду некоторой их громоздкости). Два элемента алгебры $H'_*(K_p(\Pi, u))$ назовем элементарно эквивалентными, если они являются образами одного и того же элемента алгебры $H(K)$ при гомоморфизмах f_* и g_*, индуцированных некоторым отображением f и некоторым его элементарным преобразованием g. Идеал, порожденный разностями элементарно эквивалентных элементов, совпадает, как доказывается, с идеалом N_p. М. М. Постников

5431. Список ошибок, допущенных в первом издании Трудов Семинара Картана за 1954/55 г. (Erratum général à joindre à la I^e édition du Séminaire Cartan 1954/55. Algèbres d'Eilenberg-Maclane et homotopie), Sémin. H. Cartan, Ecole norm. supér., 1954/1955, **7**, № 16 bis, 5 (франц.)

5432. Обобщение теоремы Гуревича и его применение. Накаока (Hurewicz の定理の擴張とその應用について. 中岡稔), 數學, Сугаку, 1953, **5**, № 3, 32—36 (японск.)

5433 К. Унографические разбиения. Упрощенное доказательство. Синьор (Unigraphic partitions. A simplified proof. Senior James K.), George Herbert Jones Laboratory, University of Chicago, 1954, 18 pp., 75 cents) (англ.)

Сколькими способами может быть построен граф с конечным числом вершин, который имеет данное число вершин каждой степени? Автор получает необходимое и достаточное условие для того, чтобы ответ был 0 или 1. Доводы автора представляют собой усовершенствованную форму тех, которые были использованы в ранней работе (Amer. J. Math., 1951, **73**, 663—689). W. T. Tutte

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 888.

5434. Д. Инварианты альтернирующих типов зацеплений. Кроуэлл (Invariants of alternating link types. Crowell Richard Henry. — Doct. diss. Princeton Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 11, 2223—2224 (англ.)

Рассматриваются типы (классы эквивалентности) зацеплений кратности μ (т. е. состоящих из μ зацепленных замкнутых линий). Тип зацепления $\mathscr{L}$ называется допустимым, если он обладает связной направленной альтернирующей проекцией (последнее — свойство альтернированности типа $\mathscr{L}$ — означает, что последовательным двойным точкам проекции отвечает при движении по линии прохождение поочередно то выше, то ниже других ветвей). Для таких типов зацеплений изучаются приведенные полиномы Александера $\tilde{\Delta}(t)$ (Alexander J. W., Trans. Amer. Math., Soc., 1928, **30**, 275—306), связанные с полным полиномом Александера $\Delta(t_1, \ldots, t_\mu)$ для $\mathscr{L}$ (РЖМат, 1953, 133) при $\mu \geqslant 2$ соотношением $\tilde{\Delta}(t) = (t-1)\Delta(t, \ldots, t)$ и совпадающим с ним при $\mu = 1$.

Главные результаты автора: 1) для всякого допустимого типа зацеплений $\mathscr{L}$ степень многочлена $\tilde{\Delta}(t)$ равна $2h + \mu - 1$, где μ — кратность зацепления $\mathscr{L}$, а h — его род, т. е. наименьший род содержащей такое зацепление поверхности; 2) полином $\Delta(t)$ для альтернирующего типа зацеплений имеет коэффициенты чередующихся знаков; 3) для допустимых типов зацеплений $\mathscr{L}$ существует эффективный алгоритм упрощения проекции (отвечающий процессу возможного развязывания), причем $D \geqslant d$, где D есть определитель зацепления $\mathscr{L}$, (Bankwitz C., Math. Ann., 1930, **103**, 145—162, § 3), а d — число двойных точек проекции, получающейся в результате применения алгоритма. М. Ф. Бокштейн

См. также: 5374 К, 5375 К, 5407, 5450, 5708, 5869, 5871, 5873, 5970, 5971, 5972, 5973.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5435. О продолжимости меры. Пхакадзе Ш. С., Сообщ. АН ГрузССР, 1956, **17**, № 9, 769—776

Если не существует недостижимого (т. е. эксорбитантного, см. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., Гостехиздат, 1948, стр. 113) алефа, не превосходящего мощности континуума, то всякая мера, заданная на разрешимом классе множеств (РЖМат, 1955, 1610; 1957, 268), продолжаема. Последнее означает существование меры, определенной на более обширном классе множеств, совпадающей с первоначальной мерой на исходном классе. Доказано еще несколько теорем, примыкающих к вышеприведенной. Н. П. Натансон

5436. Верхняя и нижняя производные от функций ячеек в булевых σ-алгебрах и их интегрирование. Криккеберг (Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration. Krickeberg, Klaus), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1955, München, 1956, 217—279 (нем.)

В булевой σ-алгебре $\mathfrak{B}$ рассматривается множество $\mathfrak{F}$ всех вещественных $\mathfrak{B}$-измеримых функций (разложений единицы). Функции из $\mathfrak{F}$ могут интерпретироваться как вещественные функции, заданные на некотором множестве, в котором имеется булева σ-алгебра подмножеств (точнее — классов эквивалентных в определенном смысле подмножеств), изоморфная $\mathfrak{B}$. В $\mathfrak{B}$ задана строго положительная, σ-конечная (счетно аддитивная) мера μ. Интеграл $\int f d\mu$ от функции $f \in \mathfrak{F}$ определяется как обычно. Устанавливается ряд теорем о предельном переходе под знаком интеграла.

В $\mathfrak{B}$ выделено непустое подмножество $\mathfrak{K}$, элементы которого называются ячейками, отличны от 0 и имеют конечную меру. Разложением называется любое множество $\mathfrak{S}$ дизъюнктных ячеек с $\sup \mathfrak{S} = E$ (E — единица алгебры $\mathfrak{B}$). Из σ-конечности меры следует, что разложение не может быть более, чем счетным. Пусть Ψ — вещественная функция (конечная или бесконечная), заданная на множестве $\mathfrak{K}$, а Θ — некоторое направленное множество разложений $\mathfrak{S}$, в котором упорядочение введено произвольным способом. Если ряд $\sum_{S \in \mathfrak{S}} \Psi(S)$ безусловно сходится (сумма его может быть равна ∞ с определенным знаком) для всех $\mathfrak{S} \in \Theta$, следующих за некоторым $\mathfrak{S}_0 \in \Theta$, то формулами

$$\int \Psi = \lim_{\mathfrak{S}} \sum_{S \in \mathfrak{S}} \Psi(S), \quad \overline{\int} \Psi = \overline{\lim_{\mathfrak{S}}} \sum_{S \in \mathfrak{S}} \Psi(S)$$

определяются нижний и верхний интегралы Беркилла—Колмогорова (пределы берутся по множеству Θ). Если $\int \Psi = \overline{\int} \Psi$ и имеет конечное значение, то функция Ψ называется суммируемой.

Для каждого $\mathfrak{S} \in \Theta$ составляется функция $D(\Psi, \mathfrak{S})$, равная постоянной $\psi(S)/\mu(S)$ на каждой компоненте $S \in \mathfrak{S}$. Затем определяются функции

$$\underline{D}\Psi = \varliminf_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S}), \quad \overline{D}\Psi = \varlimsup_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S}),$$

называемые нижней и верхней производными от Ψ по μ. Исследуются соотношения между интегралами Беркилла—Колмогорова от Ψ и интегралами $\int \underline{D}\Psi d\mu$, $\int \overline{D}\Psi d\mu$.

Основной результат этой части статьи: Если $\mu(E) < +\infty$, то каждая вполне непрерывная дифференцируемая функция Ψ ограниченной вариации с интегрируемой производной суммируема и $\int \Psi = \int D\Psi d\mu$. При этом функция Ψ называется вполне непрерывной (totalstetig), если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$, $H \in \mathfrak{B}$ с $\mu(H) < \infty$ и $\mathfrak{S}_0 \in \Theta$, что для любого $\mathfrak{S} \geqslant \mathfrak{S}_0$ и любой системы $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{S}$ дизъюнктных ячеек с $\mu(H(\vee \mathfrak{J})) < \delta$ сумма $\Psi(\mathfrak{J}) = \sum_{I \in \mathfrak{J}} \Psi(I)$ имеет смысл и $|\Psi(\mathfrak{J})| < \varepsilon$. Ψ называется функцией ограниченной вариации, если $\int |\Psi| < +\infty$.

Специально изучается случай, когда упорядочение в множестве Θ введено по простейшему закону: одно разложение следует за другим, если оно мельче. Затем результаты, установленные для этого специального случая, переносятся и на более общий, при некоторых условиях, накладываемых на Θ.

Часть результатов была сообщена автором без доказательства ранее (РЖМат, 1955, 4325). Б. З. Вулих

5437. Некоторые вопросы о представлении функции сингулярными интегралами, распространенными по области. Федулов В. С., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 14, 97—10

Известные теоремы Лебега, Д. К. Фаддеева и П. И. Романовского о представлении функции сингулярными интегралами переносятся на случай произвольной односвязной области. Приведем один из полученных автором результатов (аналог теоремы Лебега). Пусть для фиксированного $x \in G$ и любой окрестности δ точки x ($\delta \subseteq G$) будет

$$\lim_r \int_{C\delta} f(u)\, \Phi_r(u, x)\, du = 0,$$

где $C\delta = G \setminus \delta$ и, кроме того,

$$\int_{\overline{G}} |\Phi_r(u, x)|\, du < H(x).$$

Тогда для каждой суммируемой функции $f(x)$, непрерывной в точке x, имеем:

$$f(x) = \lim_r \int_{\overline{G}} f(u)\, \Phi_r(u, x)\, du$$

(Символом $\overline{G}$ обозначена замкнутая ограниченная односвязная область, функция $f(x)$ рассматривается как функция точки области). И. Е. Жак

5438. Аппроксимация функции на поверхности. Стампаккья (Approssimazione di una funzione su una superficie. Stampacchia Guido), Rend. Accad. Sci. fis. e mat. Napoli, 1952, 19, 90—97 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Пусть Σ — поверхность, состоящая из конечного числа кусков, каждый из которых, при надлежащем выборе осей, может быть задан явным уравнением $z = z(x, y)$, где функция z имеет непрерывные первые частные производные, и, кроме того, расстояние между любыми двумя точками поверхности не превосходит 1. Доказывается следующий вариант известной теоремы. Пусть

$$\Phi_n(x, y, z) = \Phi_n(P) = \frac{\pi}{n+1} \int_\Sigma \varphi(Q)\, (1 - |PQ|^2)^n\, d\sigma_Q,$$

где φ — данная функция на поверхности Σ; P — точка Σ с координатами x, y, z; Q — переменная точка Σ, $d\sigma_Q$ — элемент площади, $|PQ|$ — расстояние между P и Q. Тогда $\Phi_n(P) \to \varphi(P)$ всюду на Σ, кроме, быть может, края Σ, если φ непрерывна, почти всюду — если φ суммируема (Отсюда заключается, что $\int_\Sigma |\Phi_n|^p\, d\sigma$ ограничен, если $\varphi \in L^p$ ($p > 1$)). Если $\varphi(P)$ имеет первые частные производные, то получается аналогичный результат, если $z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Допущена несущественная ошибка в постоянной, которую автор обозначает k_n. J. Favard

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 511—512.

5439. Область определения максимального полигармонического оператора. Костенко В. Г., Бюл. наук. студ. конференції 1954 року. Част 2. Львів, Вид-во ун-ту, 1955, 95—98

Исследуется максимальный полигармонический оператор

$$\Delta^m u \equiv \Delta^m_{\max} u(x) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)^m u(x) =$$

$$= \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_1^{2\alpha_1} \ldots \partial x_n^{2\alpha_n}} \qquad (1)$$

при предположении, что $u \in L_2(D)$ и $\Delta^m u \in L_2(D)$. Существование отдельных обобщенных производных, входящих в сумму (1), не обязательно.

Формулируется теорема: Если $\Delta^m u \in L_2(D)$, то внутри области D функция $u(x)$ имеет все обобщенные производные порядка ниже $2m$, суммируемые с квадратом.

Доказательство проводится для случая $m = 1$. Приведены условия (обобщенная теорема Гарнака) сходимости в среднем на всякой замкнутой поверхности S', проведенной внутри области D, ряда $\sum_{k=1}^\infty u_k$, где $u_k(x)$ — гармонические функции внутри D, к обобщенной гармонической функции.

Дается следующий критерий: Если задана последовательность $u_k \in L_2(D)$ функций, имеющих несмешанные частные производные второго порядка по каждому аргументу в отдельности, суммируемые с квадратом в области D, и при этом

$$\| u_k - u \| \to 0, \quad \| \Delta u_k - \varphi \| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

то функция u принадлежит области определения максимального гармонического оператора, причем $\Delta_{\max} u = \varphi$. В. Е. Мираков

5440. Об одном расширении понятия функции обобщенной ограниченной вариации. Джулиано

(Sopra un'estensione del concetto di funzione generalmente a variazione limitata. Giuliano Landolino), Ann. Scuola normale super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1953, 7, № 1—2, 65—78 (итал.)

Функция двух переменных $f(x, y)$, заданная в единичном квадрате Q, называется функцией обобщенной ограниченной вариации порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если полные вариации $\bigvee_0^1 f(x, y_0) = \lambda(y_0)$ и $\bigvee_0^1 f(x_0, y) = \mu(x_0)$ как функции соответственно y_0 и x_0 измеримы и интегралы по Лебегу

$$\int_0^1 [\lambda(y)]^\alpha dy \quad \text{и} \quad \int_0^1 [\mu(x)]^\alpha dx \tag{1}$$

существуют и конечны; при этом все вариации вычисляются без учета значений функции $f(x, y)$ на некотором множестве E меры нуль.

Доказываются теоремы: 1) Всякая измеримая функция обобщенной ограниченной вариации удовлетворяет обобщенному условию Липшица, т. е. для всякого $\sigma > 0$ существуют такое число $N^* > 0$ и такое множество E^*, что $mQ - mE^* < \sigma$ и

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \leqslant N^* \tag{2}$$

для любых точек (x_2, y_1) и (x_2, y_2) из E^*. 2) Всякая измеримая функция обобщенной ограниченной вариации порядка α почти везде асимптотически дифференцируема по В. В. Степанову. 3) Если $f_n(x, y)$ — такая последовательность измеримых функций обобщенной ограниченной вариации порядка α, что величины

$$\int_0^1 [\lambda_n(y)]^\alpha dy + \int_0^1 [\mu_n(x)]^\alpha dx$$

ограничены равномерно относительно n, то по любому $\sigma > 0$ найдется N^* из (2) одновременно для всех $f_n(x, y)$. 4) Если дополнительно к условиям теоремы 3) интегралы

$$\iint_Q |f_n(x, y)|^\alpha dxdy$$

ограничены равномерно относительно n, то из последовательности $f_n(x, y)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в среднем со степенью α к некоторой функции обобщенной ограниченной вариации порядка α.

Дается определение функции (φ)-обобщенной ограниченной вариации, отличающееся от первого определения тем, что вместо интегралов (1) рассматриваются интегралы $\int_0^1 \varphi[\lambda(y)] dy$ и $\int_0^1 \varphi[\mu(x)] dx$, где $\varphi(z)$ — непрерывная, строго возрастающая функция с $\varphi(0) = 0$, $\lim_{z \to +\infty} \varphi(z) = +\infty$. Доказывается, что при ряде условий, накладываемых на функцию $\varphi(z)$, класс функций (φ)-обобщенной ограниченной вариации совпадает с классом функций обобщенной ограниченной вариации порядка α.

Определение функции обобщенной ограниченной вариации порядка $\alpha = 1$ равносильно определению функции обобщенной ограниченной вариации по Тонелли (Tonelli L., Ann. Scuola normale super. Pisa, 1936, 5, 315—320) и Чезари (Cesari L., тот же журнал, 1936, 5, 299—313). Для этого случая теоремы 1—3 были ранее доказаны автором, тот же журнал, 1939, 8, 41—50; 1952, 6, 99—107), а теорема 4 — Кафьеро (Cafiero F., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1950, 8, 305—311).

И. Д. Заславский

5441. О сходимости ортогональных рядов. Талалян А. А., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 4, 515—516

Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{1}$$

является ортонормированной системой (о. н. системой) на отрезке $[0, 1]$. Положительная неубывающая функция $\omega(x)$, определенная при $x \geqslant 1$, называется множителем Вейля системы (1), если выполняется условие:

1) Для любой последовательности действительных чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \omega(n) < +\infty$, ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(x)$ сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Множитель Вейля $\omega(x)$ называется точным множителем Вейля, если, кроме того, выполняется следующее условие:

2) Для любой положительной функции $w(x) = o(\omega(x))$ можно найти такую последовательность действительных чисел a_n, что ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(x)$ расходится почти всюду, в то время как ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 w(n)$ сходится.

В заметке формулируются следующие теоремы:

1. Пусть $\omega(x)$ — произвольная функция, определенная для $x \geqslant 1$ и обладающая свойствами: 1) $\omega(x)$ — положительная неубывающая функция, стремящаяся к $+\infty$ при $x \to +\infty$; 2) для любого постоянного $a > 0$ и любого $x \geqslant 1$ $\omega(x + a) - \omega(x) \leqslant \lg^2(x + a) - \lg^2 x$. Тогда существует о. н. система функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0, 1]$, для которой $\omega(x)$ является точным множителем Вейля.

2. Какова бы ни была не эквивалентная нулю функция $f(x) \in L_2$ $(0, 1)$, можно определить такую полную о. н. систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, заданных на $[0, 1]$, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.

3. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная о. н. система функций, определенных на $[0, 1]$, то для любой измеримой функции $f(x)$ можно определить ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(x)$, сходящийся по мере к $f(x)$ на $[0, 1]$, причем $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ ($f(x)$ может принимать значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры).

4. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная о. н. система функций, определенных на $[0, 1]$, то существует ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(x)$, который сходится по мере к нулю, причем не все a_n равны нулю и $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Как отмечает автор, теорема 2 является частным случаем более общей теоремы Банаха (Banach S., Studia math., 1940, 9, 139). Д. Е. Меньшов

5442. О сходимости почти всюду ортогональных рядов. Талалян А. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 105

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

5443. Замечание о сепарабельности упорядоченного множества. Болл (A note on the separability of an ordered space. Ball B. J.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 4, 548—551 (англ.)

Опираясь на один результат референта (C. r. Acad. sci., 1950, 231, 1113—1114), автор доказывает теорему 1: Пусть S — связное упорядоченное множество; если: 1) существует такая счетная система F непрерывных преобразований множества S в себя, что

всякая точка $p \in S$ — предельная точка совокупности $\{f(p) \mid f \in F\}$; 2) S обладает свойством Суслина (т. е. каждая система попарно непересекающихся интервалов будет мощности $\leqslant \aleph_0$), — то S сепарабельно. В этом предложении свойство 2) можно заменить свойством 3) для всякого $f \in F$ будет $f(x) \neq x$ $(x \in S)$.

G. Kurepa

5444. Об уравнении $\xi^2 = \eta^3 + 1$ в трансфинитных порядковых числах. Серпинский (Sur l'équation $\xi^2 = \eta^3 + 1$ pour les nombres ordinaux transfinis. Sierpinski W.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 1—2 (франц.).

Доказывается, что уравнение $\xi^2 = \eta^3 + 1$ не имеет решений в трансфинитных порядковых числах. С другой стороны, отмечается, что уравнение $\xi^2 = 1 + \eta^3$ имеет бесконечно много решений.

S. Mrówka.

5445. Замечания об η_α-множествах. Гилман (Some remarks on η_α-sets. Gillman L.), Fundam. math., 1956, 43, № 1, 77—82 (англ.)

Упорядоченное множество S называется η_α-множеством, если для любых подмножеств A, $B \subset S$, $A < B$ мощности, меньшей чем $\aleph_\alpha$, существуют такие элементы x, y, $z \in S$, что $x < A < y < B < z$. Здесь пишется $A < B$ (или $x < A$), если $a < b$ (или $x < a$) для всех $a \in A$ и $s \in B$. Автор исследует свойства η_α-множеств.

Пусть $\aleph_{\mu_\alpha}$ означает наименьшее кардинальное число $\mathfrak{p}$, для которого существует η_α-множество мощности $\mathfrak{p}$. Положим $\nu_\alpha = \alpha$, если $\aleph_\alpha$ — регулярный алеф, и $\nu_\alpha = \alpha + 1$, если $\aleph_\alpha$ — иррегулярный алеф. Пусть H_α — лексикографически упорядоченное множество всех трансфинитных последовательностей $x = (x_\xi)_{\xi < \omega_\alpha}$ $(x_\xi = 0, 1)$, для которых можно найти такое порядковое число $\varphi(x) < \omega_\alpha$, что $x_{\varphi(x)} = 1$ и $x_\xi = 0$ для $\varphi(x) < \xi < \omega_\alpha$. В основном результате статьи утверждается, что если α и δ — порядковые числа, причем $\delta \geqslant \mu_\alpha$, $\delta > \nu_\alpha$, то любые множества с порядковыми типами, соответственно равными $\overline{H}_{\nu_\alpha}(\omega_\delta + 1)$ и $\overline{H}_{\nu_\alpha}(\omega_\delta + 1)^*$, будут неподобными η_α-множествами мощности $\aleph_\alpha$. Отсюда следует, что если $2^{\aleph_\beta} \neq \aleph_{\beta+1}$, то существуют неподобные $\eta_{\beta+1}$-множества мощности $2^{\aleph_\beta}$.

S. Mrówka

5446. О равенстве $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$. Попруженко (Sur l'égalité $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$. Poprużenko J.), Fundam. math., 1956, 43, № 2, 148—155 (франц.).

Приводятся некоторые теоремы, эквивалентные равенству $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$. Пусть ρ — отношение, частично упорядочивающее множество M мощности $\mathfrak{m}$, и пусть $\mathfrak{l}$ — такое кардинальное число, что $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{l} < \mathfrak{m}$. Рассматриваются следующие утверждения:

1. Для каждого множества E $(E \subset M)$ мощности $\leqslant \mathfrak{l}$ существует такой элемент $a \in M$, что $b \rho a$ для каждого $b \in E$.

2. Не существует такого кардинального числа $\mathfrak{t}$, что $\mathfrak{l} < \mathfrak{t} < \mathfrak{m}$.

3. Существует такая трансфинитная последовательность $\{a_\xi\}_{\xi < \omega_\lambda}$, вполне упорядоченная отношением ρ (т. е. $a_\xi \rho a_{\xi'}$, если $\xi < \xi'$), что для каждого $a \in M$ найдется a_ξ, для которого $a \rho a_\xi$.

4. Существует такое множество K $(K \subset M)$ мощности $\mathfrak{m}$, что для каждого $a \in M$ множество всех элементов $c \in K$, для которых $c \rho a$, будет мощности $\leqslant \mathfrak{l}$.

Доказывается, что логическая конъюнкция утверждений 1 и 2 эквивалентна логической конъюнкции утверждений 3 и 4. Беря в качестве M множество всех трансфинитных последовательностей типа ω_λ из порядковых чисел $< \omega_\lambda$ и определяя отношение ρ следующим образом: если $a = \{a_\xi\}_{\xi < \omega_\lambda}$ и $b = \{\beta_\xi\}_{\xi < \omega_\lambda}$, то $a \rho b$ тогда и только тогда, когда существует такое $\xi_0 < \omega_\lambda$, что $a_\xi < \beta_\xi$ для каждого $\xi \geqslant \xi_0$, автор выводит теорему:

Для выполнения равенства $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$ достаточно, а если ω_λ регулярно, то и необходимо выполнение следующих условий:

1) существует такая трансфинитная последовательность $\{s_\eta\}_{\eta < \omega_\lambda}$ трансфинитных последовательностей типа ω_λ, состоящих из порядковых чисел $< \omega_\lambda$, вполне упорядоченная отношением ρ (т. е. $s_\eta \rho s_{\eta'}$, если $\eta < \eta'$), что для каждой трансфинитной последовательности $s \in M$ найдется последовательность s_η, для которой $s \rho s_\eta$;

2) существует такое семейство F мощности $2^{\aleph_\lambda}$ последовательностей, принадлежащих M, что для каждой $s \in M$ множество всех $t \in M$, для которых $t \rho s$, будет мощности $\leqslant \aleph_\lambda$.

Дальнейшие результаты автора имеют подобный характер. Приведем следующий из них:

Для данной бесконечной последовательности $t = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ натуральных чисел обозначим через $\prod_t^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ последовательность $(n_{2i \cdot 1}, n_{2i \cdot 3}, \ldots, n_{2i(2k-1)}, \ldots)$. Тогда равенство $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое семейство Φ мощности $2^{\aleph_0}$ бесконечных последовательностей натуральных чисел, что для каждой бесконечной последовательности t_0 натуральных чисел множество всех $t \in \Phi$, для которых $\prod_t^i \neq \prod_{t_0}^i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, будет не более чем счетным.

S. Mrówka

5447. Теоремы о конфинальности в упорядоченных множествах. Багемил, Гилман (Some cofinality theorems on ordered sets. Bagemihl F., Gillman L.), Fundam. math., 1956, 43, № 2, 178—184 (англ.)

Пусть $\mathrm{cf}(\alpha)$ (α — порядковое число) означает наименьшее порядковое число η, для которого существует возрастающая последовательность $(\beta_\xi)_{\xi < \eta}$ порядковых чисел, сходящаяся к ω_α.

В реферируемой статье приводятся теоремы, характеризующие число $\mathrm{cf}(\alpha)$ в терминах мощности некоторых множеств.

Пусть $W(\alpha)$ — множество всех порядковых чисел, меньших чем α; $T(\alpha, \beta)$ — лексикографически упорядоченное множество всех таких последовательностей $t = (\tau_\xi)_{\xi < \omega_\beta}$, что $\tau_\xi \in W(\omega_\alpha)$, $\tau_\xi \neq 0$ по крайней мере для одного ξ, $\tau_\xi \neq 0$ для конечного числа ξ; $R(t)$ $(t \in T(\alpha, \beta))$ — множество всех элементов $T(\alpha, \beta)$, следующих за t.

Доказываются теоремы:

1. Пусть $\beta = \omega_\alpha \varphi + \rho$. Тогда для существования множества $M \subset W(\beta)$ мощности $\aleph_\alpha$ такого, что $\overline{M \cap W(\gamma)} < \aleph_\alpha$ для каждого $\gamma < \beta$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho = 0$, а φ было изолированным порядковым числом или для него $\mathrm{cf}(\varphi) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

2. Если $\beta \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$, то $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда существует такое множество $M \subset T(\alpha, \beta)$ мощности $\aleph_\alpha$, что $\overline{M \cap R(t)} < \aleph_\alpha$ для каждого $t \in T(\alpha, \beta)$.

3. Если $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ и $M \subset T(\alpha, \beta)$, $\overline{\overline{M}} = \aleph_\alpha$, то множество M содержит вполне упорядоченное подмножество мощности $\aleph_\alpha$; кроме того, $T(\alpha, \beta)$ содержит $2^{\aleph_\alpha}$ подмножеств, подобных M.

4. Пусть $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$ и M — упорядоченное множество. Предположим, что каждый интервал (невырожденный) множества M имеет мощность $\aleph_\alpha$ и содержит как подмножество типа $\omega_{\mathrm{cf}(\alpha)}$, так и подмножество типа $\omega^*_{\mathrm{cf}(\alpha)}$. Тогда существует множество E ($E \subset M$) мощности $\aleph_\alpha$, не содержащие ни подмножества типа ω_α, ни подмножества типа ω^*_α. S. Mrówka

5448. **О неповышении класса α недействительных функций Бэра. Коротышевская А. Ф.,** Уч. зап. Ульяновского гос. пед. ин-та, 1956, вып. 9, 201—214

Рассматриваются функции $f(x)$, отображающие топологическое пространство X в метрическое пространство Y. Функция $f(x)$ называется функцией класса α с точностью до ε, если для любого положительного числа $\delta > \varepsilon$ существует такая совокупность множеств $\mathfrak{M}$, имеющая элементами аддитивные множества класса α и мощность которой равна мощности базы окрестностей Y, что для всякой точки $\bar{x}$ пространства X существует содержащее точку $\bar{x}$ аддитивное множество α, принадлежащее $\mathfrak{M}$, образ которого лежит в сфере диаметра $\leqslant \delta$ (обобщение классификации Куратовского).

Доказываются необходимое и достаточное условия (не совпадающие) для того, чтобы предельная функция последовательности функций класса α с точностью до ε была функцией также класса α с точностью до ε.

Для случая, когда $\varepsilon = 0$, эти условия совпадают и для пространств Y со счетной базой переходят в условие референта (Fundam. math., 1931, 18 182—188).

Сходящаяся к $f(x)$ последовательность $\{f_n(x)\}$ называется монотонной, если для любого натурального n и любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\rho[f(x), f_{n+1}(x)] \leqslant \rho[f(x), f_n(x)].$$

Доказывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы предельная функция монотонной последовательности функций $f_n(x)$ класса α была функцией класса α.

Это условие в случае $\alpha = 0$ и компактности пространства X переходит в необходимое и достаточное условие П. С. Александрова (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 1, 213—215) непрерывности предела монотонной последовательности непрерывных функций, отображающих компактное топологическое пространство в метрическое. Б. М. Гагаев

5449. **Связь между бэровскими функциями и B-функциями. Коротышевская А. Ф.,** Уч. зап. Ульяновского гос. пед. ин-та, 1956, вып. 9, 215—221

Рассматривается соотношение между классификациями Бэра и Куратовского функций $f(x)$, дающих отображение топологического пространства X в метрическое пространство Y.

Известно (Хаусдорф Ф., Теория множеств, М., 1937, стр. 258), что функция $f(x)$, принадлежащая по классификации Бэра к классу α, принадлежит также к классу α классификации Куратовского, но обратное, вообще говоря, для произвольного пространства Y неверно.

Доказывается, что если Y — гильбертово пространство l_2, то функция $f(x)$ класса α классификации Куратовского, определяемая совокупностью действительных функций

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x), \ldots, y_n = f_n(x), \ldots,$$

удовлетворяющих условию $\sum_1^\infty \sup f_n^2(x) < \infty$, будет также класса α классификации Бэра. Б. М. Гагаев

5450. **Инвариантные свойства относительно простой сходимости. Мошан** (Propriétés invariantes par convergence simple. Motchane L.), J. math. pures et appl., 1955, 34, № 4, 337—394 (франц.)

Содержатся многочисленные результаты, основные из которых следующие.

В гл. I даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы некоторые свойства функций сохранялись при поточечной сходимости. Сначала дается необходимое и достаточное условие непрерывности предельной функции сходящейся последовательности функций (определенных в топологическом пространстве и принимающих значения в метрическом пространстве). Далее рассматриваются функции f, отображающие полное метрическое пространство E в сепарабельное метрическое пространство. Если f — функция, удовлетворяющая условию Бэра, P — совершенное множество в E и $\alpha \in P$, то $\omega^e(f, \alpha)_P$ означает нижний предел выражения $\rho(f(x), f(\alpha))$ при $x \to \alpha$ по такому максимальному резидуальному подмножеству $E_P \subset P$, что функция $f \mid E_P$ непрерывна на E_P.

Теорема. Для того чтобы предел сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций, удовлетворяющих условию Бэра (в узком смысле), принадлежал первому классу Бэра, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого совершенного множества P множество $\{x : \overline{\lim}_{n \to \infty} \omega^e(f_n, x)_P \geqslant \varepsilon\}$ было неплотным.

Функция f называется квазинепрерывной в точке x, если для каждого $\varepsilon > 0$ расстояние от x до внутренней части множества $\{y : \rho(f(y), f(x)) < \varepsilon\}$ равно нулю; функция, квазинепрерывная в каждой точке, называется квазинепрерывной.

Теорема. Предел сходящейся последовательности квазинепрерывных функций, удовлетворяющих условию Бэра, будет точечно-разрывной функцией.

Пусть теперь f — действительная измеримая функция, определенная на (a, b), и пусть E — множество точек аппроксимативной непрерывности f. Вводится колебание $O(f, \alpha)$ как нижний предел выражения $|f(x) - f(\alpha)|$ при $x \to \alpha$ по множеству E. Если $O(f, \alpha) = 0$, то f называется квазиаппроксимативно непрерывной; определения односторонней и двусторонней квазиаппроксимативной непрерывности аналогичны. Каждая функция первого класса Бэра, являющаяся двусторонне аппроксимативно непрерывной, обладает свойством Дарбу.

Подробно изучается класс $\mathfrak{M}$ квазиаппроксимативно непрерывных функций первого класса Бэра (ему принадлежат производные функции). Множество точек квазиаппроксимативной непрерывности этих функций либо пусто, либо положительной меры. Каждая функция из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию (S) Банаха на множестве положительной меры, будет квазинепрерывной.

В гл. II изучаются функции, непрерывные относительно каждой переменной в отдельности. Основной результат содержится в следующей теореме:

Теорема. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — полные сепарабельные метрические пространства и Y — сепарабельное метрическое пространство. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на $X_1 \times \ldots \times X_n$ и имеющая значения в Y, непрерывна относительно каждой

переменной в отдельности, то для каждого i существует множество $\mathscr{P}_i$ прямых, параллельных оси X_i, все точки которых будут точками непрерывности функции f (относительно совокупности всех переменных); проекция объединения прямых линий множества $\mathscr{P}_i$ на пространство $X_1\times\ldots\times X_{i-1}\times X_{i+1}\times\ldots\times X_n$ является резидуальным множеством в этом пространстве. Кроме того, f точечно разрывна на каждой поверхности $x_1=g(x_2,\ldots,x_n)$, если g — точечно разрывная функция; f также является квазинепрерывной функцией.

В гл. III проблема инвариантности некоторых свойств при поточечной сходимости рассматривается с более общей точки зрения топологии в произведении пространств. Пусть $\mathscr{F}$ — класс всех функций, отображающих некоторое множество E в хаусдорфово пространство K; через K^E обозначается пространство $\mathscr{F}$ с тихоновской топологией. Если F — подмножество в $\mathscr{F}$, то через $\hat{F}$ обозначается класс всех функций, являющихся пределами поточечно сходящихся последовательностей функций из F. Основной результат содержится в следующей теореме:

Теорема. Для того чтобы класс $\hat{F}$ с топологией произведения имел структуру полного сепарабельного метрического пространства, необходимо и достаточно выполнение следующего условия (Е): для $n=1, 2,\ldots$ существуют классы Φ_n подмножеств множества E со свойствами: а) найдется такое несчетное подмножество $\Omega\subset F_n$, что объединение всех множеств из Φ_n, пересекающих множество $\bigcup\Omega$, совпадает с E; б) колебание любой функции из F на каждом множестве из Φ_n не больше, чем $1/n$.

Если, кроме того, пространство K компактно, то условие (Е) необходимо и достаточно для компактности $\hat{F}$ в топологии произведения. Функции каждого семейства F, удовлетворяющего условию (Е), обладают следующим свойством: существует такое несчетное множество $D\subset E$, что каждая последовательность функций из F, сходящаяся на D, сходится на всем множестве E к функции из F.

Как применения приведенной теоремы автор получает условие Арцела для того, чтобы предел сходящейся последовательности непрерывных функций был непрерывен (квазиравномерная сходимость), необходимое и достаточное условие Б. М. Гагаева для того, чтобы предел сходящейся последовательности функций бэровского класса α принадлежал тому же классу (Fundam. math., 1932, 18, 182—187), а также некоторые результаты референта (Fundam. math., 1947, 34, 61—65). A. Alexiewicz

5451 Д. О свойствах некоторых δs-операций. Ступина И. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. гос. пед. ин-т, М., 1956

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

5452. К теореме Хара о единственности решения чебышевской задачи приближения. Мэрхьюбер (On Haar's theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions. Mairhuber John C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 609—615 (англ.)

На компактном множестве M евклидова пространства E_k рассматриваются действительные непрерывные функции $f_1(x),\ldots,f_n(x)$, обладающие следующим свойством D: для любых n различных точек $x_1,\ldots,x_n$ из M определитель $\left|f_i(x_k)\right|_{i,k=1}^n\neq 0$. В силу теоремы Хара, выполнение условия D необходимо и достаточно, чтобы для любой действительной непрерывной на M функции $f(x)$ существовал единственный полином $\sum_1^n a_k f_k(x)$ наилучшего приближения. Как известно, при $k\geqslant 2$ условие D не может быть выполнено, если M содержит внутренние точки.

Доказывается теорема: Компактное множество $M\subset E_k$, содержащее по крайней мере $n\geqslant 2$ точек, тогда и только тогда может служить областью определения действительных непрерывных функций $f_1(x),\ldots,f_n(x)$, обладающих свойством D, когда M гомеоморфно некоторому замкнутому множеству на окружности.

Доказательство опирается на теорему: Компактное множество $M\subset E_n$, обладающее тем свойством, что на любой гиперплоскости из E_n лежит не более чем n точек из M, гомеоморфно некоторому замкнутому множеству на окружности. С. И. Зуховицкий

5453. О некоторых взвешенных полиномах степени $\leqslant n$, наименее уклоняющихся от нуля в промежутке $(-\infty,+\infty)$, коэффициенты которых связаны одной линейной зависимостью. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 53—71

Рассматриваются многочлены $p(x)=\sum_{i=0}^n p_i x^i$ степени $\leqslant n$, коэффициенты которых связаны линейным соотношением $\omega(p)=\sum_{i=0}^n a_i p_i=1$, где $\{a_i\}$ — заданные вещественные числа; найдены условия того, чтобы произведение $e^{-x^2/2}p(x)$ наименее уклонялось от нуля в промежутке $(-\infty,+\infty)$; указан метод для нахождения точек наибольшего отклонения и величины L этого отклонения.

Примечание референта. После некоторых вычислений, пользуясь при этом некорректной записью $\int_{-\infty}^{\infty}dx$, автор находит очевидное неравенство $L\geqslant 0$; из его формул (18) и (23) легко вывести нетривиальную оценку снизу

$$L\geqslant 1:\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\left|\sum_{k=0}^n\omega(H_k)H_k(x)\right|dx,$$

где $\{H_k(x)\}$ — нормированные многочлены Чебышева—Эрмита, соответствующие весу e^{-x^2}.

Я. Л. Геронимус

5454. О некоторых достаточных условиях сходимости процесса Фурье—Чебышева. Геронимус Я. Л., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 6, 907—909

Рассматривается система $\{p_k(x)\}_0^\infty$ алгебраических многочленов, ортонормальных на промежутке $[-1, 1]$ относительно абсолютно непрерывного интегрального веса $\psi(x)$ (индекс k означает степень многочлена). Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k p_k(x) \qquad (1)$$

есть ряд Фурье—Чебышева функции $f(x)$ по системе $\{p_k(x)\}$, так что $a_k=\int_{-1}^1 f(x)\,p_k(x)\,d\psi(x)$. Даются достаточные условия равномерной сходимости этого ряда (во всем промежутке $[-1, 1]$ или только в его внутренней части $[a, b]$) к исходной функции $f(x)$ при различных предположениях относительно $f(x)$ и $\psi(x)$.

Приведем, как пример, теорему III: Ряд (1) функции $f(x)$ сходится к ней равномерно на $[-1, 1]$, если в этом промежутке $\psi'(x)\sqrt{1-x^2}\geqslant m>0$, $f(x)$

непрерывна и $\omega(\delta; f) = o(\sqrt{\delta})$ (здесь m — постоянная, $\omega(\delta; f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$).

В. Ф. Николаев

5455. О безусловной сходимости почти всюду. Ульянов П. Л., Матем. сб., 1956, **40**, № 1, 95—100

А. Н. Колмогоровым (Докл. АН СССР, 1934, **1**, № 6, 291—294) и референтом (Докл. АН СССР, 1934, **2**, № 4, 209—211) были указаны условия, которые достаточно наложить на функцию (а во второй работе и на вес ортогонализации) для того, чтобы ее ряд Фурье по ортогональным многочленам некоторого веса сходился почти всюду. Автор устанавливает, что в упомянутых условиях сходимость почти всюду сохранится при любой перестановке членов ряда (множество меры 0 точек расходимости может при этом изменяться).

И. П. Натансон

5456. Интегрируемость тригонометрических рядов. Сато (Integrability of trigonometrical series. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 4, 210—213 (англ.)

Доказывается, что ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, $c_n \to 0$ будет рядом Фурье функции из L_p, $p \geqslant 1$, если выполняется одно из следующих условий, в которых $m \to \infty$ по кратным некоторого натурального числа, $q \geqslant 2$ и $0 < \alpha < q/p - 1$:

$$1)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{n+m} - c_{n-m})^{*q}\, n^{q-2} = O(m^{\alpha}),$$

здесь $(c_{n+m} - c_{n-m})^* = d_n$, где $d_0 \geqslant d_1 \geqslant d_{-1} \geqslant \ldots$ и $\{d_n\}$ получается из $\{|c_{n+m} - c_{n-m}|\}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ перестановкой членов в порядке убывания;

$$2)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^r\, (|n|+1)^{-\mu r} = O(m^{\alpha r/q}),$$

где $q/(q-1) \leqslant r \leqslant q$, $\mu = 1/r + 1/q - 1$.

Показывается существенность предположения относительно α.

Если во 2-м условии взять $r = q/(q-1)$, то получится условие Боаса (Boas R. P., Math. Z., 1952, **55**, 183—186).

А. А. Конюшков

5457. Об интегрируемости функций, определенных тригонометрическими рядами. II. Хейвуд (On the integrability of functions defined by trigonometric series. II. Heywood P.), Quart. J. Math., 1955, **6**, № 21, 77—79 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 5720. Пусть $\lambda_n > 0$ при всех достаточно больших n, $\lambda_0/2 + \sum_1^{\infty} \lambda_n = 0$ и пусть $f(x) = \lambda_0/2 + \sum_1^{\infty} \lambda_n \cos nx$. Доказывается, что $x^{-1} f(x) \in L(0, \pi)$ в том и только том случае, если $\sum \lambda_n \ln n < \infty$. Указывается, что в случае, когда λ_n убывают при достаточно больших n, это утверждение доказано Боасом (Boas R. P, Quart. J. Math., 1952, **3**, 217—221).

А. А. Конюшков

5458. О признаке сходимости осцилляционного ряда. Фу Чжэн-сян (On the convergence criterion of an oscillating series. Fu Cheng Hsiang), Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, № 4, 203—207 (англ.).

Доказывается теорема: Ряд Фурье четной функции $\varphi(t)$ будет сходиться к нулю в точке $t = 0$, если выполняются условия:

$$\varphi(t) = o\left\{(\log 1/t)^{-\Lambda}\right\} \quad (t \to +0), \tag{1}$$

$$na_n > -K(\log n)^{\Lambda}, \tag{2}$$

где $0 \leqslant \Lambda < 1$, $K > 0$, a_n — коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$. Автор считает, что в этой теореме условие (1), по-видимому, можно заменить на условие

$$\int_0^t \varphi(u)\, du = o\left\{t\,(\log 1/t)^{-\Lambda}\right\} \quad (t \to +0),$$

тогда условие (2) будет наилучшим условием такого рода.

Имеются опечатки в формулах.

А. А. Шнейдер

5459. О суммируемости $|C, \alpha|$ рядов Фурье. Магарик В. А., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 183—196

Доказывается теорема: Ряд Фурье функции $f(x)$ будет суммироваться $|C, \alpha|$ $(\alpha \geqslant 0)$, если для всякого ξ существует совпадающая с $f(x)$ в окрестности точки ξ функция, у которой ряд Фурье и сопряженный ряд суммируются $|C, \alpha|$.

Автор считает, что в этой теореме предположение о суммируемости сопряженного ряда, по-видимому, излишне. Рандельс доказал эту теорему для случая $\alpha = 1$ без такого предположения. При $\alpha = 0$ получается теорема Винера об абсолютной сходимости рядов Фурье. Имеются опечатки в формулах.

А. А. Шнейдер

5460. Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций. Соколов И. Г., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 1, 23—26

Пусть $KW^{(r)}$ есть класс 2π-периодических функций, имеющих почти всюду производную порядка r, удовлетворяющую там, где она существует, неравенству $|f^{(r)}(x)| \leqslant K$. Имеет место неравенство

$$E_n[KW^{(r)}] \leqslant K\left[\frac{4}{\pi^2}\frac{\lg(n-1)}{n^r} + \frac{A}{n^r}\right] (n \geqslant 2), \tag{1}$$

причем в качестве верхней грани для константы A можно взять число 5,9 для r нечетного, большего единицы; 5,4 для r четного; 6,7 для $r = 1$.

Неравенство (1) было установлено А. Н. Колмогоровым (Ann. Math., 1935, **36**, 521), но при получении оценки $E_n[KW^{(r)}]$ по методу А. Н. Колмогорова константа A_r растет вместе с r к бесконечности.

С. Г. Селиванова

5461. Приближение суммами Фурье функций, имеющих производную, удовлетворяющую условию Липшица. Селиванова С. Г., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 5, 909—912

Пусть $W^{(r)}KH^{(\alpha)}$ $(r \geqslant 0, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — класс 2π-периодических функций, имеющих производную r-го порядка в смысле Вейля, удовлетворяющую условию Липшица порядка α с константой K. С. М. Никольский показал (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1945, **15**), что

$$\sup |f(x) - S_n(f; x)| = \frac{2^{\alpha+1}K}{\pi^2}\frac{\log n}{n^{r+\alpha}} \times \int_0^{\pi/2} v^{\alpha} \sin vdv + O(n^{-r-\alpha}),$$

где $S_n(f; x)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, а верхняя грань берется по функциям класса $W^{(r)}KH^{(\alpha)}$. В работе доказывается, что остаточный член этой формулы имеет оценку $O(n^{-r-\alpha}) < Cr/n^{r+\alpha}$ (C — абсолютная константа). Подобный результат для случая $\alpha = 0$, r — целое $(O(n^{-r}) < 5{,}9/n^r)$, был получен референтом (реф. 5460). Доказательство основано на специальном представлении ядра

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \cos(kt + r\pi/2)/k^r,$$

употреблявшемся С. М. Никольским (Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, **13**, № 6, 513). И. Г. Соколов

5462. **О сингулярном интеграле Валле-Пуссена. Бутцер** (On the singular integral of de la Vallée-Poussin. Butzer Paul L.), Arch. Math., 1956, **7**, № 4, 295—309 (англ.)

Изучаются аппроксимационные свойства интеграла

$$V_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt.$$

В качестве примеров приведем теоремы:

1) Если существует $f'(x_0)\neq\infty$, то $V_n(x_0)-f(x_0)=o(n^{-1/2})$.

2) Если существует $f''(x_0)\neq\infty$, то $2V_{2n}(x_0)-V_n(x_0)-f(x_0)=o(n^{-1})$.

Имеются ошибки: полагая

$$\omega^*(\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|,$$

автор использует неверное соотношение $\omega^*(\lambda\delta)\leqslant(\lambda+1)\omega^*(\delta)$. Та же ошибка совершается и по отношению к интегральному модулю гладкости. Поэтому часть результатов (теоремы 2.1 и 4.1) остается необоснованной. Теорема 3.2 (о сходимости $V_n(x)$ к $f(x)$ в L_p) принадлежит референту (Докл. АН СССР, 1938, **19**, № 5, 357—360, теорема 2). И. П. Натансон

5463. **О теории полугрупп и классах насыщения некоторых сингулярных интегралов. Бутцер** (Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières. Butzer Paul L.), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 20, 1473—1475 (франц.)

Приведена теорема о полугруппах линейных операций в банаховом пространстве, следствиями которой являются некоторые оценки разности между функцией, принадлежащей классу $L_p(-\pi,\pi)$ или $L_p(-\infty,+\infty)$, и образованными для нее интегралами Абеля—Пуассона, Гаусса—Вейерштрасса и Пуассона. Автор при этом придерживается особой терминологии, принятой Фаваром (Favard J., Colloque d'Analyse harmonique, Paris, 1949).

С. Ф. Пашковский

5464. **О фейеровских методах суммирования двойных рядов Фурье. Киприянов И. А.**, Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1956, **31**, 91—106

Рассматриваются матрицы $\mathfrak{M}=\|k_{\mu,\nu}^{(m,n)}\|$ ($m,n,\mu,\nu=0,1,2,\ldots$; $k_{\mu,\nu}^{(m,n)}=0$ при $\mu>m$ или $\nu>n$). Каждому двойному ряду $\Sigma a_{i,k}$ сопоставляется последовательность чисел

$$\sigma_{m,n}=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}k_{\mu,\nu}^{(m,n)}s_{\mu,\nu},$$

где $s_{\mu,\nu}=\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{k=0}^{\nu}a_{i,k}$.

Упомянутый ряд суммируется методом $\mathfrak{M}_\tau$ (где $\tau>1$ закреплено) к числу A, если

$$\lim\sigma_{m,n}=A\ (m,\ n\to\infty,\ n/\tau\leqslant m\leqslant n\tau).$$

Метод $\mathfrak{M}_\tau$ фейеровский (по терминологии С. М. Лозинского, см. Матем. сб., 1944, **14**, № 3, 175—268), если он равномерно суммирует ряд Фурье любой непрерывной функции $f(x,y)$, 2π-периодической по x и по y.

Устанавливается несколько критериев того, чтобы заданный метод был фейеровским. В виде примера укажем на следующий: Метод фейеровский тогда и только тогда, когда: а) при любых p и q

$$\lim\sum_{\mu=p}^{m}\sum_{\nu=q}^{n}k_{\mu,\nu}^{(m,n)}=1\ (m,\ n\to\infty,\ n/\tau\leqslant m\leqslant n\tau);$$

б) интеграл от модуля ядра метода ограничен при всех m и n ($n/\tau\leqslant m\leqslant n\tau$)

Для одномерного случая аналогичные результаты были установлены С. М. Лозинским в упомянутой выше работе. И. П. Натансон

5465. **Единственность кратных тригонометрических рядов. Чэн Минь-дэ, Чэнь Юн-хэ** (多重三角級數的唯一性. 程民德, 陳永和), 北京大學學報(自然科學), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1956, № 1, 5—14 (кит.; рез. англ.)

Положим

$$S_N(x)=\sum_{v=0}^{N}C_v(x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{v=0}^{N}\left(\sum_{n_1^2+\ldots+n_k^2=v}C_{n_1,\ldots,n_k}e^{i(n_1x_1+\ldots+n_kx_k)}\right).$$

Кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k=-\infty}^{\infty}C_{n_1,\ldots,n_k}e^{i(n_1x_1+\ldots+n_kx_k)}\qquad(1)$$

называют (C,α)-суммируемым при помощи сферических средних $S_N(x)$, если (C,α)-средние последовательности $\{S_N(x)\}$ имеют конечный предел. Говорят, что ряд (1) принадлежит к классу U, если ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty}|v^{-1}C_v(x)|$$

сходится равномерно.

Имеет место следующая теорема: Если ряд (1) принадлежит к классу U и для некоторого положительного α он (C,α)-суммируем всюду к нулю с помощью сферических средних, то ряд (1) тождественно равен нулю, т. е. $C_{n_1,\ldots,n_k}=0$ для всех $n_1,\ldots,n_k$. И. Е. Жак

5466. **Скорость сходимости интерполяционных процессов С. Н. Бернштейна и Эрмита — Фейера, построенных для некоторых классов узлов. Берман Д. Л.**, Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 6, 1087—1090

Приводятся оценки скорости сходимости интерполяционных процессов Эрмита—Фейера для ρ-нормальных матриц узлов интерполяции (Fejér L., Math. Ann., 1932, **106**, 1—55) и процессов С. Н. Бернштейна в случае, когда матрица обладает свойствами A и B, определенными автором в предыдущих заметках (Докл. АН СССР, 1948, **60**, № 3, 333—336; 1949, **64**, № 1, 5—8). Некоторые из этих оценок пригодны, между прочим, тогда, когда матрица узлов составлена из корней полиномов Якоби.

Опечатки: На стр. 1088^1 (строка 1 сверху) должно быть $\varphi(h)>0$ вместо $\varphi(h)\geqslant 0$; на стр. 1088^6_5, 1089^3 — $-1\leqslant\alpha_n,\ \beta_n\leqslant q<0$ вместо $-1\leqslant\alpha_n,\ \beta_n<0$.

С. Ф. Пашковский

5467. **Скорость сходимости интерполяционных процессов С. Н. Бернштейна и Эрмита—Фейера, построенных для некоторых классов узлов. Берман Д. Л.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **2**, М., АН СССР, 1956, 121—122

5468. Почти периодичность в смысле Рисса. А п т о н (Riesz almost periodicity. U p t o n C. J. F.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 4, 407—426 (англ.)

Рассматривается обобщенная вариация по Риссу. Отрезок $[a, b]$, на котором определена функция $f(x)$, делится системой (K) точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$. При $p \geqslant 1$ величина

$$R_p(f, [a, b]) = \sup_{(K)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|^p}{(x_i - x_{i-1})^{p-1}} \right\}^{1/p}$$

называется вариацией Рисса для $f(x)$ на $[a, b]$. Функция $f(x)$ называется R^p-непрерывной на $[a, b]$, если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ и какова бы ни была система попарно непересекающихся интервалов (α_i, β_i), лежащих в $[a, b]$, имеет место неравенство

$$\sum_i \frac{|f(\beta_i) - f(\alpha_i)|^p}{(\beta_i - \alpha_i)^{p-1}} < \varepsilon^p,$$

как только $\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ достаточно мало. Рассматриваются иные варианты данных определений.

Доказываются теоремы:

1. При $p > 1$ следующие условия равносильны: а) $f(x)$ является интегралом от функции класса $L_p[a, b]$; б) $f(x)$ R^p-непрерывна на $[a, b]$; в) $R_p(f, [a, b]) < \infty$.

2. Если $f(x) \in L[a, b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, то

$$R_p(F, [a, b]) = \left\{ \int_a^b |f|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

3. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f(x)$ была R^p-непрерывной $(p \geqslant 1)$, состоит в том, что $f(x)$ измерима и $R_p\{f(x+h) - f(x); [a, b-h]\} \to 0$ при $h \to +0$.

Вводится метрика: $D_{R^p}\{F(x)\} = \sup_x |F(x)| + \sup_x R_p\{F(t);\ [x, x+1]\} = D_U\{F(x)\} + D_{S^p}\{F'(x)\}$. $(D_{R^p} \leqslant D_{R^q}$, если $p > q)$.

Функция $f(x)$ называется R^p-почти периодической (R^p п. п.), если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество почти периодов $\{\tau\}$ таких, что $D_{R^p}\{f(x+\tau) - f(x)\} < \varepsilon$.

Доказываются следующие теоремы:

4. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $f(x)$ была R^p п. п., состоит в том, что $f(x)$ ограничена и является неопределенным интегралом от S^p п. п. функции.

5. Если $T(\tau) = D_{R^p}\{F(x+\tau) - F(x)\} < \infty$, то $T(\tau) = D_U\{T(x+\tau) - T(x)\}$ и необходимое и достаточное условие для того, чтобы $F(x)$ была R^p п. п., состоит в том, что $T(x)$ должна быть U п. п. (U п. п. означает почти периодичность по Бору).

6. Пространство R^p п. п. функций $(p \geqslant 1)$ (с метрикой D_{R^p}) полное.

7. Если $f(x)$ является R^p п. п. $(p \geqslant 1)$, то существует последовательность тригонометрических полиномов, которая сходится к $f(x)$ в смысле метрики D_{R^p}.

8. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы $F(x)$ была R^p п. п. $(p \geqslant 1)$, состоит в том, что: а) $F(x)$ является S п. п. и б) $D_{R^p}\{F(x+h) - F(x)\} \to 0$ при $h \to 0$.

В заключение рассматриваются без выводов свойства метрики D_γ (Love E. R., J. London Math. Soc., 1951, 26, 14—25), относящейся к абсолютно непрерывным почти периодическим функциям (V п. п.). Отмечается следующая зависимость классов: $U_{\text{п. п.}} \supset V^p_{\text{п. п.}} \supset R_{\text{п. п.}} \supset R^p_{\text{п. п.}}$. В свою очередь эти классы подразделяются на подклассы с индексами, указывающими порядок наивысшей производной, которой обладает данная почти периодическая функция.

А. С. Кованько

5469. Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа. I. Э з р о х и И. А., Матем. сб., 1956, 38, № 4, 389—416

Е. Я. Ремез (Тр. Ин-та матем. АН УССР, 1939, № 3, 21—62; 1940, № 4, 47—82) предложил общий метод построения остаточных членов линейных формул для приближения функций одного аргумента, если эти формулы точны, когда приближаемая функция есть многочлен заданной степени. Идея метода состоит в том, что упомянутые остаточные члены, будучи линейными функционалами (или операторами) от приближаемых функций, обращающимися в нуль на многочленах степени n, представимы в форме

$$\int_a^b f^{(n+1)}(x)\, dg(x),$$

где $g(x)$ определенным образом выражается через элементы рассматриваемой формулы.

В работе метод Ремеза переносится на многомерный случай, причем изучаются линейные формулы приближения функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ точные, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен заданной степени n_i по каждому аргументу x_i в отдельности. Каждый функционал $V(f)$, аннулирующийся на таких $f(x_1, \ldots, x_n)$, представим в форме

$$V(f) = V_1(f) + \ldots + V_n(f),$$

где $V_i(f)$ есть функционал, аннулирующийся на функциях, являющихся многочленами степени n_i от x_i. Указанное разложение и позволяет дать интегральное представление $V(f)$. Полученные общие результаты иллюстрируются на примерах некоторых интерполяционных и квадратурных формул.

И. П. Натансон

5470. Общие функционально-аналитические методы установления алгорифма для построения остаточных членов линейных многомерных формул приближения. Э з р о х и И. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 112—113

5471. Функциональные пространства и аппроксимации. С а р д (Function spaces and approximation. S a r d A r t h u r), Proc. Sympos. Appl. Math., 6. New York—Toronto—London, 1956, 177—185 (англ.)

Пусть $C_n = \{x(s)\}$ — пространство всех функций на $[\alpha_1, \alpha_2]$ с непрерывными производными порядка n и нормой, равной наибольшему из максимумов абсолютных величин функции и ее производных, Е. Я. Ремез (Тр. Ин-та матем. АН УССР, 1939, 8, 21—62) установил:

Если $R(x)$ — остаточный член формулы приближения, линейной на C_n и точной для многочленов степени не выше $n-1$, то

$$R(x) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^{(n)}(s)\, d\rho(s).$$

Если же, сверх того, $R(x)$ линеен на C_{n-1}, то

$$R(x)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^{(n)}(s)\,f(s)\,ds.$$

При этом устанавливается метод определения функций $\rho(s)$ и $f(s)$.

Автор (Duke Math. J., 1948, 15, 333—345; Acta math., 1951, 84, 319—346) установил эти же результаты более простым способом.

В первой части реферируемой работы эти результаты приводятся вновь и применяются для отыскания отстаточного члена $R^*(x)$ формулы численного дифференцирования:

$$x'(1/4)=-x(-1)/4-x(0)/2+3x(1)/4-R^*(x).$$

Форма подобных результатов и методы их установления для функций многих переменных связаны со способом обобщения пространств C_n: Т. Г. Эзрохи (Доповіді АН УРСР, 1952, 3, 174—179; РЖМат, 1956, 3340), Сард (Sard A., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 732—741; РЖМат, 1955, 5935), С. М. Никольский (Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, 181—196), И. А. Эзрохи (реф. 5469).

Во второй части реферируемой работы, посвященной функциям многих переменных, помещена часть результатов автора из упомянутых выше работ с некоторыми уточнениями. В качестве примера приводится форма остаточного члена $R^{**}(x)$ кубатурной формулы:

$$\iint_{s^2+t^2\leqslant 1} x(s,t)\,ds\,dt=\frac{\pi}{8}\left\{8x(0,0)+\frac{\partial^2 x(0,0)}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 x(0,0)}{\partial t^2}\right\}-R^{**}(x).$$

И. А. Эзрохи

5472. **Добавление к теоремам Хаусдорфа о моментных последовательностях. Натансон И. П.,** Тр. 3-го Всес матем. съезда, 1. М., АН СССР, 1956, 93—94

Указаны условия, достаточные для того, чтобы вещественная числовая последовательность $\{\mu_k\}_m^\infty$ допускала представление

$$\int_0^1 x^k dg(x)=\mu_k,\quad k=m,\ m+1,\ldots,$$

где $g(x)$ — функция ограниченной вариации; рассмотрены также условия, при которых $g(x)$ — возрастающая функция или абсолютно непрерывная функция, причем $g'(x)\in L_p$, $p>1$ или $|g'(x)|\leqslant M$. При $m=0$ получаются результаты Хаусдорфа. Я. Л. Геронимус

5473 К. **Тригонометрические ряды. Ганя** (Serii trigonometrice. Ganea Tudor. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 148 p., ill., 4.50 lei), Bul. bibliogr., 1956, А, № 19, 733 (рум.)

См. также: 5572 К, 5629, 5723, 5727, 5728, 5736 К, 5739

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5474. **О некоторых неравенствах. Зморович В. А.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 92—107

Изложены некоторые исследования автора, относящиеся к теории неравенств. Получены два интегральных неравенства, представляющие собой уточнения и обобщения двух аналогичных неравенств, использованных в своих работах соответственно М. А. Лаврентьевым и Г. М. Голузиным. Доказаны две следующие теоремы.

Теорема 4. Пусть дан многочлен $P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ ($a_0\neq 0$, $a_n\neq 0$; $n>1$) с комплексными или вещественными коэффициентами и пусть

$$R\geqslant\max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{1/n},\left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{1/(n-1)},\ldots,\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}.$$

Тогда выполняется равенство

$$n\left(\frac{R}{k}\right)\leqslant\frac{\ln\left[(n+1)\left|\frac{a_n}{a_0}\right|R^n\right]}{\ln k},$$

где $k>1$, а $n\left(\frac{R}{k}\right)$ означает число корней $P(z)$ в $|z|\leqslant R/k$.

Теорема 5. Если для $P(z)$ положим $\sigma_k=\left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k=1,\ldots,n$, то в $|z|>(1+\sigma_1+\ldots+\sigma_n)^{-\frac{1}{n-k}}$, $k=1,\ldots,n-1$, лежит по крайней мере, k корней $P(z)$.

Эти теоремы уточняют аналогичные результаты Сингха (РЖМат, 1955, 168), полученные им при дополнительных условиях относительно коэффициентов $P(z)$.

Ю. Е. Аленицын

5475. **Некоторые свойства функций, определенных рядами Тейлора и Дирихле. Караджич** (Quelques proprietés des fonctions définies par la série de Taylor ou de Dirichlet. Karadzić Lazar. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser.-Mat. i fiz., 1956, № 8, 12 p., ill.) (франц.; рез. сербо-хорв.)

Доказываются две теоремы.

1. Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)c}=1,$$

$g=\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$, $\varphi=\lim_{n\to\infty}(\arg a_{n-1}-\arg a_n)$, тогда ряд

$$f(s)=\sum_{n=1}^\infty a_ne^{-\lambda_n s}\quad(s=x+iy)$$

в интервале $0<\operatorname{Im}s<\frac{\pi-\varphi}{g}$, расположенном над абсциссой сходимости $x=c$, сходится равномерно, если $|a_n|e^{-\lambda_nc}=o(1)$ $(n\to\infty)$, и равномерно ограничен, если $|a_n|e^{-\lambda_nc}=O(1)$ $(n\to\infty)$. Точка $s=c+\frac{2\pi-\varphi}{g}i$ есть особая точка.

2. Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\alpha$ $(|\alpha|=1)$, тогда ряд $\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ во всех точках границы круга сходимости, за исключением точек α и β ($|\beta|=1$, $\arg\beta=\pi-\arg\alpha^{-1}$), сходится равномерно, если $a_n=o(1)$ $(n\to\infty)$, и равномерно ограничен, если $a_n=O(1)$ $(n\to\infty)$. Точка α есть особая точка.

Н. А. Давыдов

5476. **Об абсолютной постоянной, связанной с «главными модулями» Коши для ограниченных степен-**

ных рядов. **Винтнер** (On an absolute constant pertaining to Cauchy's «Principal moduli» in bounded power series. Wintner Aurel), Math. scand., 1956, 4, № 1, 108—112 (англ.)

Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ регулярна и $|f(z)|<1$ в $|z|<1$. Доказывается, что для $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|z^n$, $|z|<1$, имеем $\sup_{|z|<1}|z/g(z)|>1/3$ и что абсолютная постоянная 1/3 является наилучшей. Этот вопрос возникает в связи с «главными модулями» Коши (Cauchy A., Euvres, 1896, sér. 1, 9, 75—81).

Ю. Е. Аленицын

5477. **Об обобщении рядов Ламберта. Эпштейн** (O generalizare a seriilor Lambert. Epstein M.), Bul. Inst. politehn. Iași, 1956, 2, № 1—2, 13—19 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в круге $|z|<R$ $(R>1)$, кроме точки $z=1$, где она имеет простой полюс, и, кроме того, $f(0)=0$. Обозначим через e_p первообразный корень порядка p из единицы и определим последовательность функций $f_p(z)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(e_p^{k-1}z\right)$. Для обобщенных рядов Ламберта $\sum_1^{\infty} a_n f_n(z)$ доказываются следующие утверждения: 1) если ряд $\sum_1^{\infty}|a_n|$ сходится, то обобщенный ряд Ламберта сходится абсолютно в круге $|z|<R$, кроме точек единичной окружности; 2) если ряд $\sum_1^{\infty} a_n$ расходится, то область сходимости обобщенного ряда Ламберта совпадает с областью сходимости ряда $\sum_1^{\infty} a_n z^n$; 3) для функции $F(z)=\sum_1^{\infty} f_p(z)$ $(f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, b_n-действительны) единичная окружность есть естественная граница.

П. К. Суетин

5478. **Некоторые теоремы о функциональных рядах. Караджич** (Quelques théorèmes sur les séries de fonctions. Karadžic Lazar), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, 7, № 3—4, 165—170 (франц.; рез. серб.)

Исходя из геометрических соображений, автор формулирует и применяет следующее предложение:

Если

$$\overline{\lim}\, e^{\sum_{m=1}^{n}|u_m(x)|}\,\mathrm{th}\,|v_n(x)|\leqq M,\ x\in[a,b],$$

где M не зависит от x, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-e^{-|u_{n+1}(x)|}\right)\mathrm{th}\,|v_n(x)|$$

сходится равномерно в $[a, b]$.

Примечание референта. Сходимость можно видеть непосредственно, приняв во внимание, что при постоянном $x\in[a,b]$, $\varepsilon>0$ и при достаточно большом n имеем

$$\left(1-e^{-|u_{n+1}(x)|}\right)\mathrm{th}\,|v_n(x)|\leqq$$

$$\leqq(M+\varepsilon)\left(e^{-\sum_{m=1}^{n}|u_m(x)|}-e^{-\sum_{m=1}^{n+1}|u_m(x)|}\right).$$

Однако условия автора не обеспечивают равномерной сходимости, в чем можно убедиться, выбрав неравномерно сходящийся ряд $\sum_{m=0}^{\infty}|u_m(x)|$ с равномерно ограниченными частичными суммами и определив $v_n(x)$

$$\mathrm{th}\,|v_n(x)|=e^{-\sum_{m=1}^{n}|u_m(x)|}.$$

Я. Тагамлицкий

5479. **О некоторых бесконечных рядах для двоякопериодических функций. Ананда-Рау** (On certain infinite series for doubly periodic functions. Ananda-Rau K.), J. Indian Math. Soc., 1955, 19, № 3—4, 95—103 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $\alpha=\beta+i\gamma$, $h=a+ib$, $\gamma>0$, $|a|<2\gamma$; $R(t)$ — рациональная функция, для которой $\pm i$ не являются полюсами;

$$V_n(z)=\mathrm{cosec}\,(z+n\alpha)\,R\,[\cot(z+n\alpha)].$$

Тогда ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{nh}V_n(z)$ сходится для всех значений z, отличных от полюсов $V_n(z)$, и является квазипериодической функцией $F(z)$ с периодами π и α и соответствующими множителями -1 и e^{-h}. Полюсы $F(z)$ могут быть лишь в полюсах функций $V_n(z)$, причем главная часть $F(z)$ в окрестности полюса есть сумма главных частей тех членов $e^{nh}V_n(z)$, которые имеют этот полюс.

Пример:

$$\psi(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(\pi u/2\omega+n\pi\tau)}{\sin 3(\pi u/2\omega+n\pi\tau)},\quad \tau=\frac{\omega'}{\omega}.$$

Тогда

$$\psi(u+2\omega)=\psi(u),\ \psi(u+2\omega')=-\Psi(u).$$

Г. П. Боев

5480. **О некоторых ортогональных полиномах в комплексной области. Обрешков** (Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област. Обрéшков Н.), Изв. Матем. ин-т Българ. АН, 1956, 2, № 1, 45—68 (болг. рез. русск., франц.)

Рассматривается система полиномов $\{P_n(z)\}$, ортогональных в комплексной плоскости, т. е. удовлетворяющих равенствам

$$\int_C F(z)\,P_n(z)\,P_m(z)\,dz=0,\quad n\neq m,$$

где $F(z)$ — аналитическая функция в замкнутой области B, ограниченной контуром C; автор детально изучает случай $F(z)=z^m e^{1/z}$ (случай $m=0$ был ранее рассмотрен автором (РЖМат, 1956, 2926)). Полиномы, называемые им обобщенными полиномами Бесселя, выражаются формулой

$$P_n(z)=z^{-m}e^{-1/z}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^{m+2n}e^{1/z}\right),$$

аналогичной формуле Родрига, и являются частными решениями дифференциального уравнения

$$z^2y''+[(m+2)z-1]y'-n(n+m+1)y=0,$$
$$m\neq-2,\ -4,\ -6,\ldots \qquad (1)$$

Любой функции $f(z)$, регулярной в окрестности нулевой точки, соответствует разложение Фурье-Чебышева

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_kP_k(z),$$

$$\int_C z^m e^{1/z}f(z)\,P_n(z)\,dz=c_n\int_C z^m e^{1/z}P_n^2(z)\,dz,$$

круг сходимости которого проходит через ближайшую к началу особенность функции $f(z)$. Автор рассматривает также разложение по функциям $Q_n(z)$, являющимся вторым частным решением (1).

Я. Л. Геронимус

5481. Обобщения многочленов Лежандра и некоторые их применения. Бадалян Г. В., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 1956, 9, № 1, 3—22

Статья является продолжением ранее опубликованной автором (РЖМат, 1957, 3938). Здесь рассматриваются приложения квазимногочленов к ряду других вопросов. Так, рассмотрены некоторые экстремальные задачи для целых функций конечной степени (из класса w_σ), задача о квазимногочлене, наименее уклоняющемся от нуля в смысле Чебышева на отрезке [0, 1] (т. е. отыскание квазимногочлена

$$Q_n(x) = \omega_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_k(x),$$

осуществляющего $\inf_{Q_n} \{\sup_{x\in[0,\,1]} |Q_n(x)|\}$) и др.

Б. А. Рымаренко

5482. О некоторых функциях, ассоциированных с базисом полиномов, и их использовании для определения базисного ряда и для изучения эффективности таких базисов. I. Определение базисного ряда. II. Эффективность базиса полиномов. Фальга (Sur certaines fonctions associées aux bases de polynômes et leur utilisation à la définition des séries de base et à l'étude de l'effectivité de ces bases. I. La définition des séries de base. II. L'effectivité des bases de polynomes. Falgas Maurice), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 12, 1563—1566 (франц.)

Согласно Уиттекеру (Whittaker J. M., Sur les séries de base de polynomes, Paris, 1949), система полиномов $\{p_n(z)\}$ образует базис, если любую степень z^n можно единственным способом представить в виде суммы $z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{nk} p_k(z)$, где $\pi_{n,k} = 0$, начиная с некоторого k, зависящего от n. Формально получаемый ряд для аналитической в круге $|z| < R$ функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k p_k(z)$, $A_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi_{nk}$, называется базисным рядом. Базис называется эффективным в круге $|z| < R$, если базисный ряд для всякой аналитической в этом круге функции равномерно стремится к ней во всякой замкнутой части круга. Необходимые и достаточные условия эффективности базиса в круге были получены Кэнноном. Хассаб Эльнаби распространил эти исследования на случай конечной области, ограниченной простой аналитической кривой, заменив степенные разложения в круге разложениями в ряды по полиномам Фабера для рассматриваемой области. Дальнейшие обобщения результатов Кэннона получены в реферируемой работе. Автор рассматривает такие ограниченные связные множества E (не обязательно замкнутые), дополнение которых также связно, и называет функцию аналитической на E, если она аналитическая в некоторой области, содержащей E. Исследуются условия, при которых базисный ряд может быть составлен для любой функции, аналитической на E, и представляет эту функцию. Таким образом, изучается эффективность базиса не для класса функций, аналитических в какой нибудь фиксированной области, а для класса функций, область аналитичности которых содержит множество E и при этом может меняться от функции к функции.

Во второй части автор уточняет понятие эффективности базиса, именно различает простую, равномерную и абсолютную эффективность. В первом случае базисный ряд должен сходиться в каждой точке множества E, а во втором — равномерно сходиться на всяком замкнутом множестве $H \subset E$, в третьем должен абсолютно сходиться; таким образом эффективность в смысле Кэннона тождественна равномерной эффективности. Указывается довольно сложный способ построения базисного ряда для всякой функции, аналитической на E, и доказывается, что для такого построения необходимо и достаточно существование биортогональной с $\{p_n(z)\}$ системы функций $\{\varphi_m(z)\}$, аналитических в CE; это является обобщением результата А. И. Маркушевича для круга. Приведем критерий простой эффективности.

Теорема. Для простой эффективности базиса необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

A. Всякая функция $\varphi_m(z)$ аналитическая в CE;

B. Для любых $x \in CE$, $z \in E$ ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^q}{dx^q} \varphi_m(x)\, p_m(z), \quad q = 0,\ 1,\ldots \text{ сходятся;}$$

C. По любым $x \in CE$, $z \in E$ можно найти два таких положительных числа δ и M, что

$$\frac{\delta^q}{q!} \left| \sum_{m=m'}^{m''} \frac{d^q}{dx^q} \varphi_m(x)\, p_m(z) \right| \leqslant M, \quad q = 0,\ 1,\ldots$$

Для равномерной эффективности в условии B простая сходимость заменяется равномерной по z (при любом фиксированном $x \in CE$) на любом замкнутом множестве $H \subset E$, в условии же C числа δ и M определяются по $x \in CE$ и H, и неравенство выполняется для $x \in CE$ и всех $z \in H$.

Для абсолютной эффективности в условии B ряд должен абсолютно и равномерно сходиться для фиксированного $z \in E$ и $|x - x_0| < \delta'$, где δ' определяется по z и $x_0 \in CE$.

М. Г. Хапланов

5483. Однолистные функции с действительными коэффициентами. Рейк (Schlicht functions with real coefficients. Reich Edgar), Duke Math. J., 1956, 23, № 3, 421—427 (англ.)

Рассматриваются два класса регулярных и однолистных в $|z| < 1$ функций с вещественными коэффициентами: 1-й класс функций $S_T : w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, 2-й класс функций $S(\alpha) : w = h(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$; $0 < a_1 < \alpha$; $|h(z)| < 1$.

Пусть $h(z, t, \sigma)$ определяется уравнением И. Е. Базилевича

$$\frac{dh(z,\,t)}{dt} = \frac{h(z,\,t)^3 - h(z,\,t)}{1 - 2\sigma(t)\, h(z,\,t) + h(z,\,t^2)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где функция $\sigma(t)$ кусочно-непрерывная на $[0, T]$ и $|\sigma(t)| < 1$ (Матем. сб. 1937, 44). Некоторой точке w, $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$, сопоставляется точка $q(w) = x(w) + iy(w) = i \ln \frac{1+w}{1-w} + \frac{\pi}{2}$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда уравнение $q(z, t, \sigma) = i \ln \frac{1+h}{1-h} + \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant t \leqslant T$, определит кривую $C : y = A(x)$ в полосе: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ с начальной точкой $x_0 + iA(x_0) = i \ln \frac{1+z}{1-z} + \frac{\pi}{2}$.

Доказывается теорема: I. Если функция $\sigma(t)$, $|\sigma(t)| \leqslant 1$ кусочно-непрерывная на $[0, T]$, то функция

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2} \exp\left\{ i \int_0^t [1 - \sigma(\tau)]\, d_\tau q(z, \tau; \sigma) \right\}$$

принадлежит к S_T.

Пусть $C(z_0)$, $\operatorname{Re} z_0 \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$ — класс кривых $y = A(x)$, $0 < a \leqslant x \leqslant b < \frac{\pi}{2}$, обладающих следующими свойствами: 1) $A(x)$ — произвольная непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция,

2) $a + iA(a) = i \ln \frac{1+z_0}{1-z_0} + \frac{\pi}{2}$, 3) $k(x) = \operatorname{Re} \operatorname{tg} q + A'(x) \operatorname{Im} \operatorname{tg} q$ и $|k(x)| \leqslant 1$ в точках непрерывности $A'(x)$. Тогда имеет место утверждение:

II. Множество комплексных чисел

$$\frac{z_0}{(1+z_0)^2} \exp\left\{ \int_a^b [1 - k(x)]\, [i - A'(x)]\, dx \right\},$$

получаемых при вариации C в классе $C(z_0)$, определяет область изменения $f(z_0)$, где $f(z) \in S_T$.

Далее доказывается:

III. Существует $f(z) \in S_T$ такая, что $|f(z_0)| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta(1 - |z_0|)$, где $\delta(u) = o(1)$.

IV. $m(z_0) = \inf\limits_{f \in S_T} |f(z_0)|$ достигает максимума во внутренней точке круга $|z| < 1$.

Для класса $S(\alpha)$ указывается область изменения $h(z_0)$ для всех $h \in S(\alpha)$. Имеются и другие результаты.

Б. Н. Рахманов

5484. Коэффициенты функций, близких к выпуклым. Рид (The coefficients of close-to-convex functions. Reade Maxwell O.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 3, 459—462 (англ.)

Рассматриваются два класса функций:

1. Класс K_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, регулярных в $|z| < 1$ и удовлетворяющих в $|z| < 1$ условиям:

а) $f'(z) \neq 0$, б) неравенство

$$\int_{\theta_2}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left[1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] d\theta > -\pi\alpha, \quad z = re^{i\theta},$$

имеет место для любых θ_1, θ_2, r; $\theta_1 < \theta_2$; $0 \leqslant r < 1$.

2. Класс K_α^* $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ функций $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, регулярных в $|z| < 1$, удовлетворяющих в $|z| < 1$ условиям:

а) $F'(0) \neq 0$; б) $F(z) = 0$ только при $z = 0$; в) неравенство

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left[z \frac{F'(z)}{F(z)} \right] d\theta \geqslant -\pi\alpha, \quad z = re^{i\theta},$$

имеет место для любых θ_1, θ_2, r; $\theta_1 < \theta_2$; $0 \leqslant r < 1$.

Для этих классов функций доказано:

1. Если $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in K_\alpha$, тогда $f(z)$ однолистна и

$$|a_n| \leqslant [1 + \alpha(n-1)]\, |a_1|, \quad n = 2, 3, \ldots$$

2. Если $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \in K_\alpha^*$, тогда

$$|b_n| \leqslant n\, [1 + \alpha(n-1)]\, |b_1|, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Вопрос о знаке равенства в обеих оценках решен не полностью. Ю. Д. Максимов

5485. О результате Кьоу. Дженкинс (On a result of Keogh. Jenkins James A.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 391—399 (англ.)

Пусть $f(z)$ регулярна, однолистна и ограничена в $|z| < 1$ и $l(\rho)$ — длина образа отрезка $[0, \rho]$. Кьоу (РЖМат, 1955, 4985) показал, что в оценке $l(\rho) = o\left[\left(\ln \frac{1}{1-\rho}\right)^{1/2}\right]$, $\rho \to 1$, степень $\frac{1}{2}$ нельзя понизить. Автор уточняет этот результат следующим образом: пусть функция $g(\sigma)$ при $\sigma \geqslant 0$ непрерывная убывающая, $\lim_{\sigma \to \infty} g(\sigma) = 0$ и обладает непрерывной производной, за исключением, быть может, множества точек, не имеющего предельной точки на конечном расстоянии, причем $\lim_{\sigma \to \infty} g'(\sigma) = 0$. Пусть

$$\Phi(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{dx}{g(x) - g(x + 2\pi)}.$$

Тогда существует $f(z)$, для которой $\lim_{\rho \to 1} l(\rho)/\sigma \geqslant 1$, где $\sigma = \sigma(\rho)$ таково, что $\Phi(\sigma) \sim \frac{1}{\Gamma} \ln \frac{1}{1-\rho}$ при $\rho \to 1$. (В соответствующей теореме 2 статьи пропущено условие $\lim_{\sigma \to \infty} g'(\sigma) = 0$. *Реф*). Указанному основному результату предшествуют вспомогательные предложения о конформных и квазиконформных отображениях областей типа полос. Доказывая лемму 2 методом экстремальной длины, автор не указывает, что эта лемма очевидным образом содержится в известных общих свойствах квазиконформных отображений (см., например, РЖМат, 1956, 3796К И. Н. Песин

5486. Об оценке модуля производной в классе однолистных функций. Ерышов С. П., Уч. Зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 83—89

Автор, видимо, не знаком с работой Робинсона (Robinson R. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **52**, 426—449), в которой получены примерно тем же методом (метод Лёвнера) все оценки, приводимые в реферируемой статье (см. также работу референта, РЖМат, 1956, 8739). Н. А. Лебедев

5487. Об оценке модуля производной при однолистном конформном отображении области $|\zeta| > 1$ на область $|\omega| > 1$ с разрезом. Ерышов С. П., Уч. зап. Саратовск. пед. ин-та, 1956, вып. 23, 91—95

Автор, видимо, не знаком с работой Робинсона (Robinson R. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, **52**, 426—449). В работе Робинсона получены оценки, из которых непосредственно следуют все результаты автора, кроме следующего:

Пусть функция $w = \varphi(\zeta) = \alpha\zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots$, однолистная и регулярная в $1 < |\zeta| \leqslant \infty$, отображает $|\zeta| > 1$ на область, лежащую в $|w| > 1$. Тогда

$$|\varphi'(\zeta)| \geqslant \begin{cases} \dfrac{(3 + 2\sqrt{2})\,(|\zeta| - 1)}{|\zeta|\,(|\zeta| + 1)} & \text{при } 1 < |\zeta| \leqslant 1 + \sqrt{2}, \\ 1 & \text{при } |\zeta| \geqslant 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Н. А. Лебедев

5488. Конформное отображение ограниченных областей. Кеннеди (Conformal mapping of bounded domains. Kennedy P. B.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 332—336 (англ.)

Пусть круг $\gamma: |z|<1$ отображается взаимно однозначно и конформно на ограниченную область D и пусть $l(r)$, $0<r<1$, — длина кривой в D, являющейся образом отрезка $(0, r)$. Доказывается теорема: Пусть $\mu(r)$ $(0<r<1)$ — некоторая положительная монотонно убывающая в интервале $(0, 1)$ функция, стремящаяся к нулю при $r\to 1$. Тогда существует такое взаимно однозначное и конформное отображение круга γ на соответствующую ограниченную область D, что

$$l(r)>\mu(r)\,|\ln(1-r)|^{1/2}$$

для некоторых значений r, сколь угодно близких к 1.

Указывается возможность получения такого же утверждения для всех r, достаточно близких к 1. Этот результат представляет уточнение теоремы Кьоу (РЖМат, 1955, 4985). Б. Н. Рахманов

5489. **О конформном отображении близких областей. Сирык Г. В.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 57—60

Рассматриваются следующие конформные отображения:

1. Круга $|z|<1$ на область, ограниченную простой замкнутой кривой с уравнением

$$\rho=1-\delta(\theta)\quad(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

где

$$|\delta(\theta)|<\varepsilon,\quad|\delta'(\theta)|<\varepsilon,\quad|\delta''(\theta)|<\varepsilon.$$

2. Полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на область, ограниченную кривой

$$v=v(u)\quad(-\infty<u<+\infty),$$

где

$$|v(u)|<\varepsilon,\quad|v'(u)|<\varepsilon,\quad|v''(u)|<\varepsilon.$$

3. Полосы $0\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant 1$ на область, ограниченную кривыми:

$$v_1=v_1(u)\,(-\infty<u<+\infty),\quad|v_1(u)|<\varepsilon,$$

$$|v_1'(u)|<\varepsilon,\quad|v_1''(u)|<\varepsilon$$

и

$$v_2=v_2(u)\,(-\infty<u<+\infty),$$

$$|v_2(u)-1|<\varepsilon,\quad|v_2'(u)|<\varepsilon,\quad|v_2''(u)|<\varepsilon.$$

4. Кольца $0<h<|z|<1$ на кольцо, ограниченное простыми замкнутыми кривыми

$$\rho_1=1-\delta_1(\theta)\quad\text{и}\quad\rho_2=h\,[1+\delta_2(\theta)]\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

где

$$|\delta_i(\theta)|<\varepsilon,\quad|\delta_i'(\theta)|<\varepsilon,\quad|\delta_i''(\theta)|<\varepsilon\quad(i=1,\ 2).$$

Во всех указанных случаях автор одним и тем же методом, основанным на использовании формулы Шварца для круга и ее аналогов для остальных рассматриваемых областей, устанавливает приближенные формулы для надлежащим образом нормированной отображающей функции $w=f(z)$. В случаях 1) и 2) получаются формулы, уже установленные М. А. Лаврентьевым. (Конформное отображение, М.—Л., Гостехиздат, 1946) методом локальных вариаций. В случае 3) автор не приводит окончательного вида искомой формулы. Наконец, в случае 4) получается формула

$$f(z)=z\left[1-\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}Z_1(s+i\ln z)\,\delta_1(s)\,ds-\right.$$

$$\left.-\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}Z(s+i\ln z)\,\delta_2(s)\,ds\right],\qquad(1)$$

где $Z_1(\zeta)$ и $Z(\zeta)$ — функции Якоби с периодами $2\omega=2\pi$ и $2\omega'$, причем $\omega'=\dfrac{\ln h}{i}$.

При $h\to 0$ из (1) получается формула М. А. Лаврентьева для круга. Формулу (1) автор получает также методом локальных вариаций. Каждая из приближенных формул в случаях 1) — 4), как отмечает автор, является первым приближением в методе последовательных приближений, применяемом к соответствующему нелинейному сингулярному интегральному уравнению (или системе двух таких уравнений) рассматриваемой задачи конформного отображения.

В работе есть опечатки. В частности, в определении «почти полосы» вместо $|v_2(u)|<\varepsilon$ должно быть $|v_2(u)-1|<\varepsilon$. В. А. Зморович

5490. **О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов. Николаева Г. А.**, Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 2, 180—183

Предлагаемый автором метод для приближенного построения конформного преобразования круга на заданную область с помощью сопряженных тригонометрических рядов является некоторым усовершенствованием метода Канторовича (Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., 1949).

Уравнение границы области B_λ задается в виде $F(x, y, \lambda)=0$ или параметрически. Отображающая функция ищется в виде ряда по степеням λ. Коэффициент при λ^0, т. е. отображающая функция для области B_0, считается известным. Остальные коэффициенты могут быть вычислены последовательно один за другим.

Усовершенствование метода заключается в том, что коэффициенты ряда, являющиеся функциями, аналитическими в круге, определяются только в точках достаточно плотной сетки на границе круга с помощью простой вычислительной схемы. При плохой сходимости ряда предлагается его приближенное аналитическое продолжение.

Указываются условия сходимости метода в пространстве функций, у которых производные принадлежат к $L^{(2)}$. Приведены оценки для радиуса сходимости ряда по степеням λ, дающего функцию, отображающую круг на область, близкую к кругу, уравнение границы которой имеет вид $z\bar{z}-1-\lambda R(z,\bar{z})=0$. А. В. Батырев

5491. **Представление плоских полей ускорений любого порядка при помощи комплексных чисел. Мандджерон, Брайер** (Reprezentarea cimpurilor de acceleratii de ordin oarecare prin numere complexe. Mangeron D., Braier A.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A 7**, № 10, 535—540 (рум.; рез. франц., русск.)

5492. **Кручение полых призматических стержней. Угодчиков** (Кручення порожнистих призматичних стержнів. Угодчиков А. Г.), Прикл. механіка, 1956, **2**, № 2, 217—223 (укр.; рез. русск.)

Излагается способ решения задач кручения полых призматических стержней с наперед заданным поперечным сечением, основанный на применении метода Н. И. Мусхелишвили и на экспериментально-аналитическом методе конформных преобразований автора.

Суть способа, требующего при нахождении решения лишь элементарных алгебраических операций, состоит в следующем.

С помощью электромоделирования (РЖМат, 1956, 8, 5815) определяются коэффициенты c_k функции $z=\omega(\zeta)$, имеющей вид полинома

$$z=\omega(\zeta)=\sum_{k=-m}^{n}c_k\zeta^k,\qquad(1)$$

которая конформно отображает круговое кольцо

$\rho_1 \leqslant |\zeta| \leqslant 1$ на область, достаточно близкую к заданной области поперечного сечения стержня.

Далее по функции (1) и граничным условиям задачи определяется также в конечном виде комплексная функция кручения

$$f(\zeta) = i\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{m+n}(a_k\zeta^k + a_{-k}\zeta^{-k})\right\}. \qquad (2)$$

Найденные функции $\omega(\zeta)$ и $f(\zeta)$ позволяют вычислить обычным путем жесткость при кручении и напряжения в области поперечного сечения стержня и, в частности, касательные напряжения в точках ее границ.

Рассмотрены два примера решения сложных задач на кручение полых призматических стержней: 1) кручение круглого вала с центральной эллиптической полостью; 2) кручение шлицевой муфты.

Результаты расчета представлены в виде эпюр напряжений. П. Ф. Фильчаков

5493. **Замечания к вопросу о конформном отображении римановой поверхности на себя. Оикава** (Notes on conformal mappings of a Riemann surface onto itself. Oikawa Kotaro), Kodai Math. Semin. Repts, 1956, 8, № 1, 23—30 (англ.)

Рассматривается оценка числа конформных отображений римановой поверхности на себя.

Пусть $N(g, k)$-максимум этого числа по отношению ко всем римановым поверхностям рода g, имеющим k невырожденных компонент края, $N'(g, k)$ — та же величина по отношению ко всем замкнутым римановым поверхностям рода g с k выключенными точками. Доказываются теоремы:

1) Если $2g + k - 1 \geqslant 2$ $(g \geqslant 0,\ k \geqslant 1)$, то

$$N'(g, k) \leqslant N(g, k) \leqslant 12(g-1) + 6k.$$

2) Для $g = 1$ и $k \geqslant 1$,

$$N'(1, k) = \begin{cases} 6k \text{ для } k = m^2 + 3n^2, \\ 4k \text{ для } k = m^2 + n^2, \text{ но не представимых} \\ \qquad \text{в виде } k = m^2 + 3n^2, \\ 3k \text{ для } k = 2(m^2 + 3n^2), \text{ но не представи-} \\ \qquad \text{мых в виде } k = m^2 + n^2, \\ 2k \text{ для остальных } k, \end{cases}$$

где $m,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

В примечании указывается, что может быть доказано равенство

$$N'(g, k) = N(g, k).$$ С. А. Гельфер

5494. **Линии симметрии неодносвязных римановых поверхностей. Ламбин Н. В.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 84—85

Пусть дана некоторая риманова поверхность Q. Линией симметрии поверхности Q называется всякое связное и содержащее более одной точки множество L точек Q, которое при некотором конформном отображении второго рода Q на Q остается на месте, причем L не является подмножеством (в строгом смысле) никакого другого множества, обладающего тем же свойством. В работе автора (Прикл. матем. и механика, 1950, 14, № 6, 611—618) построено множество (всегда бесконечное) всех линий симметрии односвязной римановой поверхности. В реферируемой статье указывается, что существуют неодносвязные римановы поверхности с конечным или пустым множеством линий симметрии, и приводится необходимое и достаточное условие того, чтобы линии симметрии односвязной однолистной области P соответствовала при однозначном (но не взаимно однозначном) конформном отображении на Q линия симметрии для поверхности Q. Отмечено, что линии симметрии римановых поверхностей могут быть использованы при решении плоских краевых задач фильтрационного, электрического и магнитного поля в макронеоднородной среде. А. А. Гольдберг

5495. **О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций для системы n пар функций. Месис А. В.,** Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 441—449

Задано поле рода ρ алгебраических функций уравнением $f(z, w) = 0$. На римановой поверхности функции $w(z)$ дан простой замкнутый контур L, разделяющий поверхность на две области S^+, S^-. Исследуется краевая задача

$$\varphi^+(t, w) = A(t, w)\varphi^-(t, w) + b(t, w),$$

где A, b — заданные матрица и вектор, элементы которых принадлежат заданному полю, т. е. есть рациональные функции z, w.

Используя метод приведения матрицы к нормальной форме, примененный референтом (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4 (50)) при решении задачи с однозначными коэффициентами, автор при помощи конечного числа линейных преобразований строит каноническую матрицу $X(z)$ задачи.

Опираясь на данное ранее (Уч. зап. Казанского ун-та 1952, 112, кн. 9) решение краевой задачи в случае одной пары функций, автор дает решение неоднородной задачи.

Методом, аналогичным тому, которым строится каноническая матрица, проводится исследование задачи в особом случае, когда определитель матрицы A обращается в нуль на контуре L. Ф. Д. Гахов

5496. **Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций с заданными смещениями. Векуа** (Ერთი სასაზღვრო ამოცანა რამდენიმე უცნობი ფუნქციისათვის მოცემული გადაადგილებებით. ვეკუა ნ.), თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები, в Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1955, 21, 169—189 (груз., рез. русск.)

Пусть D^+ — конечная область, ограниченная одним простым замкнутым контуром Ляпунова L. Пусть далее заданные на контуре L функции $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)$ имеют отличные от нуля производные первого порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера, и переводят контур L взаимно однозначно в самого себя, причем t и $\alpha_k(t)$ описывают его в противоположных направлениях.

Автор дает решение следующей граничной задачи теории аналитических функций.

Найти два вектора $\varphi(z) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ и $\psi(z) = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$, мероморфные в области D^+, по граничным условиям

$$\varphi_j^+[\alpha_j(t)] = \sum_{k=1}^{n} G_{jk}(t)\psi_k^+(t) + g_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где $G_{jk}(t)$, $g_j(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $\det\|G_{jk}(t)\|$ отличен от нуля всюду на L. Д. А. Квеселава

5497. **Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций. Векуа Н. П.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 3, 377—384

Пусть S^+ — конечная область, ограниченная одним простым замкнутым контуром Ляпунова L. Пусть, далее, заданная на контуре L функция $\alpha(t)$ имеет отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию Гёльдера, и переводит контур L взаимно однозначно в самого себя, причем t и $\alpha(t)$ описывают его в противоположных направлениях и

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t.$$

При помощи теории сингулярных интегральных уравнений автор дает решение следующей граничной задачи теории аналитических функций.

Найти вектор $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, мероморфный в области S^+ по граничному условию

$$\Phi^+[a(t)]=A(t)\,\Phi^+(t)+B(t)\,\overline{\Phi^+(t)}+g(t),$$

где через $\Phi^+(t)$ обозначены граничные значения на L из S^+ вектора $\Phi(z)$ и $A(t)=\|A_{kl}(t)\|$, $B(t)=\|B_{kl}(t)\|$, $k, l=1, 2, \ldots, n$ — заданные матрицы, удовлетворяющие условию Гёльдера; $g(t)=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданный вектор, также удовлетворяющий условию Гёльдера.

Предполагается, что $\det A(t)\neq 0$ всюду на L.

Д. А. Квеселава

5498. **Некоторые экстремальные проблемы тригонометрических и комплексных полиномов. Хюльтен-Каваллиус** (Some extremal problems for trigonometrical and complex polynomials. Hyltén-Cavallius Carl), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 5—20 (англ.)

Автор решает проблему Турана (Turan P., Acta Univ. Szeged., 1946, **11**, 108) о расположении корней комплексных полиномов, абсолютная величина которых на окружности $|z|=1$ достигает своего максимума в точке $z=1$.

Обозначим через $C_n(z_0)$ (n — натуральное число, z_0 — некоторое комплексное число) множество полиномов степени $\leqslant n$, которые равны нулю в точке $z=z_0$, но не равны нулю тождественно и абсолютная величина которых на $|z|=1$ достигает своего максимума в точке $z=1$.

Кроме того, рассмотрим простую замкнутую кривую c_n, определенную следующим уравнением:

$$\cos\frac{1}{2}\varphi=\frac{1}{2}\left(\rho^{1/2}+\rho^{-1/2}\right)\cos\frac{\pi}{2n}, \qquad (1)$$

$$-\frac{\pi}{n}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n}, \qquad z=\rho e^{i\varphi}.$$

Решение проблемы Турана дается теоремой 5:

I. В зависимости от расположения точки $z_0=\rho e^{i\varphi}$ а) внутри c_n; б) на c_n; в) вне c_n имеет место а) $C_n(z_0)$ пусто; б) $C_n(z_0)$ содержит только следующие полиномы:

$$c\sum_{1\leqslant 2\nu+1\leqslant n}\binom{n}{2\nu+1}\left(ze^{-i\varphi}+1\right)^{n-2\nu-1}\left(ze^{-i\varphi}-\rho\right)^{\nu+1}\left(ze^{-i\varphi}-\rho^{-1}\right)^{\nu},$$

где c — произвольная постоянная, отличная от 0; в) $C_n(z_0)$ содержит бесконечное число полиномов, существенно отличающихся между собой.

II. Для трех случаев а), б), в) выполняются соответственно неравенства

$$\cos\frac{1}{2}\varphi\gtreqless\frac{1}{2}\left(\rho^{1/2}+\rho^{-1/2}\right)\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Из (1) сразу следует: $z=1$ расположена внутри c_n; для большого n c_n почти круг с центром в точке $z=1$, радиуса $\frac{\pi}{n}$; для $n\geqslant 3$ c_n выпуклая.

Теорему 5 автор доказывает, опираясь на следующую теорему 1 статьи:

Обозначим через $\Pi_n(it, \cos\alpha)$ (t — действительное, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$) множество тригонометрических полиномов $Q_n(x)$ степени $\leqslant n$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям: $|Q_n(x)|\leqslant 1$ для действительного x, $Q_n(it)=\cos\alpha$. Положим

$$d=\cos\frac{\alpha}{2n}\Big/\operatorname{ch}\frac{t}{2}.$$

Если $Q_n\in\Pi_n$ и $d\left|\cos\frac{1}{2}x\right|\geqslant\cos\frac{\pi}{2n}$, то $Q_n(x)\geqslant T_{2n}\left(d\cos\frac{1}{2}x\right)$ (x — действительное), где T_r — полином Чебышева, определяемый равенством $T_r(\cos u)=\cos ru$. Если равенство выполняется для одного x такого, что $d\left|\cos\frac{1}{2}x\right|\geqslant\cos\frac{\pi}{2n}$, то оно выполняется для каждого x. Для каждого действительного x, удовлетворяющего неравенству $d\left|\cos\frac{1}{2}x\right|<\cos\frac{\pi}{2n}$ (и в случае, когда $t=0$, удовлетворяющего неравенству $x\not\equiv 0 \bmod 2\pi$) существует бесконечное число полиномов $Q_n\in\Pi_n(it, \cos\alpha)$ таких, что $Q_n(x)=1$.

Дается также обобщение этой теоремы, когда $\cos\alpha$ заменено комплексным числом $\cos(\alpha+i\beta)$.

J. Czipszer

5499. **Теорема Пикара и структура функций. Исправления и дополнения. Ла-Валле-Пуссен** (Théorème de Picard et structure des fonctions. Rectifications et compléments. La Vallée Poussin Ch. de), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1956, **70**, № 2, 81—86 (франц.)

В статье автора (РЖМат, 1957, 367) была предпринята попытка доказать теорему Пикара об исключительных значениях топологическими методами, однако доказательство оказалось ошибочным. В реферируемой статье подробно анализируется основная ошибка доказательства, в связи с чем изучаются области однолистности функции exp (exp (exp (. . . exp z) . . .)).

А. А. Гольдберг

5500. **О фундаментальной теореме Мийу и ее обобщениях. I. Сюн Цзин-лай** (Sur un théorème fondamental de M. Milloux et ses extensions. I. Hiong King-Lai), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1956, **A59**, № 4, 386—396; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 386—396 (франц.)

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в области D, $0\in D$, и $\alpha_i(x)$ ($i=0, 1, \ldots, l$) — функции, голоморфные в D. Пусть $f_l=\sum_{i=0}^{l}\alpha_i f^{(i)}$. Приводится доказательство основной теоремы из заметки автора (РЖМат, 1956, 366) и с ее помощью доказывается следующая теорема 1: Если a и b ($b\neq 0$) — две конечные точки, сферическое расстояние которых от $z=\infty$ не меньше $\delta>0$, и $f(0)\neq 0, a, \infty$; $f_l(0)\neq a\alpha_0(0), b$; $b-a\alpha_0(0)\neq 0$, $\Delta=(b-a\alpha_0')(f_l'-a\alpha_0')+a\alpha_0'(f_l-a\alpha_0)\neq 0$ при $z=0$, то для $r<\rho$, $\{|z|<\rho\}\subset D$ выполняется неравенство

$$T(r, f)<N(r, \infty, f)+N(r, a, f)+N(r, b, f_l)-$$

$$-N_1(r, \infty, f)+M(r, \rho)+S_l(r, f; a, b),$$

где $M(r, \rho)$ — линейная комбинация $\ln^+ M(r, a_i)$ и $\ln^+\ln^+ M(\rho, a_i)$, $i=0, 1, \ldots, l$, а $S_l(r, f; a, b)$ — линейная комбинация $\ln\delta^{-1}$, $\ln^+|a_0(0)|$, $\ln|b-a\alpha_0(0)|$, $\ln^+|f(0)|$, $\ln^+|f_l(0)|$, $\ln^-|f_l(0)-a\alpha_0(0)|$, $\ln^-|\Delta(0)|$, $\ln^- r$, $\ln\rho/r$, $\ln\rho(\rho-r)^{-1}$, $\ln^+ T(\rho, f)$; $M(r, \varphi(z))$, как обычно, означает $\max|\varphi(z)|$ при $|z|=r$.

А. А. Гольдберг

5501. **О фундаментальной теореме Мийу и ее обобщениях. II. Сюн Цзин-лай** (Sur un théorème fondamental de M. Milloux et ses extensions. II. Hiong King-Lai), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 4, 397—402; Indagationes math., 1956, **18**, № 4, 397—402 (франц.)

Статья является непосредственным продолжением статьи, прореферированной выше (реф. 5500), со сквозной нумерацией теорем и формул. В теореме 2 в рас-

смотрение вводятся голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и доказывается неравенство

$$T(r, f) < N(r, \infty, f) + N(r, 0, f-\varphi) + N(r, 0, f_1-\psi) - N_1(r, \infty, f) + M(r, \rho; \varphi, \psi) + S_1(r, \rho; \varphi, \psi),$$

причем требования, накладываемые на поведение функций в $z=0$, формулируются с помощью $\varphi(0)$, $\varphi_1(0)$, $\psi(0)$, а $M(r, \rho; \varphi, \psi)$ и $S_1(r, \rho; \varphi, \psi)$ также зависят от этих величин. В теореме 3 аналогичное неравенство выводится для случая, когда $f(z)$, $a_i(z)$, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ мероморфны в $z \neq \infty$ и $T(r, a_i) = o(T(r, f))$, $T(r, \varphi^{(i)}) = o(T(r, f^{(i)}))$, $T(r, \psi) = o(T(r, f^{(i)}))$.

В конце статьи отмечается, что во всех теоремах ограничения, связанные с поведением функций в $z=0$, могут быть сняты, если использовать первые коэффициенты тейлоровских и лорановских разложений рассматриваемых функций. Референту представляется, что в такой общей формулировке замечание не является верным. Например, в теореме 1 условие $b - aa_0(0) \neq 0$ является существенным, что очевидно, если рассмотреть случай $a_i(x) \equiv 0$, $i=1, \ldots, l$, $a_0(x) \equiv 1$. А. А. Гольдберг

5502. К распределению значений трансцендентных функций Пенлеве. Шубарт (Zur Wertverteilung der Painlevéschen Transzendenten. Schubart Hans), Arch. Math., 1956, 7, № 4, 284—290 (нем.)

Изучается распределение значений мероморфных в $z \neq \infty$ функций Пенлеве $w_1(z)$ и $w_2(z)$, определяемых уравнениями $w_1'' = 6w_1^2 - 6z$ и $w_2'' = 2w_2^3 + zw_2 + c$ (Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1950, гл. III), причем все высказывания выводятся непосредственно из вида определяющих уравнений. Показано, что, кроме случаев $w_2 = 0, \pm z^{-1}$ при значениях $c=0, \pm 1$, w_1 и w_2 не являются рациональными функциями. Если исключить из рассмотрения рациональные w_2, то справедливы следующие утверждения: $\delta(a, w_1) = 0$, $|a| \leqslant \infty$; $\delta(a, w_2) = 0$, если исключить случай $a = c = 0$; $\vartheta(\infty, w_1) = \frac{1}{2}$; $\vartheta(\infty, w_2) = 0$; $\vartheta(a, w_k) \leqslant \frac{1}{2}$, $|a| \leqslant \infty$, $k = 1, 2$. Через $\delta(a, w)$ и $\vartheta(a, w)$ здесь, как обычно, обозначены соответственно дефект и индекс ветвления (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, гл. X). Кроме того, отмечено, что для произвольной мероморфной в $z \neq \infty$ функции f следующие свойства выполняются или не выполняются одновременно: а) для всех a $\lim_{r\to\infty} N(r, a)/T(r) = 1$, б) $\lim_{r\to\infty} N(r, a)/N(r, b) = 1$ для любых $a \neq b$, в) если существует предел $\lim_{r\to\infty} n(r, a)/n(r, b)$, то он равен единице. Автор отмечает, что, предполагая порядок w_1 и w_2 конечным, Виттих (РЖМат, 1955, 197) получил более глубокие результаты, в частности доказал наличие для w_1 и w_2 свойства а).

Примечание референта. В цитированной статье Виттих доказывает, что w_1 и w_2 необходимо имеют конечный порядок, однако соответствующее доказательство неубедительно (см. п. 3 статьи), так как при вычислении $dL/d\rho$ не учтено, что концы интервалов Δ_1 зависят от ρ. По-видимому, эту некорректность доказательства имеет в виду автор, рассматривая конечность порядка w_1 и w_2 как дополнительное условие в теоремах Виттиха, однако нигде в статье это не отмечено. А. А. Гольдберг

5503. О нижнем порядке целых функций, определенных рядами Дирихле. Рахман (On the lower order of entire functions defined by Dirichlet series. Rahman Q. I.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 96—99 (англ.)

Рассматривается целая функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{s\lambda_n} \quad (\lambda_{n+1} > \lambda_n, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty),$$

сходящимся абсолютно во всей плоскости. Если $M(\sigma) = \max_{-\infty<\tau<\infty} |f(\sigma + i\tau)|$, то $\rho = \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}$ — порядок, а $\mu = \underline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}$ — нижний порядок функции $f(s)$. Известно (Yung Y. C., Ann. École norm., 1951, 68, 65—104), что если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty$, то $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln |1/a_n|}$.

Приводится пример, когда аналогичное равенство не справедливо для μ. Доказываются следующие теоремы:

1. Если $\ln \lambda_n \sim \ln \lambda_{n+1}$, то $\mu \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln |1/a_n|}$.

2. Если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty$ и $\frac{\ln |a_n/a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ не убывает при $n > n_0$, то $\mu \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\ln |1/a_n|}$.

Показывается, что при одновременном выполнении условий теорем 1 и 2 еще не следует регулярность роста функции $f(s)$; строится пример функции, для которой $a_n > 0$, $\ln \lambda_n \sim \ln \lambda_{n+1}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, $\frac{\ln |a_n/a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ возрастает и все же $\rho > \mu$. Г. Л. Лунц

5504. О средних от целых функций. Рахман (On means of entire functions. Rahman Q. I.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 27, 192—195 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и нижнего порядка λ. При положительных δ и k вводятся средние значения

$$\mu_\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta \, d\theta,$$

$$m_{\delta, k}(r) = \frac{1}{\pi r^{k+1}} \int_0^r \int_0^{2\pi} |f(xe^{i\theta})|^\delta \, x^k \, dx d\theta.$$

Доказывается, что для любой целой функции выполняются соотношения

$$L_{\delta, k} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{\mu_\delta(r)}{m_{\delta, k}(r)} \right)^{1/\ln r} = e^\rho,$$

$$l_{\delta, k} = \underline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{\mu_\delta(r)}{m_{\delta, k}(r)} \right)^{1/\ln r} = e^\lambda.$$

Ранее было известно только, что $L_{2,1} = e^\rho$ (Пойа Г., Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 2, отд. IV, задача 66) и $l_{2,1} = e^\lambda$ (Shah S. M., Publs Math., 1951, 95—99). В. С. Виденский

5505. Распределение корней экспоненциальных сумм. Левин Б. Я., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 1, 20—22

$\Delta(\vartheta, \theta)$ — плотность корней функции $f(z)$ в секторе $\vartheta < \arg z < \theta$, $S_D(\vartheta, \theta)$ — длина дуги границы выпуклой области J между точками опоры опорных прямых этой области, перпендикулярных к лучам $\arg z = \vartheta, \arg z = \theta$. Норма целой функции $f(z)$ по отношению к выпуклой области J определяется равенством

$$\|f(z)\|_J = \sup |f(re^{i\theta})| e^{-K(\theta)\cdot r} (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi),$$

где $K(\theta)$ — опорная функция области J (ограниченную норму имеют только функции конечной степени с индикаторной диаграммой, не выходящей из J). Класс PE_J состоит из целых функций конечной степени, являющихся пределами по норме для полиномов

$$P_n(z) = \sum_1^{m_n} a_n(\lambda_k) e^{\lambda_k z},$$

причем точки $\overline{\lambda}_k$ принадлежат границе J. При любом $\overline{\lambda}$, принадлежащем границе J, существует для всякой сходящейся по норме последовательности $\{P_n(z)\}$ предел $a(\lambda) = \lim_{n\to\infty} a_n(\lambda)$, причем $a(\lambda)$ не зависит от выбора последовательности $\{P_n(z)\}$, а только от предельной функции $f(z) \in PE_J$. Множество значений λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$, называется спектром функции $f(z)$. Имеют место следующие теоремы:

1. Если наименьшая выпуклая область, содержащая весь спектр функции $f(z) \in PE_J$, совпадает с ее сопряженной диаграммой $\overline{J}_f$, то множество корней этой функции имеет плотность $\Delta(\vartheta, \theta)$ внутри любого угла $\vartheta < \arg z < \theta$, стороны которого не ортогональны прямолинейным отрезкам границы J_f, и

$$\Delta(\vartheta, \theta) = \frac{1}{2\pi} S_{J_f}(\vartheta, \theta).$$

2. Если J — многоугольник, то все множество особенностей функции, ассоциированной функции $f(z) \in PE_J$, совпадает со спектром $f(z)$. Кроме того, $f(z)$ представляется в форме

$$f(z) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j z} \Psi_j(ze^{i\varphi_j}),$$

где λ_j — точка на стороне d_j многоугольника $\overline{J}$, φ_j определяет направление нормали к этой стороне, а $\Psi_j(z)$ — почти периодические функции с ограниченным спектром.

3. Если

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!} z^n,$$

где $\varphi(x)$ — почти периодическая функция, то замыкание спектра функции $f(z)$ совпадает с множеством особенностей ассоциированной функции.

Доказательства не приводятся. Г. Л. Лунц

5506. Предельные значения аналитической функции, представленной криволинейным интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{P(\tau;\zeta)}{Q(\tau;\zeta)} d\tau$. **Мельник М. И.**, Сообщ. АН Груз. ССР, 1956, 17, № 8, 681—688

При некоторых условиях, налагаемых на $P(\tau;\zeta)$ и $Q(\tau;\zeta)$, доказывается, что функция, равная интегралу, приведенному в названии работы, непрерывно продолжаема на Г слева и справа, где Г — кривая, определяемая уравнением $Q(\tau;\zeta) = 0$. Устанавливаются формулы для граничных значений этой функции. Н. А. Давыдов

5507. Теорема Коши и ее обращение. Ахмад (Cauchy's theorem and its converse. Ahmad Mansoor), Acta math., 1955, 93, № 1—2, 15—25 (англ.)

Дается новое доказательство классической интегральной теоремы Коши и ее обратной в несколько обобщенной форме. Предварительно рассматривается звездная область, а для перенесения полученных результатов на случаи произвольной односвязной области указывается способ конформных отображений. Д. А. Квеселава

5508. Заметка о вариационной формуле Шиффера. Улчай (Note on Schiffer's variation formula. Uluçay Cengiz), Arch. Math., 1956, 7, № 4, 291—294 (англ.)

Дается простое доказательство вариационной формулы Шиффера (Schiffer M., Amer. J. Math., 1946, 68, 417—448; Proc. Intern. Congress Math., 1950, 2) для функции Грина, основанное на следующем замечании. Пусть $g(z,\zeta)$ и $g^*(z,\zeta)$ — функции Грина соответственно области G и G^*, полученной из G преобразованием $z^* = z + e^{2i\varphi}\rho^2/(z - z_0)$, где $z_0 \in G$, $z_0 \neq \zeta$, $\rho > 0$ и достаточно мало, $0 \leqslant \varphi < \pi$. Тогда разность $h(z,\zeta) = g^*(z^*,\zeta^*) - g(z,\zeta)$, гармоническая в области Δ, полученной из G удалением круга $|z - z_0| \leqslant \rho$, и обращающаяся в нуль на границе G, отрицательна в Δ. Ю. Е. Аленицын

5509. О виде пары целых функций, однолистной в пространстве двух комплексных переменных. Темляков А. А., Баврин И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, 19—21

Устанавливается, что пара целых функций $W = W(w, z)$, $Z = Z(w, z)$, однолистная в конечной части пространства комплексных переменных (w, z), имеет или вид

$$W = a(w)z + b(w),\ Z = \alpha(W)w + \beta(W), \qquad (1)$$

или вид, получающийся из (1) при перемене местами w, z, или W, Z. Здесь $a(w)$, $b(w)$, $\alpha(W)$, $\beta(W)$ — целые функции; $a(w) \neq 0$, $\alpha(W) \neq 0$ в соответствующих плоскостях. Б. А. Фукс

5510. Об аналитических функциях двух комплексных переменных, удовлетворяющих соотношению $f\{x, f(y,z)\} = f\{f(x,y), z\}$. **Кувагаки** (Sur la fonction analytique de deux variables complexes satisfaisant l'associativité: $f[x, f(y,z)] = f[f(x,y), z]$. Kuwagaki Akira), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, A 27, № 3, 225—234 (франц.)

Устанавливаются следующие свойства функции двух комплексных переменных $f(x,y)$. Если функция двух комплексных переменных $f(x,y)$ голоморфна в точке (0, 0) и удовлетворяет условиям:

$$f\{x, f(y,z)\} = f\{f(x,y), z\}, \qquad (1)$$

$$f(0,0) = 0, \qquad (2)$$

то она или есть функция одного из переменных x, или y, или симметрична относительно x и y. Такая функция может быть одного из следующих видов: 1) $f(x,y) \equiv x$, 2) $f(x,y) \equiv y$, 3) $f(x,y) = x + y + xyS_1(x,y)$, 4) $f(x,y) = xyS_2(x,y)$, где S_1, S_2 суть функции, голоморфные в (0, 0) и симметричные относительно x и y, причем $S_2(0,0) \neq 0$ или $S_2(x,y) \equiv 0$. Если вместо (2) выполняется условие $f(c,c) = c$, то этот случай сводится к рассмотренному. Из доказанных свойств делается заключение, что если полугруппа одномерна и аналитична в точке c, причем $c^2 = c$, то она коммутативна. С. П. Пулькин

5511. Некоторые новые результаты в теории аналитических функций многих комплексных переменных. Фукс Б. А., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 85—93

Кратко излагаются результаты, установленные в последнее время в теории функций многих комплексных переменных, относящиеся к интегральной формуле Коши, к областям голоморфности аналитических функций и к проблемам Кузена. А. В. Лебедев

5512. Об аппроксимации функций многих переменных целыми функциями. Аветисян А. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 74—75

На функции многих переменных распространяются некоторые результаты М. М. Джрбашяна, связанные с прямыми и обратными интегральными преобразованиями в классе $L_2(0, \infty)$ на системе лучей в комплексной области и построением целых функций, сходящихся в среднем к заданной функции (РЖМат, 1955, 1179, 3261; 1956, 6534). Рассматриваются интегральные преобразования в классе $L_2(0, \infty, 0, \infty)$ для двух видов симметрично построенных ядер. Устанавливается, что для произвольной функции $F(z_1, z_2)$, определенной на системе $\{\Omega\}mn$ пар $|\varphi_k, \psi_j|$ лучей

$$\arg z_1 = \varphi_k \ (k = 1, 2, \ldots, n),\ 0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots$$
$$\ldots < \varphi_n < 2\pi,$$
$$\arg z_2 = \psi_j \ (j = 1, 2, \ldots, m),\ 0 \leqslant \psi_1 < \psi_2 < \ldots$$
$$\ldots < \psi_m < 2\pi$$

и удовлетворяющей условию

$$\iint\limits_{\{\Omega\}} |F(z_1, z_2)|^2 |z_1|^{2\mu_1\rho_1-\rho_1-1} |z_2|^{2\mu_2\rho_2-\rho_2-1} \times$$
$$\times d|z_1|\, d|z_2| < \infty,$$
$$\rho_k \geqslant \alpha_k, \quad \frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k} \ (k = 1, 2),$$
$$\alpha_1 = \max\left\{\frac{\pi}{|\varphi_{k+1} - \varphi_k|}\right\}, \quad \alpha_2 = \max\left\{\frac{\pi}{|\psi_{j+1} - \psi_j|}\right\},$$

существуют целые функции $G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1 z_2)$ порядка ρ_1 типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2 типа σ_2 по z_2, для которых

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \to \infty \\ \sigma_2 \to \infty}} \iint\limits_{\{\Omega\}} |F(z_1 z_2) - G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1 z_2)|^2 |z_1|^{2\mu_1\rho_1-\rho_1-1} \times$$
$$\times |z_2|^{2\mu_2\rho_2-\rho_2-1} d|z_1|\, d|z_2| = 0$$

Доказательства не приводятся. С. А. Еремин

5513. Об аналитических функциях многих переменных. IX. Конечные области без внутренних критических точек. Ока (Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. Oka Kiyoshi), 日本數学会集報, Нихон сугаку сюхо, Japan. J. Math., 1953, 23, 97—155 (франц.)

Первые семь мемуаров К. Ока, опубликованных в 1936—1948 гг., содержат ряд фундаментальных результатов, относящихся к аппроксимации аналитических функций многих комплексных переменных, к решению 1-й и 2-й проблем Кузена, к решению проблемы Гартогса—Леви, к идеалам, состоящим из аналитических функций. Все эти результаты были получены автором для областей пространства n комплексных переменных (решение проблемы Гартогса—Леви только для $n = 2$). Восьмой и девятый мемуары Ока посвящены распространению его результатов на конечные области наложения над пространством h комплексных переменных, не имеющие внутренних точек ветвления. В девятом мемуаре доказываются следующие предложения.

Теорема. Пусть D и D' — конечные области наложения над пространством n комплексных переменных, $D \subset D'$ и область D выпукла по отношению к классу функций, голоморфных в D'. Тогда каждая функция, голоморфная в D, может быть во всякой подобласти $\check{D}$ области D (где $D \subset D$) равномерно аппроксимирована функциями, голоморфными в области D'.

Теорема. Каждая аналитически выпуклая, конечная внутри неразветвленная область наложения является голоморфно выпуклой (иначе говоря, является голоморфно полным комплексно-аналитическим многообразием).

Отсюда вытекает, что области, рассматриваемые в этой теореме, всегда являются областями голоморфности. Этот результат составляет решение (для указанных областей) проблемы Гартогса—Леви. Для областей пространства n комплексных переменных (для $n > 2$) соответствующий результат был также получен, независимо от Ока и друг от друга, Норгуэ и Бремерманом (РЖМат, 1956, 2067).

Из указанной теоремы Ока следует, что конечная область наложения, являющаяся областью голоморфности, является голоморфно выпуклой. Наконец, из результатов работы Ока следует, что так называемая аксиома отделимости в условии голоморфной выпуклости является излишней и вытекает из других требований.

Мемуар Ока содержит распространение на рассматриваемые области полученных им ранее результатов, относящихся к проблемам Кузена. Однако получаемые им здесь предложения содержатся в соответствующих теоремах Картана и Серра, относящихся к голоморфно полным комплексно аналитическим многообразиям (РЖМат, 1956, 1297, 1298).

Мемуар содержит распространение на области рассматриваемого типа понятия плюрисубгармонической функции. Даются три, эквивалентных друг другу, определения подобных функций (которые автор называет псевдовыпуклыми). Эти определения сходны с теми, которые давались ранее подобным функциям Лелоном, Бремерманом и др. (см., например, РЖМат, 1956, 386). Доказывается, что если D — конечная аналитически выпуклая внутри неразветвленная область, но в ней существует такая плюрисубгармоническая функция $\Phi(P)$ (здесь P — точка области D), что для каждого действительного числа α

$$\{D \wedge \{\Phi(P) < \alpha\}\} \subset D.$$

Б. А. Фукс

5514. Логарифмический вычет и критерий однолистности. Темляков А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, стр. 5—13

Классическая теорема о логарифмических вычетах применяется к подсчету числа корней системы уравнений $F_k(z_1, \ldots, z_n) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Функции F_k предполагаются голоморфными в замкнутой ограниченной звездной области. Предполагается, что границей этой области является дважды дифференцируемая $(2n-1)$-мерная поверхность, с которой $(2n-2)$-мерная аналитическая поверхность, определяемая уравнениями $F_k(z_1, \ldots, z_n) = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$, пересекается по некоторому конечному множеству замкнутых контуров. Рассматриваются примеры. Б. А. Фукс

5515. **Дифференцируемые функции, формальные степенные ряды и момент. Меркил** (Differentiable functions, formal power series, and moments. Mirkil H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 650—652 (англ.)

Строится бесконечно дифференцируемая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ с заданными значениями

$$\frac{\partial^{p_1+\ldots+p_n} f(0, \ldots, 0)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \quad (p_1, \ldots p_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Показывается применение полученного результата к решению проблемы моментов. Г. Е. Шилов

5516. **Теория функций на комплексных многообразиях. Бенке** (Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Behnke Heinrich), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 45—57 (нем.)

Доклад, прочитанный на Всемирном математическом съезде в Амстердаме в 1954 г. Содержит обзор результатов по следующим вопросам: 1) критические (неуниформизируемые) граничные точки областей существования аналитических функций; 2) свойства функций на римановых многообразиях; в частности, рассматриваются вопрос об аппроксимации функций, решение проблем Кузена; 3) голоморфно полные многообразия; 4) аналитические проекции; 5) модификации.

Б. А. Фукс

5517. **Теория функций в комплексной коммутативной алгебре с единицей. Рицца** (Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative. Rizza Giovanni Battista), Rend. mat. e applic., 1953, 12, № 3-4, 299—331 (итал.)

Пусть

$$X = \sum_{h=1}^{n} (\overset{*}{x}_{2h-1} + i\overset{*}{x}_{2h}) u_h \quad (i^2 = -1),$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — база ассоциативной и коммутативной алгебры с единицей над полем комплексных чисел; $\overset{*}{x}_{2h-1}$, $\overset{*}{x}_{2h}$ — действительные переменные ($h = 1, \ldots, n$). В этой алгебре строится теория моногенных функций $F(X)$, причем $F(X)$ называется моногенной в некоторой области $\overset{*}{R}_{2n}$ действительного евклидова пространства $\overset{*}{S}_{2n}(\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_{2n})$, если в каждой точке этой области существует конечный предел

$$F'(X) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{F(X + \Delta X) - F(X)}{\Delta X}$$

(исключаются такие значения ΔX, которые являются делителями нуля).

Доказываются аналоги основных теорем теории аналитических функций одной комплексной переменной: интегральных теорем Коши и Морера, интегральной формулы Коши, дифференцирования криволинейного интеграла по параметру, разложении в ряды Тейлора и Лорана, теоремы Лиувилля и теории вычетов вместе с анализом особых многообразий. Строится теория элементарных функций и степенных рядов и вводятся понятия аналитического продолжения и полной аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Библ. 12 назв.

Примечание референта. Автор не дает законченного изложения теории аналитического продолжения и не рассматривает поверхностных интегралов (рассмотрены только криволинейные), чем сильно ограничивает возможности приложений своих функций к анализу и геометрии. В. С. Федоров

5518. **Квазианалитические классы функций. Гаркави А. Л.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 122—123

Через $B\{n_k\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ обозначается класс функций, для которых существует последовательность $\{n_k'\}$ такая, что

$$\frac{1}{c} < \frac{n_k}{n_k'} < c, \quad \lim \sqrt[n_k']{E_{n_k'}(f)} < 1.$$

Теорема 1. Чтобы всякая функция из $B\{n_k\}$ была квазианалитической D (по поводу терминологии см., например, Бернштейн С. Н. Сбор. соч., 1952, т. I, стр. 290, 302, 556), необходимо и достаточно существование такой четной весовой нормально возрастающей функции $F(x) > 0$, что

$$\ln F(n_{k+1}) \leqslant n_k$$

Теорема 3. Пусть $a < b < c$. Любая непрерывная на $[a, b]$ функция является псевдоаналитическим продолжением функции, квазианалитической B на $[b, c]$.

Формулируется (теорема 2) некоторое условие, достаточное, чтобы функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношению

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n(f)} = 0,$$

была тождественным нулем. Смысл этого условия референту не ясен. Доказательства не приводятся.

И. П. Натансон

5519. **Теорема о неявной функции для квазианалитических и родственных классов функций. Ливерман** (Implicit function theorem for quasi-analytic and related classes of functions. Liverman T. P. G.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 5, 261—264 (англ.)

Пусть $\{M_n\}$ — числовая последовательность. Через $C\{M_n\}$ обозначается класс функций $f(x)$, заданных и бесконечно дифференцируемых на некотором отрезке $[a, b]$, у которых

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n)}(x)| \leqslant q^n M_n \quad [n = 1, 2, \ldots, q = q(f)],$$

а также класс функций $f(x, y)$, заданных в прямоугольнике I, имеющих непрерывные частные производные всех порядков, подчиненные условию

$$\max_{(x,y) \in I} \left| \frac{\partial^{\lambda+\mu} f}{\partial x^\lambda \partial y^\mu} \right| \leqslant q^{\lambda+\mu} M_\lambda M_\mu \quad (\lambda + \mu = 1, 2 \ldots).$$

Теорема 3. Пусть $f(x, y) \in C\{M_n\}$ в прямоугольнике $I: |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$. Если $f(x_0, y_0) = 0$, $f_y'(x_0, y_0) \neq 0$, то при наличии логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n/n!\}$ существует такой прямоугольник $I': |x - x_0| < a', |y - y_0| < b'$, что единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $f(x, y) = 0$, удовлетворяющее условию $(x, y) \in I'$, входит в $C\{M_n\}$. Если же логарифмически выпукла лишь сама $\{M_n\}$, то $\varphi(x) \in C\{n!, M_n\}$.

Теорема 4. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в области D и ζ_f — простой корень $f(z)$, содержащийся внутри замкнутой подобласти D' области D. Пусть $\|f - g\| = \max_{z \in D'} |f - g|$. Для всех достаточно малых $\|f - g\|$ имеется простой корень ζ_g функции $g(z)$, причем

$$\frac{1}{4} \left| \frac{g(\zeta_f)}{f'(\zeta_f)} \right| \leqslant |\zeta_f - \zeta_g| \leqslant c \|f - g\| \ (c = \text{const}).$$

И. П. Натансон

5520. Основные свойства дискретных аналитических функций. Даффин (Basic properties of discrete analytic functions. Duffin R. J.), Duke Math. J., 1956, **23**, № 2, 335—363 (англ.)

Рассматриваются комплексные функции $f(z)$, определенные в точках $z=m+ni$ ($m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$) целочисленной решетки комплексной плоскости z. Функция $f(z)$ называется аналитической в единичном квадрате решетки с левой нижней вершиной z, если

$$\frac{f(z+1+i)-f(z)}{1+i}=\frac{f(z+i)-f(z+1)}{i-1}.$$

Функция $f(z)$ называется дискретной аналитической в некоторой области, состоящей из квадратов решетки, если она аналитическая в каждом квадрате области. Если область аналитичности есть вся плоскость, то $f(z)$ названа целой. Целая функция единственным образом определяется своими значениями (произвольными) во всех целых точках вещественной и мнимой оси. В работе получены аналоги предложений для обычных аналитических функций (вещественная и мнимая части аналитической функции суть «гармонические» функции, «интеграл» по замкнутому контуру от аналитической функции равен нулю, интегральная «формула» Коши и т. д.) и ряд других предложений, не имеющих прямой аналогии в теории обычных аналитических функций. Библ. 16 назв. Х. Л. Смолицкий

Примечание редакции. Автор не указывает на работу Н. П. Романова (Тр. физ. матем. фак. Узб. ун-та, 1951, вып. 47, 3—27), в которой также исследовались свойства аналитических функций целого аргумента. Исследования Н. П. Романова были затем продолжены Н. А. Фуксманом (РЖМат, 1956, 8762).

5521. О квазиконформности и псевдоаналитичности. Мори (擬等角性及び擬解析性について. 森明), 數學, Сугаку, 1955, **7**, № 2, 75—89 (японск.)

Обзорная статья, посвященная краткому изложению теории квазиконформного отображения.

Даются определения квазиконформности и псевдоаналитичности. Далее автор изучает основные свойства отображения единичного круга в себя и указывает применения приведенных результатов к рассмотрению свойств общих квазиконформных отображений и псевдоаналитичности. Приводятся доказательства некоторых предложений о квазианалитическом продолжении. Библ. 23 назв. Ли Ен Пир

5522. Теория общих трехмерных комплексных функций. I. Нисигаки, Такасу (General three-dimensional complex function theory. I. Nisigaki Hisami, Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1955, **3**, № 1-2, 53—126 (англ.)

Подробное изложение с некоторыми дополнительными замечаниями результатов, опубликованных Такасу (РЖМат, 1955, 5761). Имеются опечатки. Например: на стр. 75, строка 2 снизу, напечатано $\sqrt{m^2+4n}$ вместо $\sqrt{n^2+4m}$. На стр. 77, строка 7 снизу, напечатано $x+e_2y+e_3z$ вместо $|x+e_2y+e_3z|$. На стр. 116, строка 10 сверху, напечатано ζ вместо ζ_0. На стр. 119, строка 9 снизу, напечатано $\zeta(\zeta)$ вместо $S(\zeta)$. В. С. Федоров

5523. Моногенные гиперкомплексные функции. Морев И. А., Укр. матем. ж., 1956, **8**, № 4, 423—434

Рассматриваются гиперкомплексные функции вида

$$\zeta=\sum_1^m a^k e_k,\quad f=\sum_1^m b^k e_k,\quad \psi=\sum_1^m c^k e_k,$$

где $e_1, \ldots, e_m$ — база какой-либо ассоциативной и коммутативной алгебры с единицей и конечного ранга над полем комплексных чисел; a^k, b^k, c^k ($k=1, \ldots, m$) — однозначные комплекснозначные функции точки некоторой области D действительного евклидова пространства $E^n(x^1, \ldots, x^n)$ ($m \geqslant n$ или $m<n$). Функция f называется моногенной по ζ в области D, если найдется третья функция ψ с такими свойствами: для любой фиксированной точки M области D и для всякого данного $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta(M)>0$, что для всякой точки M' области D при условии $|\overline{MM'}|<\delta(M)$, модуль каждой компоненты разности $\Delta f-\psi(M)\Delta\zeta$ будет меньше $\varepsilon|\overline{MM'}|$, если $\Delta f=f(M')-f(M)$, $\Delta\zeta=\zeta(M')-\zeta(M)$. Аналогично определяется моногенность f в области D по любому числу функций (вида 1) $\zeta^1, \ldots, \zeta^p$: если найдутся такие функции $\psi^1, \ldots, \psi^p$ (вида 1), что при условии $|\overline{MM'}|<\delta(M)$ модуль каждой компоненты разности $\Delta f-\sum_1^p\psi^j(M)\Delta\zeta^j$ меньше $\varepsilon(\overline{MM'})$. Функция ψ^j называется производной f по ζ^j. Ограничиваясь случаем $p\leqslant n$ и предполагая, что в каждой точке области D существует якобиан $d(\zeta^1, \ldots, \zeta^p)/d(x^1, \ldots, x^p)$, не являющийся делителем нуля, автор доказывает теоремы:

1) Всякая f, моногенная по $\zeta^1, \ldots, \zeta^p$ в D, имеет в этой области производные всех порядков по $\zeta^1, \ldots, \zeta^p$, если f и $\zeta^1, \ldots, \zeta^p$ имеют в D непрерывные частные производные всех порядков по $x^1, \ldots, x^n$ (условие достаточное, но не необходимое).

2) В случае $\zeta^j=a^{1j}x^1+\ldots+a^{pj}x^p+\theta^j(x^{p+1}, \ldots, x^n)$ ($p<n$), где a^{kj} — гиперкомплексные постоянные, θ^j — гиперкомплексные функции с непрерывными частными производными второго порядка по $x^{p+1}, \ldots, x^n$ в области D ($k, j=1, \ldots, p$), имеем: всякая f, моногенная в D по $\zeta^1, \ldots, \zeta^p$ будет гармонической функцией от $x^1, \ldots, x^n$ в этой области, если в D: ζ^j — гармонические по $x^1, \ldots, x^n$ ($j=1, \ldots, p$);

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial\zeta^j}{\partial x^i}\frac{\partial\zeta^h}{\partial x^i}=0$$

для всяких (одинаковых или различных) j и h, при $j, h=1, \ldots, p$ (условие необходимое и достаточное).

Последнюю теорему автор выводит из доказанного им в этой работе аналога известной интегральной формулы Коши теории функций комплексного переменного, рассматривая интегралы по некоторым замкнутым гиперповерхностям $n-1$ измерений. Из остальных результатов отметим обобщение одной теоремы референта о моногенности дуальных функций (РЖМат, 1953, 213). Имеются опечатки. Например, на стр. 424, строка 2 сверху, напечатано $df=\psi p\zeta$ вместо $df=\psi d\zeta$. На стр. 429, строка 1 снизу напечатано $\frac{\partial^2(\xi^k)}{\partial x^h\partial x}$ вместо $\frac{\partial^2(\zeta^k)}{\partial x^h\partial x^i}$.

Библ. 9 назв. В. С. Федоров

5524 К. Целые функции. Картрайт (Integral functions. Cartwright Mary Lucy. Cambridge Univ. Press. 1956, VIII, 135 pp., ill. 18 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 337, 10 (англ.)

5525 Д. Конформные отображения эллиптическими функциями в эквиангармоническом случае. Тарноци (Konforme Abbildungen durch elliptische Funktionen im äquianharmonischen Fall. Tarnoczy Ernst. — Diss. phil. Wien, 1955, 40 Bl. — Maschinenschr.), Oesterr. Bibliogr., 1956, № 3, 13 (нем.)

5526 Д. О некоторых свойствах искажений при конформных и квазиконформных отображениях. Юве (Über gewisse Verzerrungseigenschaften konformer und quasi-konformer Abbildungen. Diss. Juve Yrjö. Helsinki. Kirjapaino Sana, 1954, 39 S., ill.), Dtsch. Nationalbilbliogr., 1956, **B**, № 1, 67 (нем.)

5527 Д. **Моногенные гиперкомплексные функции.** Морев И. А., Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1957

5528 Д. **О гильбертовых модулярных функциях и рядах Дирихле с эйлеровским разложением произведения.** Херман (Über Hillbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Herrmann Oskar. — Diss., Naturwiss. — math. F., 1953, 64 Bl., — Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 5, 367 (нем.)

См. также: 5550, 5584, 5601

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5529. **Сингулярная система двух дифференциальных уравнений.** Парсонс (Singular systems of two differential equations. Parsons D. H.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 28, 287—292 (англ.)

Автор называет систему

$$F_k(x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2) = 0, \quad k = 1, 2,$$

сингулярной, если

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p_1, p_2)} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(q_1, q_2)} = 0.$$

Вопрос об интегрировании такой системы эквивалентен, в конечном счете, интегрированию системы

$$Ap_1 + Bp_2 + C = 0, \quad Aq_1 + Bq_2 + D = 0,$$

где A, B, C, D — функции от x, y, z_1, z_2. Иинтегрирование этой системы автор сводит к интегрированию уравнения Пфаффа

$$\omega \equiv Adz_1 + Bdz_2 + Cdx + Ddy = 0,$$

которое рассматривается в двух случаях: 1) $\omega = du$ 2) $\omega = du + vdw$. В первом случае полный интеграл имеет вид $u = c$, а во втором случае $u = a$, $v = b$.

И. С. Аржаных

5530. **О некоторых абсолютных постоянных относительно аналитических дифференциальных уравнений.** Винтнер (On certain absolute constants concerning analytic differential equations. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1956, 78, № 3, 542—554 (англ.)

Известно, что если правая часть дифференциального уравнения $dw/dz = f(z, w)$ (1) регулярна и $|f(z, w)| < M$ в области $|z| < a$, $|w| < b$, то решение $w = w(z)$ с начальным условием $w(0) = 0$, доставляемое методом последовательных приближений регулярно по крайней мере в круге $|z| < \min(a, b/M)$. Ранее автором было показано, что этот результат нельзя улучшить.

Если вместо $|f(z, w)| < M$ предположить, что $|f(z, 0)| \leqslant N$ и $|\partial f/\partial w| < L$ в области $|z| < a$, $|w| < b$, то существует решение уравнения (1) с начальным условием $w(0) = 0$, регулярное по крайней мере в круге $|z| < \min[(a, L^{-1}\ln(1 + bL/N)]$. Автор показывает, что этот результат наилучший.

В теореме I автор доказывает что если функция $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ регулярна и $|f(w)| < 1$ в круге $|w| < 1$, то уравнение $dw/dz = f^*(w)$, где $f^*(w) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| w^n$, имеет решение $w = w(z)$ с начальным условием $w(0) = 0$. Это решение регулярно и $|w(z)| < 1$ в круге $|z| < \gamma$, где γ — некоторая абсолютная постоянная (не зависящая от функции $f(w)$).

В теореме II автор устанавливает аналогичный результат для $f(z, w)$

Н. М. Матвеев

5531. **Об эпидермическом эффекте для обыкновенных дифференциальных неравенств первого порядка.** Мляк (On the epidermic effect for ordinary differential inequalities of the first order. Mlak W.). Ann. polon. math., 1956, 3, № 1, 37—40 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

причем предполагается, что в некоторой открытой области Ω пространства $(t, y_1, \ldots, y_n)$ функции f_i удовлетворяют следующему условию (H):

Если $A_1 = (t, a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$; $B_i = (t, b_1, \ldots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \ldots, b_n)$ и $a_\nu \leqslant b_\nu$ для $\nu = 1, 2, \ldots i-1, i+1 \ldots n$, тогда $f_i(A_i) \leqslant f_i(B_i)$ т. е. правая часть i-го уравнения монотонна по y, кроме, быть может, y_i. Устанавливается следующая теорема: Пусть 1) $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$, $\ldots$, $\tau_n(t)$ есть правое верхнее решение системы (1), определенное на $\Delta = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$, и правые части удовлетворяют условию (H); 2) функции $t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ непрерывны в Δ и $[t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] \in \Omega$ для $t \in \Delta$; 3) функции $\varepsilon_i(t)$ непрерывны в Δ и $\varepsilon_i(t) > 0$ для $t \in \Delta$; 4) $\varphi_i(t_0) \leqslant \tau_i(t_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; 5) Для тех k, для которых для $t \in \Delta$ $\tau_k(t) < \varphi_k(t) < \tau_k(t) + \varepsilon_k(t)$ имеет место неравенство $\overline{D}_- \varphi_k(t) \leqslant f_k(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, тогда $\varphi_i(t) \leqslant \tau_i(t)$, $t \in (t_0, t_0 + a)$. В условии (5) неравенство относительно $\overline{D}_- \varphi_k(t)$ может быть заменено неравенствами относительно

$$\overline{D}_+ \varphi_k(t); \ \overline{D}_- \varphi_k(t); \ \underline{D}_+ \varphi_k(t); \ \underline{D}_- \varphi_k(t).$$

В. В. Немыцкий

5532. **Условия отсутствия критических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Бертон (Conditions which preclude the existence of critical solutions of an ordinary differential system. Burton L. P.), Proc. Amer. Math., Soc., 1956, 7, № 5, 791—795 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$(S)' \quad y_{i+1}' = f_{i+1}(x, y_i)$$

$$(i = 1, \ldots, n; \ y_{n+1} \equiv y_1, \ f_{n+1} \equiv f_1).$$

Критическим решением, проходящим через точку $P(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$, называется такое решение $\{w_i(x)\}$, проходящее через эту точку, что для каждого другого решения $\{y_i(x)\}$, проходящего через эту точку, для $k = 1, 2, \ldots, n$ имеем при $x_0 < x < x_0 + a$ или $w_k(x) \leqslant y_k(x)$, или $w_k(x) \geqslant y_k(x)$ (не обязательно для всех k неравенство направлено в одну сторону).

Теорема 1. Пусть при $x > x_0$ нечетное число функций f_i в системе (S) строго убывает по y, а остальные строго возрастают по y. Пусть $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ — два решения, при $x_0 < x < x_0 + a$, удовлетворяющие системе (S), и при $x \to x_0$ точка P является единственной предельной точкой для одного из них и предельной точкой для другого. Тогда для любого k разность $y_k(x) - z_k(x)$ обращается в нуль в бесконечном числе точек интервала $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

Теорема 2. Система (S) при условиях теоремы 1 не может иметь критических решений.

Изложенные теоремы в случае $n = 1$ дают теорему единственности для уравнения $y' = f(x, y)$ при условии, что $f(x, y)$ убывает по y.

А. Ф. Филиппов

5533. **Обобщенная каноническая система в точных дифференциалах. Русак Б. И.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 93—100

Распространяются результаты референта (РЖМат, 1954, 1650) на канонические системы вида

$$dx_\beta = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial f_{\nu,\sigma}}{dx_{\beta-2k}} - \frac{\partial f_{\nu+2,\sigma}}{\partial x_{\beta+2k}} \right) dt_\sigma$$

(теоремы типа Пуассона и Гамильтона—Якоби).

И. С. Аржаных

5534. **Интегрирование обобщенно-гамильтоновых уравнений в пространстве с числом измерений $n = (2l+1)k$. Русак Б. И.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 101—107

Рассматриваются системы вида

$$\dot{x}_\beta = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_{\beta-2k}} - \frac{\partial f_{\nu+2}}{\partial x_{\beta+2k}}$$

и устанавливаются три теоремы, обобщающие соответствующие результаты теории канонических уравнений Гамильтона (существование интегралов типа $f_\gamma = \text{const}$, метод, аналогичный методу Гамильтона—Якоби, существование интегрирующего множителя). Рассмотрены также некоторые следствия и примеры. И. С. Аржаных

5535. **Новые уравнения движения голономных систем. Аржаных И. С.,** Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 18, 21—34

Для голономной системы с определяющими координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и связями

$$\varphi_\mu(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \mu = 1, \ldots, m$$

уравнения движения в форме Лагранжа с множителями связей преобразуются в уравнения в форме Лагранжа без множителей, а затем и к каноническим уравнениям. Приводятся два примера применения изложенного метода.

М. И. Ефимов

5536. **Эффективный способ построения периодического решения уравнения $y' = f(x, y)$. Кислицын С. Г.,** Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, 103, 97—105

Для дифференциального уравнения

$$y' = f(L(x, y), x), \qquad (1)$$

где $f(L, x)$, $L(x, y)$ — периодические по x функции, с периодом, равным единице, имеющие непрерывные производные $\partial f/\partial L$, $\partial L/\partial y$, строятся две последовательности функций $\{y_n\}$ и $\{y_n^*\}$, определяемые формулами

$$y_n^* = y_n(0) + \int_0^x f(L(x, y_n), x)\, dx; \quad L(x, y_n) = L(x, y_{n-1}^*) + e_{n-1},$$

постоянная e_{n-1} определяется из условия

$$\int_0^1 f(L(x, y_n), x)\, dx = 0,$$

где y_1 — произвольная периодическая функция, удовлетворяющая условию $\int_0^1 f(L(x, y_1), x)\, dx = 0$.

Доказывается, что при условиях: $\partial f/\partial L < 0$; $0 < r < |\partial f/\partial L| < R$ и $\mu = Rb[1 + (B - 1/b + R/r)/r] < 1$, где $B = 1/\inf \partial L/\partial y$, $b = \sup \partial L/\partial y$, последовательности $\{y_n\}$ и $\{y_n^*\}$ равномерно сходятся к периодическому решению уравнения (1).

Н. В. Адамов

5537. **Разрешимость специального уравнения Риккати в элементарных функциях. Дамен** (Die elementare Auflösbarkeit der speziellen Riccatischen Differentialgleichung. Dahmen Gert), Ann. Univ. Saraviensis, 1953, **2**, 75—81 (нем.)

Дается более простое, чем у Лиувилля, доказательство необходимого и достаточного условия того, что уравнение Риккати решается в элементарных функциях. Приводится и применяется упрощение Ритта одного из шагов доказательства (Ritt, C. r. Acad. sci., 1926, **183**, 331—332). Однако автор, видимо, незнаком с более поздним полным исследованием Ритта (Integration in finite terms, Columbia Univ. Press, 1948, 70—76), которое схоже с доказательством автора и во всяком случае не сложнее его.

J. M. Thomas.

Перевод из Math. Revs., 1954, 15, № 2, 129.

5538. **О свойстве дифференциального уравнения Эйлера. Приложение к построению линейной комбинации из n функций $f_i(t)$, которая дает при преобразовании Лапласа линейную комбинацию n функций $f_i(s)$. Пародн** (Sur une propriété de certaines équations différentielles d'Euler. Application à la formation de combinaisons linéaires de n fonctions $f_i(t)$ qui admettent pour transformée de Laplace une combinaison linéaire des n fonctions $f_i(s)$. Parodi Maurice), C. r. Acad sci., 1956, **243**, № 25, 1991—1993 (франц.)

Рассматривается уравнение Эйлера

$$t^n y^{(n)}(t) + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} t y'(t) + a_n y(t) = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно выбрать так, чтобы преобразование Лапласа уравнения (1) было тождественно этому уравнению. При таком выборе $a_1, \ldots, a_n$ в качестве линейной комбинации функций $f_i(t)$ можно брать общее решение уравнения (1). Например, если корни $r_1, r_2 \ldots, r_n$ характеристического уравнения различны, то линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} A_k t^{r_k}$ преобразуется в $\sum_{k=1}^{n} A_k' s^{r_k}$.

Л. И. Донская

5539. **Об одном линейном дифференциальном уравнении бесконечного порядка. Протасов В. И.,** Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 6, 1189—1192

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{(n)}(x) = f(x), \qquad (1)$$

где a_n — постоянные, $f(x)$ — аналитическая функция. Автор отказывается от обычного предположения характеристической функции уравнения, т. е. функции

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad (2)$$

аналитической в некоторой окрестности начала координат. Он допускает столь быстрый рост коэффициентов a_n, что ряд (2) всюду, кроме начала координат, расходится. В условиях этого основного предположения и некоторых дополнительных ограничений, налагаемых на порядок роста $f(x)$ и ее тип, доказано существование решения уравнения (1). Так, например, доказано, что если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}n = 1/R$ и $f(x)$ имеет порядок роста не выше 1/2 и тип меньше числа $2\sqrt{R_1}$ ($R_1 \leqslant R$), то уравнение (1) имеет решение среди целых функций того же порядка и типа. Приведены примеры. И. П. Макаров

5540. Об особых неподвижных точках обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Фукухара (1 階常微分方程式の不動特異點について. 福原滿洲 雄), 數學, Сугаку, 1955, 7, № 2, 65—74 (японск.)

Подробное изложение содержания работы автора (РЖМат, 1956, 5858). Рассматривается уравнение

$$dy/dx = P(x, y)/Q(x, y), \qquad (1)$$

где P и Q есть взаимно простые полиномы от x и y; x и y — комплексные переменные.

Автор преобразовывает систему координат так, чтобы особая неподвижная точка была перенесена в $x = 0$, тогда уравнение (1) приводится к виду

$$x^{\sigma+1}y' = P(x, y)/Q(x, y), \quad \sigma \geqslant 0.$$

Ли Дя Гон

5541. Об одной теореме Мальмквиста. Кюнци (Sur un théorème de M. J. Malmquist. Künzi Hans-P.), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 7, 866—868 (франц.)

В 1913 г. Мальмквист доказал теорему:

Если дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dz} = R(w, z), \qquad (1)$$

где $R(w, z)$ — рациональная функция от w и z, не приводится к уравнению Риккати

$$\frac{dv}{dz} A_0(z) v^2 + A_1(z) v + A_2(z) \qquad (2)$$

с рациональными коэффициентами при помощи преобразования вида

$$v = \frac{w^n + a_1(z) w^{n-1} + \ldots + a_n(z)}{w^{n-1} + b_1(z) w^{n-2} + \ldots + b_{n-1}(z)}, \qquad (3)$$

в котором коэффициенты $a_1, b_1, \ldots$ суть рациональные функции от z, то всякое решение уравнения (1), имеющее конечное число ветвей, есть алгебраическая функция.

Применяя методы М. Р. Неванлинна, теорию алгеброидных функций М. Сельберга и используя результаты М. Г. Валирона и М. А. Блоха, автор дает (более простое) доказательство этой теоремы в несколько иной форме. Если правая часть уравнения (1) есть рациональная функция от w и z, то либо решения, имеющие конечное число ветвей, суть алгебраические функции, либо (случай алгеброидных функций) уравнение (1) приводится к уравнению Риккати.

Н. М. Матвеев.

5542. О дифференциальном уравнении Блазиуса пограничного слоя пластины. Пуннис (Zur Differentialgleichung der Plattengrenzschicht von Blasius. Punnis B.), Arch. Math., 1956, 7, № 3, 165—171 (нем.)

Исследуется решение $x = \varphi(t)$, $x(0) = \dot{x} = (0) = 0$, $\varphi(0) = 1$ уравнения Блазиуса $\ddot{x} + x\dot{x} = 0$ (Blasius H., Z. Math. und Phys., 1908, 56, 1). Выясняется, что единственной особой точкой $\varphi(t)$ является полюс первого порядка $t = t^*$. Указывается метод оценки t^* (вычислено: $-3{,}13 \leqslant t^* \leqslant -3{,}11$). Библ. 9 назв.

Ю. С. Богданов

5543. Интегрирование одной частной системы двух линейных дифференциальных уравнений и периодичность ее общих интегралов. Альята (Integrazione di particolari sistemi di due equazioni differenziali lineari e periodicità dei loro integrali generali. Agliata Salvatore), Matematiche, 1953, 8, 14—22 (итал.)

Некоторые замечания об интегрировании системы дифференциальных уравнений $y'_1 = a(x) y_1 + b(x) y_2$, $y'_2 = -b(x) y_1 + a(x) y_2$ и условие периодичности.

Ch. Blanc

Перевод из Zbl. Math., 1954, 50, № 61-0, 315.

5544. Оценки расстояний между нулями решений дифференциальных уравнений. Зайдман (Evaluari ale distanței între zerourile soluțiilor ecuațiilor diferențiale. Zaidman S.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» și politehn. București. Ser. științ. natur., 1955, № 6-7, 47—54 (рум.; рез. русск., франц.).

Доказываются две теоремы о единственности решений дифференциальных уравнений n-го порядка, определенных условиями в n точках, лежащих в интервале, не превосходящем некоторой постоянной, зависящей от параметров уравнения.

В третьей теореме доказывается, что расстояние между двумя последовательными нулями решения уравнения $y'' + f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ непрерывна и подчинена условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|; \quad f(x, 0) = 0,$$

удовлетворяет неравенству $b - a > 2\sqrt[4]{3}/\sqrt{L}$.

Н. В. Адамов

5545. Осцилляторность и дисконъюктность для линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Маркус, Мур (Oscillation and disconjugacy for linear differential equations with almost periodic coefficients. Markus Lawrence, Moore Richard A.), Acta math., 1956, 96, № 1-2, 99—123 (англ.)

В основном изучается дифференциальное уравнение

$$y'' + [-a + bp(x)] y = 0, \qquad (1)$$

где a и b — действительные параметры и $p(x)$ — действительная почти периодическая функция.

Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка называется неосцилляторным, если каждое нетривиальное решение его не обращается в нуль для достаточно больших абсцисс; в специальном случае, когда каждое нетривиальное решение уравнения имеет не более одного нуля на интервале $-\infty < x < +\infty$, то данное уравнение называется дисконъюктным (disconjugate). Для уравнения (1) понятие неосцилляторности совпадает с понятием дисконъюктности. Совокупности всех точек (a, b) плоскости параметров, для которых уравнение (1) дисконъюктно, называется областью дисконъюктности этого уравнения. Доказывается, что область D замкнута и выпукла; причем область D

остается неизменной, если в уравнении (1) функцию $p(x)$ заменить на $p^*(x) \in H\{p(x)\}$ такую, что $p(x+h_n) \rightrightarrows p^*(x)$ при $n \to \infty$, равномерно на $-\infty < x < +\infty$ (теорема 1). В дальнейших теоремах, в зависимости от свойств функции $p(x)$, изучается расположение области D в плоскости (a, b) и форма границы Γ_D этой области (теоремы 2—7). Далее выясняются свойства решений уравнения (1) в случаях, если: 1) $(a, b) \in D - \Gamma_D$ и 2) $(a, b) \in \Gamma_D$. В частности, доказывается теорема:

Теорема 10. Если $(a, b) \in D - \Gamma_D$, то уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений вида

$$y_u(x) = e^{\alpha x} \exp \int_0^x \Phi_u(t)\, dt, \qquad (2)$$

$$y_L(x) = e^{-\alpha x} \exp \int_0^x \Phi_L(t)\, dt, \qquad (3)$$

где $\alpha > 0$ и $\Phi_u(x)$, $\Phi_L(x)$ — почти периодические функции со средним значением равным нулю.

Доказательство теоремы 10 основано на использовании поведения решений уравнения Риккати, связанного с уравнением (1).

В конце работы изучается изменение области D в зависимости от возмущений функции $p(x)$. Библ. 13 назв. Б. П. Демидович

5546. **Об одном классе автоколебательных систем.** Волк И. М., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 2, 189—192

Решается задача об автоколебательных системах, описываемых дифференциальными уравнениями вида

$$dx/dt = X(x, y) + \mu [P(\mu, x, y) + cU(c, \mu, x, y; z_1, \ldots, z_m)],$$

$$dy/dt = Y(x, y) + \mu [Q(\mu, x, y) + cV(c, \mu, x, y; z_1, \ldots, z_m)],$$

$$\mu^{-k} = \frac{dz_\nu}{dt} = a_{\nu 1} z_1 + \ldots + a_{\nu m} z_m + P_\nu(x, y) + Z_\nu(c, \mu, x, y; z_1, \ldots, z_m),$$

$$Z_\nu(0, 0, x, y; z_1, \ldots, z_m) = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, m),$$

где правые части не зависят от t; $a_{\nu i}$ — постоянные; c и μ — малые параметры, а число k — может быть как положительным, так и отрицательным. Предполагается, что система

$$d\xi/dt = X(\xi, \eta), \quad d\eta/dt = Y(\xi, \eta)$$

допускает не зависящий от t первый интеграл.

Для этого класса колебательных систем устанавливаются условия возбуждения автоколебаний и указывается практический способ приближенного определения закона автоколебаний при установившемся режиме. Найденные результаты иллюстрируются на конкретной задаче.

Решенная автором задача сводится к вопросу о зависимости (при поставленных автором условиях) периодических решений (предельных циклов) системы дифференциальных уравнений от двух малых параметров, входящих в уравнения этой системы.

И. С. Градштейн

5547. **О дифференциальном уравнении Т. Уно и Р. Йокоми.** Сансоне, Конти (Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi. Sansone G., Conti R.), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **38**, 205—212 (итал.)

Ранее (РЖМат, 1956, 401) авторы рассматривали вопрос о существовании и рождении предельных циклов у дифференциального уравнения Т. Уно и Р. Йокоми

$$dy/dx = -xy[y^2 + (x+1)\{(x-1)^2 + \lambda\}]^{-1}.$$

Усматривая в доказательстве теоремы единственности (см. цитир. работу) неясное место, авторы приводят здесь новое доказательство этой теоремы, основанное на других соображениях. М. И. Ельшин

5548. **Периодическое возбуждение колебательной системы с одной степенью свободы.** Рейссиг (Periodische Erregung eines einfachen Schwingers mit Selbststeuerung. Reissig Rolf), Math. Nachr., 1956, **15**, № 3, 181—190 (нем.)

Пусть в уравнении

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) + g(x) = e(t)$$

1) функции f, g, e непрерывны и таковы, что при любых начальных условиях решение единственно и непрерывно зависит от начальных условий,

2) $e(t)$ имеет период T, $m \leqslant e(t) \leqslant M$;

3) $f(v) \geqslant f_1$ при $v \geqslant V$, $f(v) \leqslant f_0$ при $v \leqslant -V$, $f_1 - f_0 > M - m$; $f \leqslant f(v) \leqslant F$ при $|v| \leqslant V$;

4) $g(x) \geqslant M - f + \eta$ при $x \geqslant X$, $g(x) \leqslant m - F - \eta$ при $x \leqslant -X$.

Тогда существует решение периода T.

Эта теорема обобщает результаты автора (РЖМат, 1957, 3096, 3097). Теорема доказана путем построения на плоскости (x, v) области, из которой решения не выходят, и применения принципа неподвижной точки. Показано также, что такую область нельзя построить, если $\sup f(v) - \inf f(v) < M - m$. А. Ф. Филиппов

5549. **Полная устойчивость и почти периодические колебания.** Массера (Total stability and approximately periodic vibrations. Massera Jose L.), Facultad de Ingenieria Montevideo. Publ. Inst. Mat. Estadística, 1954, **2**, 135—145 (исп.; рез. англ.)

Рассматривается система

$$\dot{x} = F(x, t), \qquad (1)$$

где x—n-компонентный вектор, F достаточно гладкая для того, чтобы обеспечивать существование и единственность решений с заданными начальными условиями, и $F(0, t) \equiv 0$. Решение $x = 0$ вполне устойчиво, если для данного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\| F_1 - F \| \leqslant \delta$ при $\| x \| \leqslant \varepsilon$ и $t \geqslant 0$, и $\dot{x}_1 = F_1(x_1(t), t)$, где $\| x_1(0) \| \leqslant \delta$, то $\sup_{t \geqslant 0} \| x_1(t) \| \leqslant \varepsilon$. Как отмечает автор, это определение соответствует понятию устойчивости при постоянно действующих возмущениях, изучавшемуся И. Г. Малкиным (Прикл. матем. и механика, 1944, 8, 241—245; Amer. Math. Soc. Translation № 88, 1950). Достаточные условия Малкина для полной устойчивости доказаны здесь тоже. Кроме того, если F является T-периодической по t и (1) имеет решение x, которое является T'-периодическим по t, где T и T' несоизмеримы, тогда для того чтобы x было вполне устойчивым достаточно, при некоторых других условиях, чтобы форма $\sum y_i y_j \partial f_j(x(t), t)/\partial x_j$ была определенно отрицательной для $t \geqslant 0$. Другие теоремы включают в себя орбитральную устойчивость и почти периодичность в следующем смысле: $x(t)$ является $\varepsilon+$ — T-периодическим, если для данного $\varepsilon > 0$ существует последовательность t_n, где $t_0 = 0$ и $0 < T - \varepsilon < t_{n+1} - t < T + \varepsilon$, такая, что $|x(t_n + \tau) - x(\tau)| < \varepsilon$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t_{n+1} - t_n$.

F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 957.

5550. **Аналитические инварианты отображения, сохраняющего площадь, вблизи неподвижной точки гиперболического типа.** Мозер (The analytic

invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point. Moser Jürgen), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 4, 673—692 (англ.)

Рассматривается сохраняющее площадь отображение M

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y),$$

где $f(x, y)$, $g(x, y)$ — действительные аналитические функции, определенные в окрестности неподвижной точки, которая предполагается совпадающей с началом $x = y = 0$.

Представим M в виде

$$x_1 = f(x, y) = ax + by + \ldots, \quad y_1 = g(x, y) = cx + dy + \ldots \tag{1}$$

Так как M сохраняет площадь, то $ab - bc = 1$. Предполагается, что собственные числа матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ действительны и различны. Неподвижная точка такого типа называется гиперболической. Собственные числа, очевидно, могут быть записаны в форме λ, λ^{-1}, где $\lambda^2 > 1$. Линейным преобразованием координат (1) можно привести к виду

$$x_1 = f(x, y) = \lambda x + \ldots, \quad y_1 = g(x, y) = \lambda^{-1} y + \ldots \tag{2}$$

Теорема 1. Существует такое сохраняющее площадь аналитическое отображение S

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\xi, \eta), \quad x_1 = \varphi(\xi_1, \eta_1), \\ y &= \psi(\xi, \eta), \quad y_1 = \psi(\xi_1, \eta_1), \end{aligned} \tag{3}$$

определенное в окрестности начала координат, которое приводит (2) к нормальной форме

$$\xi_1 = U(\xi\eta)\,\xi, \quad \eta_1 = U^{-1}(\xi\eta)\,\eta, \tag{4}$$

где $U(\xi\eta)$ — степенный ряд $U_0 + U_2\xi\eta + \ldots$, сходящийся в окрестности начала $\xi = \eta = 0$, причем $U_0 = \lambda$. Если нормальную форму (4) обозначить через N, то утверждение теоремы может быть записано в форме $S^{-1}MS = N$. Одним из следствий теоремы 1 является существование аналитических инвариантов отображения M. Функция $G(x, y)$ называется инвариантной относительно M, если $G(x_1, y_1) = G(x, y)$ и $G(x, y)$ не есть константа. Произведение $\xi\eta$, очевидно, является аналитическим инвариантом отображения (4), поэтому функция $G(x, y)$, определенная равенством $G(x, y) = \xi\eta$, является аналитическим инвариантом для M.

Доказательство теоремы 1 для случая $\lambda > 0$ осуществляется сведением ее к некоторой теореме о канонических системах дифференциальных уравнений.

Рассматривается система

$$\begin{aligned} &\dot{x} = H_y(x, y, t), \\ &\dot{y} = -H_x(x, y, t), \quad H(x, y, t+1) = H(x, y, t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $H(x, y, t)$ — степенной ряд по x, y, сходящийся в окрестности начала, $x^2 + y^2 < \rho_0^2$ ($\rho_0 > 0$ не зависит от t). Коэффициенты H предполагаются периодическими по t с периодом 1 и непрерывными, за исключением, быть может, целых значений t с разрывами 1-го рода.

Далее предполагается, что $x = y = 0$ неустойчивое решение, поэтому H имеет вид

$$H = \omega xy + \ldots,$$

где ω — действительная константа, а точками обозначены члены порядка выше второго.

Решение (5) с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$ может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} x &= f(x_0, y_0, t) = e^{\omega t} x_0 + \ldots \\ y &= g(x_0, y_0, t) = e^{-\omega t} y_0 + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

При $t = 1$ формула (6) определяет отображение M_1, обладающее всеми свойствами отображения (2) с $\lambda = e^{\omega}$. Доказывается, что всякое отображение (2) с $\lambda > 0$ подобным образом порождается системой типа (5).

При $\lambda > 0$ теорема 1 вытекает таким образом из следующей теоремы.

Теорема 2. Существует сохраняющее площадь преобразование

$$x = \varphi(\xi, \eta, t), \quad y = \psi(\xi, \eta, t),$$

приводящее систему (5) к виду

$$\dot{\xi} = F_\eta, \quad \dot{\eta} = -F_\xi,$$

где $F = F(\xi\eta) = \omega\xi\eta + \ldots$ зависит только от произведения $\xi\eta$. Функции $\varphi(\xi, \eta, t)$, $\psi(\xi, \eta, t)$ суть степенные ряды по ξ, η, сходящиеся для $\xi^2 + \eta^2 < \rho_1^2$ и имеющие период 1 по t; коэффициенты φ, ψ непрерывно дифференцируемы, за исключением, быть может, целых значений t, где существует правая и левая производные. В заключение работы доказательство теоремы 1 распространяется на случай $\lambda < 0$. М. И. Грабарь

5551. **Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. Андронов А. А., Леонтович Е. А.,** Матем. сб., 1956, 40, № 2, 179—224

Две дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(x); \tag{1}$$

$$\dot{x} = g(x) \tag{2}$$

(x — двумерный вектор; $f, g \in C^n(G)$; $n \leq \infty$; G — замкнутая область) названы δ-близкими до ранга r ($\leq n$) в G, если $\| \partial^i (f - g)/\partial x^i \| < \delta$, при $x \in g$, $0 \leq i \leq r$.

Проведено глубокое исследование функции последования Пуанкаре в окрестности k-кратного фокуса O, или центра O', или k-кратного предельного цикла L системы (1) и доказано существование ε, $\delta > 0$ таких, что в ε-окрестности соответственно O, или O', или L любая система (2), δ-близкая до ранга $2k + 1$ к (1) (в случае O': $n = \infty$, $f - g$ является полиномом k-й степени), имеет не более k замкнутых траекторий (оценка точная).

Указано, что статья написана в 1937 г. и что часть результатов ее использована в первых работах по грубым системам (Андронов А., Понтрягин Л., Докл. АН СССР, 1937, 14, 247—250, Андронов А., Леонтович Е., Докл. АН СССР, 1938, 21, 427—430; Уч. зап. ГГУ, 1939, вып. 6, 3—24. Библ. 9 назв.

Ю. С. Богданов

5552. **Теория устойчивости дифференциально-разностных уравнений. Белман, Данскин** (The stability theory of differential difference equations. Bellman R., Danskin J. M., Jr), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 107—123 (англ.)

Дана краткая сводка работ по теории устойчивости дифференциально-разностных уравнений. Указаны области асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов для уравнений

$$u'(t) = pu(t) + qu(t-1), \quad u''(t) + pu'(t-1) + qu(t-1) = 0$$

и

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) + ru^{(n)}(t-1) = 0,$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,$$

где p, q и r — постоянные.

Сформулирована теорема Беллмана о возможности исследования на устойчивость по первому приближению тривиального решения уравнения

$$u'(t) = au(t) + bu(t-1) + f(u(t)),$$

где a и b — постоянные, если все корни характеристического квазиполинома отрицательны и $\lim_{u\to 0} f(u)/u = 0$. Библ. 48 назв. Статья содержит много опечаток.

Л. Э. Эльсгольц

5553. Положительные решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Соболь И. М., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 45—56

Изучается асимптотическое поведение неколеблющихся решений линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$y''(x) = M(x)\,y(x - \Delta(x)), \qquad (1)$$

где $M(x)$ и $\Delta(x)$ — непрерывные функции при $a \leqslant x < \infty$, $\Delta(x) \geqslant 0$.

Рассматриваются следующие случаи поведения положительных решений при $x \to \infty$:

(a) $y'(x) \to 0$, $y(x) \to 0$;

(b) $y'(x) \to 0$, $y(x) \to c > 0$;

(c) $y'(x) \to c > 0$, $y(x) \to \infty$;

(d) $y'(x) \to \infty$, $y(x) \to \infty$;

(e) $y'(x) \to 0$, $y(x) \to \infty$.

Результаты работы сведены в таблицы:

1) при $M(x) \geqslant 0$

Ограничения на запаздывание	Возможные типы решений при $A < \infty$	при $A = \infty$
$\Delta x \geqslant 0$	(a), (b), (c), (d)	(a), (b), (c), (d)
$\lim_{x\to\infty}[x - \Delta(x)] = \infty$	(a), (b), (c)	(a), (c), (d)
$\Delta(x)/x \leqslant \varepsilon < 1$	(a), (b), (c)	(a), (d)
$\Delta(x) \equiv 0$	(b), (c)	(a), (d)

где $A = \int_0^\infty x\,|M(x)|\,dx$;

2) при $M(x) \leqslant 0$

Ограничения на запаздывание	Возможные типы решений при $A < \infty$	при $A = \infty$
$\Delta(x) \geqslant 0$	(b), (c)	(b), (c), (e)
$\lim_{x\to\infty}[x - \Delta(x)] = \infty$	(b), (c)	(c), (e)
$\Delta(x)/x \leqslant \varepsilon < 1$	(b), (c)	(e)
$\Delta(x) \equiv 0$	(b), (c)	(e)

Указан ряд примеров, иллюстрирующих различные возможные случаи

Л. Э. Эльсгольц

5554. Существенный спектр для ограниченных и полуограниченных потенциалов. Хартман, Патнам (The essential spectra belonging to bounded and halfbounded potentials. Hartman Philip, Putnam Calvin R.), Duke Math. J., 1956, 23, № 4, 561—570 (англ.)

Рассматривается краевая задача на полуоси $0 \leqslant t < \infty$

$$x''(t) + (\lambda + f(t))\,x(t) = 0,\ x(0)\cos\alpha + x'(0)\sin\alpha = 0.$$

Известно, что предельные точки спектра S' (существенный спектр) не зависят от α. Известно также, что при ограниченной $f(t)$ смежные интервалы к S' убывают при $\lambda \to \infty$, а именно, если $m(\lambda)$ — расстояние от точки $\lambda\,(>0)$ до S', то $m(\lambda) \leqslant C/\sqrt{\lambda}$. В настоящей работе авторы устанавливают теоремы, показывающие, как зависит $m(\lambda)$ от поведения $f(t)$ (и ее производных). В простейшем случае, когда речь идет лишь о самой функции $f(t)$, результат формулируется следующим образом. Пусть

$$\omega_f(t,\ \delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |f(s) - f(t)|;\ \text{и}\ \omega_f(\delta) = \lim_{T\to\infty}\inf \int_0^T \omega_f(t,\ \delta)\,dt.$$

Тогда $m(\lambda) \leqslant C\,\omega_f(\pi/\sqrt{\lambda})$. В частности, если f ограниченной вариации в каждом конечном интервале, то

$$m(\lambda) \leqslant C_1\lambda^{-1/2} \lim_{T\to\infty}\inf \frac{1}{T}\int_0^T |df|.$$

Следовательно, при не слишком больших колебаниях $f(t)$ спектр сплошь заполняет полупрямую $(0 \leqslant \lambda < \infty)$. В качестве еще одного примера приведем оценку в терминах

$$F(t) = \int_0^\infty f(t+s)\,e^{-s}ds \ \text{и}\ G(t) = \int_0^\infty (f(s+t) - f(t))\,e^{-s}ds,$$

именно

$$m(\lambda) \leqslant C \lim_{T\to\infty}\inf \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\omega_G(t;\ \pi/\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\lambda}\,\omega_F(t;\ \pi/\sqrt{\lambda})\right\} dt.$$

Работа примыкает к более ранней работе авторов (Amer. J. Math., 1950, 72, 849—862)

Э. Э. Шноль

5555. Некоторые вопросы спектральной теории систем дифференциальных уравнений. Лидский В. Б., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 218

См. РЖМат, 1956, 3813.

5556. К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи. Орлов С. А., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 3, 538—541

Детально изучается одномерная регулярная краевая задача, порожденная самосопряженным квазидифференциальным выражением порядка $2n$ l_y в интервале $[0,\ b]$, с целью последующего перехода к сингулярной задаче при $b \to \infty$ (Обозначения те же, что и в РЖМат, 1954, 2139). Пусть $L_0^{(b)}$ — минимальный замкнутый симметричный оператор, порожденный этим выражением. Граничные условия самосопряженных расширений этого оператора записываются в виде

$$A\eta^*(y;\ 0) + B\eta^*(y;\ b) = 0.$$

Здесь $\eta_i(y;x) = (y(x), y^{[1]}(x), \ldots, y^{[n-1]}(x), y^{[2n-1]}(x), \ldots, y^{[n]}(x))$ — однострочная матрица, составленная из квазипроизводных функций $y(x)$, A и B — квадратные матрицы порядка $2n$, образующие J-унитарную пару (это означает, что выполнено условие $AJA^* = BJB^*$, где $J = \left\| \begin{matrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{matrix} \right\|$ и, кроме того, ранг матрицы $\|AB\|$ с $4n$ столбцами равен $2n$).

Эффективно строится взаимно однозначное соответствие между унитарными матрицами порядка $2n$

и самосопряженными расширениями оператора $L_0^{(b)}$. Пусть $\Phi(x,\lambda)=(\varphi_1(x,\lambda),\ldots,\varphi_{2n}(x,\lambda))$, где $\varphi_k(x,\lambda)$ — решения уравнения $ly-\lambda y=0$, удовлетворяющие начальным условиям $\eta_i(\varphi_k,0)=\delta_{ik}$, $T(x,\lambda)$ — матрица, у которой k-я строка есть $\eta(\varphi_k,x)$ и

$$\Gamma_b(\lambda)=\left\|\int_0^b \varphi_j(x,\lambda)\,\bar{\varphi}_k(x,\lambda)\,dx\right\|_{j,k=1}^{2n}.$$

Граничные условия всех самосопряженных расширений $L_v^{(b)}$ оператора $L_0^{(b)}$ порождаются J-унитарными парами

$$(A(v,b),\ B(v,b))=(Z_1(v,b)\,J,$$

$$-Z_2(v,b)\,T(b,\lambda_0)\,J)\ (\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0),$$

где $Z_1(v,b)=[-iJ+\Omega(v,b)]/2$; $Z_2(v,b)=[iJ+\Omega(v,b)]/2$ и $\Omega(v,b)=-\dfrac{1}{\lambda_0-\bar{\lambda}_0}\left[\Gamma_b^{-1}(\lambda_0)+\Gamma_b^{-1}(\bar{\lambda}_0)+2\,\Gamma_b^{-1/2}(\bar{\lambda}_0)\,v\,\Gamma_b^{-1/2}(\lambda_0)\right]$, когда v пробегает множество всех унитарных матриц порядка $2n$. Ядро резольвенты операторы $L_v^{(b)}$ представимо в виде

$$R(x,s,\lambda)=\begin{cases}\Phi(s,\lambda)\dfrac{-iJ+\Omega(\lambda,v,b)}{2}\Phi'(x,\lambda);\ 0\leqslant x<s\leqslant b,\\ \Phi(s,\lambda)\dfrac{iJ+\Omega(\lambda,v,b)}{2}\Phi'(x,\lambda);\ 0\leqslant s<x\leqslant b.\end{cases}$$

Матрица $\Omega(\lambda,v,b)$ есть мероморфная неособенная функция λ с вещественными полюсами и неотрицательной мнимой частью в верхней полуплоскости, вычисляемая по формуле

$$\frac{iJ+\Omega(\lambda,v,b)}{2}=iJA^*(A^*+T(b,\lambda)B^*)^{-1}=$$

$$=Z_1^*(v,b)\left[I-(\lambda-\bar{\lambda}_0)\left\|\int_0^b\varphi_j(x,\lambda)\,\bar{\varphi}_k(x,\lambda_0)\,dx\right\|Z_2^*(v,b)\right]^{-1}.$$

Дается классификация резольвент по структуре в зависимости от числа граничных условий, относящихся отдельно к правому и левому концу интервала.

Ю. Л. Далецкий

5557. О топологическом методе исследования асимптотического поведения интегралов дифференциальных уравнений. Важевский (Sur une méthode topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles. Wazewski T.), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954, 3, Groningen—Amsterdam, 1956, 132—139 (франц.)

Обзорный доклад, прочитанный на Всемирном математическом конгрессе в 1954 г. Автор популяризует выдвинутый им в 1947 г. топологический принцип, позволяющий установить наличие решения, погруженного для $t>0$, в некоторую область, на основе анализа свойств множества точек выхода траектории из заданной области. Применяя метод сравнения автору работы, а также его ученикам Р. Альбрехту, З. Миколайской, А. Плисю, З. Шмидтувной удалось обобщить ряд классических теорем об асимтотическом поведении решений в окрестности особой точки. В статье приведена библиография работ за 1951—1954 гг. по этой тематике.

В. В. Немыцкий.

5558. Суммарное число особых точек и предельных циклов дифференциального уравнения. Хас (On the totaln umber of singular points and limit cycles of a differential equation. Haas Felix), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 137—172 (англ.)

Оценивается минимальное число точек покоя различных типов и число предельных циклов динамических систем, заданных на замкнутых двумерных многообразиях.

В первой части статьи иным способом доказывается теорема референта об оценке (Матем. сб., 1950, 26, 215—223) с помощью чисел Бетти минимального числа точек покоя динамической системы, в предположении существования точек покоя лишь простейших типов и отсутствия более сложных предельных множеств.

В последующих частях эти оценки обобщаются на случай более сложных точек покоя, причем допускается наличие предельных циклов и иных предельных множеств.

Окончательные оценки позволяют, зная числа Бетти многообразия и число точек покоя различных типов, оценивать снизу число предельных циклов.

Л. Э. Эльсгольц

5559. Некоторые достаточные условия устойчивости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ли Юе-шэн (微分方程組的解穩定的一些充分條件. 李岳生), 自然科學學報, Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci natur., 1956, № 2, 47—59 (кит.; рез. русск.)

Пусть дана линейная система

$$dx/dt=A(t)\,x,$$

B — симметричная матрица с положительными собственными числами, $C=BA-A'B$ и $\lambda_i(t)$ — корни $\det[C-\lambda B]=0$. Доказано: 1) если $\lambda(t)=\max\limits_i\{\lambda_i(t)\}$ и $\int_0^\infty\lambda(t)\,dt<\infty$, то нулевое решение устойчиво; 2) если $\lambda(t)<-\delta(t)$ и $\int_0^\infty\delta(t)\,dt=\infty$, то устойчивость асимптотическая; 3) если $\mu(t)=\min\limits_i\{\lambda_i(t)\}$ и $\int_0^\infty\mu(t)dt=\infty$, то все ненулевые решения неограничены. Эти результаты не новы (Виноград Р. Э., Докл. АН СССР, 1952, 84, № 2). Аналогичные утверждения доказаны для нелинейной системы

$$dx/dt=X(t,x).$$

Здесь в качестве $A=\|a_{ij}\|$ берется $a_{ij}=\partial X_i(t,\theta x)/\partial x_j$.

Р. Э. Виноград

5560. К теории устойчивости регулируемых систем. Румянцев В. В., Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 6, 714—722

Уравнения системы автоматического регулирования

$$\eta_i'=\sum_{\alpha=1}^n b_{i\alpha}\eta_\alpha+\sum_{\beta=1}^k h_{i\beta}f_\beta(\sigma_\beta),\ \sigma_s=\sum_{i=1}^n j_{\beta i}\eta_i$$

$$(i=1,\ldots,n;\ \beta=1,\ldots,k)$$

при обычных предположениях приводятся к виду, в котором переменные $\eta_{m+1},\ldots,\eta_n$ заменены параметрами $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ $(n=m+k)$.

В том случае, когда уравнения регулируемой системы являются каноническими, а корни характеристического уравнения $|b_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0$ таковы, что $\lambda_1<0,\ldots,\lambda_m<0,\lambda_{m+1}=\ldots=\lambda_n=0$ — простые относительно элементарных делителей λ-матрицы, с помощью функции Ляпунова устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости «в большом» исходной системы.

Работа в этой части является обобщением результатов А. М. Летова и И. Г. Малкина. Отмеченный случай регулируемой системы другим методом был также полностью исследован референтом (РЖМат, 1955, 722).

В другой части работы без предварительного предположения о виде корней характеристического уравнения (и, в частности, при $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$) находятся достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости для

$$f_s(\sigma_s) = [c_s + \varepsilon\varphi_s(\sigma_s)]\,\sigma_s \quad (s = 1, \ldots, k),$$

где ε — некоторый параметр, $\varphi_s(\sigma_s)$ — ограниченные функции, а c_s не зависят от ε. При этом используются некоторые результаты Н. Г. Четаева (РЖМат, 1956 8807 К).

Характерно, что при заданных $\varphi_s(\sigma_s)$ находится область допустимых отклонений параметров, при которых будет асимптотическая устойчивость. В случае других исходных данных конкретной задачи можно найти или значение параметра ε, или границы изменения функций $\varphi_s(\sigma_s)$.

Кроме того, в работе имеется способ нахождения критериев, равносильных условию Гурвица.

Р. А. Спасский

5561. **К устойчивости по Ляпунову линейных систем дифференциальных уравнений. Костин А. В.,** Тр. Одесск. ун-та, сер. матем. н., 1956, 146, № 16, 111—116

Система

$$dx_i/dt = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)\,x_k \qquad (1)$$

сравнивается с треугольной системой

$$d\gamma_i/dt = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)\,\xi_k. \qquad (2)$$

Доказано, что если решения (2) устойчивы и выполнены некоторые интегральные соотношения между ними и отброшенными элементами $P_{ik}(t)$ из (1) (типа неравенств), то и решения (1) устойчивы. Эти соотношения заведомо выполняются, когда отброшенные P_{ik} равны нулю, так что в случае треугольных систем они становятся необходимыми и достаточными для устойчивости.

Р. Э. Виноград

5562. **Мультипликативный интеграл и почти периодическая матрица. Иванов В. Н.,** Докл. АН СССР, 1956, 109, № 5, 902—905

Рассматривается матричное уравнение

$$dY/dt = F(t)\,Y, \qquad (1)$$

где $F(t)$ — почти периодическая матрица в смысле Бора. При некоторых предположениях относительно спектра частот функций, составляющих матрицу $F(t)$ и используя теорию мультипликативных интегралов, автор находит следующее выражение для фундаментальной матрицы решений:

$$X(t)\,X^{-1}(0) = Q(t)\,e^{At}\,Q^{-1}(0),$$

где A есть матрица средних значений коэффициентов системы (1), которая считается заранее приведенной к нормальной жордановой форме:

$$Q(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t), \quad P_k(t) = \sum_{r=0}^{n_k} P_{kr}(t)\,\frac{t^r}{r!},$$

где $P_{kr}(t)$ — почти периодические матрицы в смысле Бора. При некоторых дополнительных предположениях относительно спектра частот элементов $F(t)$ автор утверждает, что $P_k(t)$ есть N-почти периодическая матрица. Доказательства лишь намечены.

В. В. Немыцкий

5563. **Об устойчивости по Ляпунову нелинейных систем дифференциальных уравнений. Гаврилов Н. И.,** Тр. Одесск. ун-та, сер. матем. н., 1956, 146, № 6, 7—11

Рассматривается система

$$dx_i/dt = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)\,x_k + X_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

Предположения относительно X_i по существу сводятся к тому, что они имеют 2-й порядок малости по x_i.

С (1) связываются линейные системы

$$dx_i/dt = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)\,x_k, \qquad (2)$$

$$dy_i/dt = \sum_{k=1}^{n} \bar{P}_{ik}(t)\,y_k, \qquad (3)$$

где $\bar{P}_{ik} = P_{ik} + t^{-q}\delta_{ik}(t)$, $\bar{P}_{ii} = p_{ii} + t^{-q}\delta_{ii}(t) + qt^{-1}$, $\delta_{ik}(t)$ ограничены (обозначения автора несколько подробнее). Система (2) называется сильно устойчивой порядка $q \geqslant 0$, если существуют такие $\delta > 0$, $T \geqslant t_0$, что при любых $|\delta_{ik}(t)| \leqslant \delta$ и $t \geqslant T$ система (3) удовлетворяет детерминантному критерию устойчивости автора (Докл. АН СССР, 1952, 84, № 3, 201—204).

Теорема. Если система (2) сильно устойчива порядка q, то тривиальное решение (1) устойчиво и $x_i(t) = 0\ (t^{-q})$.

Приложение теоремы к случаю нулевых корней при постоянных P_{ik} неясно: в условии участвуют ω_{sk} и γ_{ss}, смысл которых не указан.

Р. Э. Виноград

5564. **К вопросу об обращении теорем второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения. Красовский Н. Н.,** Успехи матем. наук, 1956, 11, № 3, 159—164

Приводится новый метод доказательства известных теорем обращения 2-го метода А. М. Ляпунова, а также доказываются новые теоремы обращения. Приведем, например, теорему о неустойчивости.

Рассмотрим систему

$$dx_i/dt = X_i(x_1, \ldots, x_n, t). \qquad (1)$$

Функции X_i определены в области $0 \leqslant t < +\infty$, $|x_i| < \delta\ (i = 1, \ldots, n)$ имеют там непрерывные производные $\partial X_i/\partial x_j$ и $\partial X_i/\partial t$, причем $X_i(0, \ldots, 0, t) = 0$ при $t \geqslant 0$.

Теорема. Если решение $X = 0$ системы (1) неустойчиво, то в окрестности его существует непрерывно дифференцируемая функция $v(X, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, такая, что при любом $t_0 > 0$ существуют точки, лежащие в сколь угодно малой окрестности $X = 0$ и в этих точках $v > 0$. Производная dv/dt в силу (1) удовлетворяет условию

$$dv/dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\,X_i + \frac{\partial v}{\partial t} = \lambda v + w, \qquad (2)$$

где $\lambda > 0$ постоянная, а $w(x, t) \geqslant 0$.

В. И. Зубов

5565 К. **Курс дифференциальных уравнений. Степанов** (Lehrbuch der Differentialgleichungen. Stepanow W. W., Übers. Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1956, 470 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского 6-го издания (М., Гостехиздат, 1953, 468 стр.).

5566 К. **Лекции по небесной механике. Зигель** (Vorlesungen über Himmelsmechanik. Siegel Carl Ludwig (Grundlehren Math. Wiss. Bd. 85). Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1956, VIII, 212 S., 33 DM) (нем.)

Книга представляет издание лекций, читанных автором в 1951/52 г. Автор — математик по специальности — ставил своей целью развить некоторые идеи

и изложить некоторые результаты, полученные за последние 70 лет в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с приложениями к гамильтоновым системам и особенно к дифференциальным уравнениям задачи трех тел. Как замечает автор в предисловии, выбор материала определялся главным образом его личными вкусами. Следует признать, что этот выбор пал на важнейшие проблемы аналитической небесной механики.

Книга содержит всего три главы, каждая из которых посвящается изложению только одного вопроса, рассматриваемого с полной математической строгостью и часто с различных точек зрения.

Гл. 1 под названием «Задача трех тел» посвящена изложению основных результатов Зундмана и по содержанию может быть разделена на три части. §§ 1—4 этой главы имеют более общий характер и посвящены общим преобразованиям дифференциальных уравнений, рассматриваемых как уравнения некоторой вариационной задачи. Особо важное место занимают канонические преобразования гамильтоновых систем, связанных с уравнением в частных производных Гамильтона—Якоби. § 4 специально посвящен изложению теоремы существования Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального и канонического вида, правые части которых не зависят от времени.

§ 5 и начало § 6 содержат приложение предыдущего материала к дифференциальным уравнениям задачи многих тел, а также теорему Зундмана о необходимых условиях соударения всех тел в один и тот же момент времени. Все тела системы могут столкнуться в один и тот же момент только в том случае, когда все три постоянные площадей равны нулю. Разумеется, тела системы трактуются как материальные точки, подверженные действиям сил только ньютоновского притяжения.

В §§ 6—11 излагаются собственно результаты Зундмана в задаче трех тел. Предполагая, что постоянные площадей задачи трех тел не равны одновременно нулю, т. е. предполагая, что тройной удар невозможен, но возможны соударения двух из трех тел, автор изучает аналитическое поведение решений дифференциальных уравнений задачи для всех значений времени, особенно вблизи момента двойного соударения, когда уравнения перестают быть регулярными.

Затем рассматриваются различные преобразования, регуляризирующие уравнения движения в момент удара, и изучается такое преобразование независимой переменной, которое делает уравнения регулярными для всех моментов времени, каковы бы ни были двойные соударения. Наконец, показывается, что координаты всех трех тел и время могут быть разложены в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по степеням новой независимой переменной, и эти ряды представляют движения трех тел всех значений времени.

Автор отмечает также, что ряды Зундмана, решающие задачу трех тел с математической точки зрения, практически совершенно непригодны вследствие чрезвычайно медленной их сходимости.

Гл. 2 под названием «Периодические решения» рассматривает этот вопрос и в общем виде и в приложениях к некоторым задачам небесной механики.

В § 1 рассматриваются частные решения Лагранжа задачи трех тел, которые при надлежащем выборе начальных условий делаются периодическими (каждое из трех тел описывает кеплерову эллиптическую орбиту вокруг общего центра инерции).

Частные решения Лагранжа могут быть обобщены и распространены также на задачу какого угодно числа тел.

§§ 13, 14, 15 посвящены общему вопросу о существовании периодических решений любой системы дифференциальных уравнений нормального вида, правые части которых не зависят от времени и, сверх того, разложимы в тэйлоровские ряды по степеням зависимых переменных без свободных членов. Предполагая, что линейные уравнения первого приближения допускают периодические решения, исследуется вопрос о близких периодических решениях нелинейных уравнений и, в случае, когда такие решения существуют, они представляются рядами, сходимость которых доказывается.

Главное приложение к общим гамильтоновым системам и, в частности, к уравнениям задачи трех тел. Показывается, что существует бесчисленное множество периодических решений задачи трех тел, близких к лагранжевым решениям.

Содержание этих параграфов представляет в сущности теорию периодических решений, данную А. М. Ляпуновым, но изложенную в оригинальном виде и с собственными доказательствами автора.

§§ 17, 18 посвящены задаче Хилла о нахождении периодических решений в ограниченной задаче трех тел с приложениями к теории Луны. Автор дает также доказательство сходимости рядов Хилла, замечая, что впервые это доказательство дал Винтнер в 1925 г. В действительности, ряды Хилла подробно исследовал еще А. М. Ляпунов в 1896 г., дав строгое доказательство сходимости и оценку погрешности, возникающую при замене рядов конечными суммами.

В § 19 рассматривается теория периодических решений Пуанкаре с приложением к ограниченной задаче трех тел.

§§ 20, 21, 22 посвящены результатам Биркгофа в теории периодических решений, основанных на методе неподвижной точки с приложениями к ограниченной задаче трех тел.

Гл. 3 «Задача об устойчивости» рассматривает вопросы об устойчивости решений дифференциальных уравнений с абстрактной, функционально-теоретической точки зрения. § 23 посвящен функционально-теоретической проблеме центра. Здесь показывается, что устойчивость имеет место только тогда, когда некоторое функциональное уравнение имеет решение в виде сходящегося степенного ряда. В § 24 дается доказательство сходимости. В § 25 рассматривается задача Пуанкаре о центре.

§ 26 посвящен изложению теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости нулевого решения канонической системы.

§ 27 содержит изложение доказательства Дирихле теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, которая является, как известно, частным случаем общих теорем А. М. Ляпунова.

§§ 28, 29 посвящены преобразованиям канонических систем к некоторой нормальной форме и преобразованиям, не изменяющим объема. Общие теоремы этих параграфов прилагаются для изучения устойчивости периодических решений.

Наконец, последний § 30 книги посвящен теореме обращения и ее приложениям к задаче об устойчивости периодических решений.

Книга представляет значительный интерес и может служить хорошим учебным пособием для студентов, аспирантов и для самостоятельного изучения.

Г. Н. Дубошин

5567 К. **Дифференциальные уравнения.** Фагг (Differential equations. Fagg Sidney Vernon. London, Engl. Univ. Press., 1956, X, 11—128 pp., ill., 7 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 341, 11 (англ.)

5568 К. Дифференциальные уравнения. Том I. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гронец (Diferenciálne rovnice. I. diel. Obyčajné diferenciálne rovnice. Hronec Jur. Bratislava, SAV, 1956, 370, (1) s., 30, 80 Kčs), Bibliogr. katalóg ČSR. Slov. knihy, 1956, 7, № 5, 157 (словац.)

5569 К. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Рапопорт И. М. Киев, Изд-во АН СССР, 1954, 290 стр., 19 р. 35 к.

Монография состоит из пяти глав и посвящена систематическому изложению исследований автора по асимптотическим свойствам решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, представляющих собой в некоторых случаях существенные обобщения ранее полученных другими авторами результатов.

В гл. 1 «Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных и разностных уравнений» для специального вида однородных систем дифференциальных и разностных уравнений, матрицы коэффициентов которых представимы в виде суммы диагональной и квадратной матриц, автор, применяя метод последовательных приближений, строит нетривиальные решения в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов и исследует их асимптотическое поведение при неограниченном росте независимой переменной. Здесь же указан ряд элементарных линейных подстановок, которые позволяют привести заданные однородные системы дифференциальных и разностных уравнений к виду, рассматриваемому в монографии. Эти исследования представляют собой развитие и обобщение результатов О. Перрона, Н. Левинсона, Г. Шпета, Н. П. Еругина. В отдельном параграфе этой главы построены решения систем дифференциальных уравнений, содержащих параметр, и исследуется поведение этих решений при неограниченном возрастании последнего.

В гл. 2 «Асимптотическое поведение решений линейного самосопряженного дифференциального уравнения» автор, заменяя самосопряженное уравнение порядка $2n$, коэффициенты которого удовлетворяют некоторым условиям суммируемости, эквивалентной ему системой дифференциальных уравнений и, используя результаты исследований гл. 1, строит решения самосопряженного уравнения в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов и исследует их асимптотику при неограниченном возрастании как независимой переменной, так и наличного в уравнении параметра. Из результатов автора в качестве частных случаев следуют известные классические асимптотические формулы математической физики и более поздние результаты Е. Титчмарша.

Гл. 3 «Асимптотические свойства собственных значений и собственных функций регулярной самосопряженной краевой задачи» посвящена исследованию асимтотического поведения собственных значений и собственных функций регулярной самосопряженной краевой задачи в двух случаях: 1) при неограниченном возрастании длины интервала независимой переменной, на концах которого заданы самосопряженные граничные условия, в предположении, что коэффициенты уравнения определены на всей полуоси и 2) при неограниченном возрастании номера собственного значения и собственной функции в предположении, что интервал независимой переменной остается постоянным и конечным. Отметим при этом, что для самосопряженного уравнения порядка выше второго автору пришлось ввести определенную классификацию решений, удовлетворяющих заданным самосопряженным начальным условиям. Указанная классификация решений, выделяемых заданными самосопряженными начальными условиями, существенно зависит от порядка самосопряженного уравнения. В случае уравнения второго порядка в подобной классификации решений нет необходимости. Исследование данной главы обобщает результаты Б. М. Левитана и Я. Д. Тамаркина.

В гл. 4 «Сингулярная самосопряженная краевая задача» автор строит обобщенное преобразование Фурье, связанное с самосопряженным дифференциальным оператором порядка $2n$, рассмотренным в третьей главе, и устанавливает для него равенство Парсеваля. Отправляясь от последнего, автор формулирует ряд теорем разложения, аналогичных теореме Планшереля из теории интеграла Фурье. Теоремы разложения позволяют установить характер спектра самосопряженного дифференциального оператора. Из этих результатов в качестве частных случаев следуют известные критерии Г. Вейля и Е. Титчмарша о характере спектра дифференциального оператора 2-го порядка. Обобщенное преобразование Фурье, связанное с самосопряженным дифференциальным оператором произвольного четного порядка, изучалось ранее М. Г. Крейном.

В гл. 5 «Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений» автор формулирует некоторые критерии устойчивости по Ляпунову решений, построенных им в гл. 1. Для решений линейной системы однородных дифференциальных уравнений порядка $2n$ с периодическими коэффициентами автор выводит асимптотические формулы распределения зон устойчивости и зон неустойчивости. Эти же результаты иным путем получены М. Г. Крейном. Наконец, автор устанавливает критерий устойчивости по Ляпунову решений линейной системы однородных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой удовлетворяют условию более общему, чем условие периодичности, а именно: коэффициенты системы $a_{ij}(t)$ таковы, что, на всей полуоси $(0, \infty)$, суммируемыми являются $a_{ij}(t+T) - a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, T — постоянная.

Все теоретические рассуждения автора проиллюстрированы многочисленными подробно проанализированными примерами, что облегчает чтение книги.

В конце книги приведена значительная по объему (340 названий) библиография, посвященная вопросам асимптотического поведения решений и устойчивости движения. Н. Я. Лященко

5570 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Беркилл (The theory of ordinary differential equations. Burkill John Charles. Edinburgh—London, Oliver and Boyd, New York, Interscience, 1956, ix, 102 pp., ill., 8 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 340, 9 (англ.)

5571 К. Дифференциальные уравнения для действительных функций. Камке (Differentialgleichungen reeller Funktionen. 3. unveränd. Aufl. Kamke E. Leipzig, Akad. Verl. Ges., 1956, XIV, 442 S., 26. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 46, 3265 (нем.)

5572 К. Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка, и их применение к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. Стеклов В. А. Ред. и коммент. Ландкофа Н. С. Харьков, Харьковск. ун-т, 1956, 138 стр., илл., 4 р. 50 к.

Перевод работы автора, впервые опубликованный на французском языке в 1907 г. в Сообщениях Харьковского математического общества. При переводе были исправлены допущенные в оригинале опечатки и внесены некоторые редакционные поправки. Редактор перевода Н. С. Ландкоф написал к отдельным параграфа-

фам комментарии, которые собраны в конце книги. Имеется портрет автора. М. К. Керимов

5573 Д. **Неколебательность и дисконъюктность в комплексной области.** **Бисак** (Non-oscillation and disconjugacy in the complex domain. Beesack Paul Richard. — Doct. diss. Washington Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 5, 837 (англ.)

В статье идет речь о нулях решений линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$w'' + p(z)\,w = 0, \qquad (1)$$

в котором $p(z)$ есть аналитическая функция в области на комплексной плоскости. Урвнение (1) называется неколебательным в R, если ни одно из его решений не обращается в нуль в области R бесконечное число раз. Оно называется дисконъюктным в R, если оно не имеет решений, обращающихся в нуль в области R более чем один раз. Во введении и в соответствующих других местах статьи кратко говорится о тесной связи этих понятий с теорией однозначных (или m-значных) аналитических функций.

Если частное решение $w(z)$ уравнения (1) обращается в нуль в точке $z = a$ и отлично от нуля во всех других точках области R, содержащей точку $z = a$, то R называется областью, свободной от нулей.

В § 1.3 при помощи одной теоремы сравнения, показывается, как могут быть построены области, свободные от нулей. В § 1.4 приводится несколько теорем о неколебательности с использованием теоремы Е. Хилла в областях, свободных от нулей.

В § 1.5 получены круговые области, свободные от нулей, на основании критерия, совершенно отличного от критерия Хилла. Этот параграф служит также фундаментом для теорем о неколебательности, доказанных в § 1.6. В следующем параграфе даются условия, обеспечивающие отсутствие решений уравнения (1), имеющих более трех нулей в полуплоскости. Этот параграф заканчивается построением максимальной области, свободной от нулей. Теорема § 1.8 дает достаточное условие дисконъюктности уравнения (1) в круговых областях; здесь снова используются идеи § 1.5. С применением частного случая одного интегрального неравенства (доказанного в § 1.1) и построением достаточно широких областей, свободных от нулей, автором получены условия, гарантирующие неколебательность уравнения (1) в окрестности особой точки уравнения. Этот результат есть одно из обобщений известных результатов для вещественного дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)\,y = 0 \quad [p(x) \leqslant a/x^2].$$

Вторая глава более однородна как по результатам, так и по применению способов их получения. Одним из главных результатов является теорема § 2.2, устанавливающая нижнюю границу расстояния между любыми двумя нулями любого решения уравнения (1) в круге $|z| < R$. Этот результат является типичным для результатов большинства теорем гл. II, в которых проблемы для комплексных дифференциальных уравнений сводятся к изучению вещественных уравнений, содержащих параметр. Конец параграфа 2.2. и § 2.3 посвящены следствиям этой теоремы и примерам, в том числе нескольким интересным случаям дисконъюктности. Показывается, что эта теорема содержит некоторые результаты, опубликованные (без доказательства) В. В. Покорным в 1951 г. (В § 2.1 дается доказательство некоторых лемм о вещественных дифференциальных уравнениях, установленных Покорным; эти леммы доказываются обычно путем установления связи между результатами параграфов 2.2 и 2.3). Две теоремы § 2.4 дают критерий, гарантирующий дисконъюктность уравнения (1) в круге $|z| < 1$ при условии, что соответствующее вещественное дифференциальное уравнение (содержащее параметр) дисконъюктно на некотором участке вещественной оси при специальных значениях параметра. Резюме автора

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5574. **Об одном геометрическом приеме интегрирования некоторых уравнений с частными производными второго порядка.** **Винченсини** (Sur un procédé géométrique d'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. Vincensini Paul), Ann. Fac. sci. Marseille, 1953, 22, № 2, 81—90 (франц.)

Дается решение в квадратурах уравнения

$$\Delta_{22}M - \Delta_1 M = \pm 1, \qquad (1)$$

где M — неизвестная функция, а Δ_1 и Δ_{22} — дифференциальные параметры Бельтрами относительно линейного элемента единичной сферы.

Решение основано на том, что с этим уравнением связана нормальная конгруэнция, которая некоторым стандартным преобразованием переводится в конгруэнцию, фокальные полости которой вырождаются в две кривые на единичной сфере. Каждой паре таких кривых соответствует решение уравнения (1).

А. В. Погорелов

5575. **Слабые решения линейных уравнений с частными производными.** **Бохнер** (Weak solutions of linear partial differential equations. Bochner S.), J. math. pures et appl., 1956, **35**, № 3, 193—202 (англ.)

В области S пространства E^n рассматривается оператор $Tf \equiv \sum a_{r_1\ldots r_n}(x)\,D_{r_1\ldots r_n}f$ с коэффициентами класса C^∞. Обычным образом (с помощью пробных функций, равных нулю вне компактного подмножества S) определяется слабое решение уравнения

$$Tf = 0. \qquad (1)$$

Простейший результат заключается в следующем: пусть A относительно замкнутое подмножество S и $S_0 = S - A$ непусто; пусть $f(x)$ задана и локально интегрируема в S_0, а $\bar{f}$ — ее продолжение нулем на S; пусть A_ε — ε-окрестность A, N — порядок оператора T; пусть f — слабое решение уравнения (1) в S_0 и для $\varepsilon \to 0$

$$\int_{S^0 \cap A_\varepsilon} |f(x)|\,dx = o(\varepsilon^N).$$

Тогда $\bar{f}$ является слабым решением уравнения (1) в S. Аналогичные результаты приводятся для функций, удовлетворяющих более сложным условиям, включающим системы операторов, для которых вводятся специальные характеристики.

Назовем уравнение (1) «правильно эллиптическим», если всякое его слабое решение является обычным и решение, равное нулю в окрестности точки, есть тождественный нуль.

Рассматриваются следствия полученных утверждений, связанные с поведением на границе решений подобных уравнений А. А. Дезин

5576. **Некоторые замечания о решении системы Коши для области, внутренней относительно жордановой кривой, если задача рассматривается как задача Коши.** **Оническу** (Cîteva observaţii elementare asupra rezolvării sistemului Cauchy, pentru interiorul unei curbe Jordan, ca o problemă Cauchy. Onicescu O.), An. Univ. «C. I. Parhon.»

Ser. ştiinţ natur., 1956, № 10, 9—13 (рум.; рез. русск., франц.)

Предложен метод определения аналитической функции внутри ограниченной области по ее значениям на границе (регулярность функции внутри не предполагается). Метод основан на разложении функции в ряд по полярному углу. Подробно рассмотрен только случай круга. В случае, когда особенности внутри известны, автор уточняет соотношения между действительной и мнимой частями функции.

М. М. Лаврентьев

5577. О некоторых системах уравнений с частными производными и одной искомой функцией и об одном обобщении теории функций Бесселя и гипергеометрических функций. Дельсарт (Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, et sur une généralisation de la théorie des fonctions de Bessel et des fonctions hypergéométriques. Delsarte Jean), Colloq. Centre belge rech. math. 1, 1953, Paris, 1954, 35—62 (франц.)

Сначала доказывается конечномерность пространства однозначных мероморфных решений системы из p алгебраически независимых линейных однородных уравнений с частными производными любого порядка, с полиномиальными коэффициентами и с одной искомой функцией от p комплексных переменных. Далее приводится следующий общий прием построения такого вида систем, обладающих нетривиальными решениями. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая компактная группа линейных преобразований n-мерного комплексного векторного пространства C^n; $u_1,\ldots,\ u_p$ — однородные непостоянные полиномы, образующие базис совокупности инвариантных относительно $\mathfrak{G}$ полиномов (предполагается, что $p>0$ и что базис алгебраически независим). Пусть U — отображение $(x_1,\ldots,\ x_n)\to(u_1(x_1,\ldots,\ x_n),\ldots,\ u_p(x_1,\ldots,\ x_n))$, $E_p=U(C^n)\subseteq C^p$. Пусть далее $\check{C}^n$ — двойственное C^n пространство $(\xi_1,\ldots,\ \xi_n)$, $\langle x;\ \xi\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\xi_i$, $A^*=\check{A}^{-1}$ $(A\in\mathfrak{G})$, а $\nu_1(\xi_1,\ldots,\ \xi_n),\ldots,\ \nu_p(\xi_1,\ldots,\ \xi_n)$ — базис относительно $\mathfrak{G}^*$ аналогичного вида. Тогда оказывается, что оператор $\nu_j(\partial/\partial x_1,\ldots,\ \partial/\partial x_n)$ $(j=1,\ldots,\ p)$ можно рассматривать действующим в E_p, где он представляет собой линейный дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами (относительно $u_1,\ldots,\ u_p$) и обозначается через Δ_j. Главной функцией Бесселя $J(u_1,\ldots,\ u_p;\ \nu_1,\ldots,\ \nu_p)$ называется результат осреднения функции $\exp\langle x;\ \xi\rangle$ по инвариантной мере $\mathfrak{G}$. Выведена формула для $J(u;\ \nu)\,J(v,\ \nu)$, а также равенства $\Delta_jJ-\nu_jJ=0$ $(j=1,\ldots,\ p)$, которые при любых фиксированных параметрах $\nu_1,\ldots,\ \nu_p$ дают упомянутую выше систему уравнений с нетривиальным решением. Более подробно разбирается случай, когда группа $\mathfrak{G}$ задается преобразованиями $x_i'=a_ix_i$ $(i=1,\ldots,\ n)$, где комплексные числа a_i — произвольные, удовлетворяющие соотношениям $|a_i|=1$, $a_1^{m_{j1}}\ldots a_n^{m_{jn}}=1$, $(j=1,\ldots,\ p)$, а $\|m_{ji}\|$ $(j=1,\ldots,\ p;\ i=1,\ldots,\ n)$ — данная примитивная целочисленная матрица ранга $p<n$. В этом случае главную функцию Бесселя можно записать в виде простого степенного ряда. Другим способом введения функций Бесселя является такой:

$$J_{q_1,\ldots,\ q_n}=(\xi_1x_1)^{q_1}\ldots(\xi_nx_n)^{q_n}\int_{A\in\mathfrak{G}}\exp\langle A(x);\ \xi\rangle a_1^{q_1}\ldots a_n^{q_n}dA,$$

где $q_1\ldots q_n$ — заданные целые числа. Строится система из p уравнений описанного выше вида, которым удовлетворяет функция $J_{q_1,\ldots,\ q_n}$. Эта система уравнений рассматривается и для любых комплексных значений параметров $q_1\ldots q_n$. Строится ряд, формально удовлетворяющий полученной системе уравнений, и при помощи асимптотической оценки его членов выводятся условия того, что на основе этого ряда можно получить регулярное решение этой системы. Приведены примеры, причем в самом простом получаются классические функции Бесселя. Сформулированы проблемы. Совсем кратко указано, что замена $\exp\langle x;\ \xi\rangle$ на функцию $\prod_{i=1}^n(1-\xi_ix_i)^{-\alpha_i}$ приводит к широким обобщениям гипергеометрических функций, которые автор обещает рассмотреть в другой работе.

А. Д. Мышкис

5578. Теоремы качественной теории уравнения в частных производных второго порядка. Скоробогатько В. Я., Укр. матем. ж., 1956, 8, № 4, 435—440

Рассматриваются свойства решения $u(x,\ y)$ уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+c_1(x,\ y)\,u=0;\quad c_1(x,\ y)\geqslant 0 \qquad (1)$$

в области D с кусочно-гладкой границей τ. Пусть $u=0$ на τ и $u>0$ в D. Тогда: 1) если d — внутренний диаметр области D, т. е. диаметр наибольшего круга, который можно вписать в эту область, то

$$\frac{\pi}{\sqrt{\max c_1(x,\ y)}}\leqslant d\leqslant\frac{2\mu_0}{\sqrt{\min c_1(x,\ y)}},$$

где μ_0 — первый нуль функции Бесселя $I_0(x)$ нулевого порядка; 2) если $z(x,\ y)$ — решение уравнения $\Delta z+c_2u=0$ при $c_2>c_1$, то в области D найдется точка, где $z=0$; 3) если $c_1(x,\ y)\to\infty$ для всех точек D, то при достаточно больших значениях $c_1(x,\ y)$ любое решение уравнения (1) имеет нули в любой части области, не обращаясь в нуль тождественно; 4) всякое функционально независимое от $u(x,\ y)$ решение уравнения (1) принимает в области D нулевое значение.

Ю. А. Шашкин

5579. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. Кароль И. Л., Матем. сб., 1956, 38, № 3, 261—282

Для уравнения смешанного типа

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0 \qquad (1)$$

в области D, ограниченной: 1) двумя характеристиками CA и CB уравнения (1), выходящими из точки C полуплоскости $y<0$ и касающимися оси ox в точках A и B, 2) гладкой простой дугой Γ, лежащей в полуплоскости $y>0$ и оканчивающейся в точках A и B, автор рассматривает ряд краевых задач смешанного типа.

В работе показано, что корректность постановки этих задач существенно зависит от величины коэффициента α (который в рассматриваемой работе предполагается постоянным).

А. В. Бицадзе

5580. Построение вариационных методов для эллиптических дифференциальных уравнений. Бирман М. Ш., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 157. См. РЖМат, 1957, 3137; 1956, 2234; 1955, 1852.

5581. Полуограниченные дифференциальные операторы высокого порядка. Реллих (Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung. Rellich Franz), Proc. Internat. Congr., Mathematicians, 1954, 3, Groningen—Amsterdam, 1956, 243—250 (нем.)

Приводится краткий обзор работ, посвященных вопросу о расширении симмерических полуограниченных дифференциальных операторов.

Указывается, что в случае операторов с частными производными из полуограниченности симметрического оператора не следует полуограниченность любого его самосопряженного расширения, как это имеет место в случае операторов с обыкновенными производными.

Далее формулируются принадлежащие автору условия полуограниченности дифференциального оператора с обыкновенными производными и голоморфными коэффициентами. Условия даются в терминах корней характеристического полинома уравнения.

Эти условия привлекаются к исследованию следующего вопроса: какова наибольшая константа c, при которой справедливо неравенство

$$c\int r^{-4}|u|^2\,d\tau \leqslant \int |\Delta u|^2\,d\tau \qquad (1)$$

для всех гладких функций $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, исчезающих в некоторой окрестности нуля и бесконечности.

Выясняется, что при $c > \frac{1}{16}n^2(n-4)^2$ неравенство места не имеет. Если же $c \leqslant \frac{1}{16}n^2(n-4)^2$, то неравенство (1), как было установлено автором ранее (Perturbation theory og eigenvalue problems, Inst. Math. Sci. New. York. Univ. 1953, 121—134), справедливо для всех $n=1, 3, 4,\ldots$ При $n=2$ на функцию u налагаются дополнительные ограничения.

В. Б. Лидский

5582. Об одной эллиптической системе дифференциальных уравнений и ее применение к уравнению Монжа—Ампера. Хейниц (Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Heinz Erhard), Math. Ann., 1956, 131, № 5, 411—428 (нем.)

Рассмотрение ряда вопросов дифференциальной геометрии естественным образом приводит к системе уравнений с частными производными вида

$$\Delta x = a(x,\ y)\left(x_u^2+x_v^2\right)+b(x,\ y)\left(x_uy_u+x_vy_v\right)+$$
$$+\,c(x,\ y)\left(y_u^2+y_v^2\right)+d(x,\ y)\left(x_uy_v-x_vy_u\right),$$
$$\text{(s)}\quad \Delta y = \bar a(x,\ y)\left(x_u^2+x_v^2\right)+\bar b(x,\ y)\left(x_uy_u+x_vy_v\right)+$$
$$+\,\bar c(x,\ y)\left(y_u^2+y_v^2\right)+\bar d(x,\ y)\left(x_uy_v-x_vy_u\right).$$

В частности, такая система появляется при рассмотрении вопроса об изометрическом погружении двумерного риманова многообразия с положительной кривизной в трехмерное евклидово пространство.

Для производных решений $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$ системы (s) и якобиана преобразования плоскости uv в плоскость xy в области G получаются оценки, зависящие только от коэффициентов уравнений и расстояния точки до границы области G.

Этот результат затем используется для получения оценок производных решения уравнения Монжа—Ампера общего вида путем сопоставления ему некоторым образом системы вида (s). А. В. Погорелов

5583. Об ограниченности в L_p производных решений эллиптических уравнений и систем. Кошелев А. И., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 3, 323—325

В ограниченной n-мерной области Ω рассматриваются система уравнений

$$Lu = \sum_{k_1,\ldots,k_{2m}=1}^{n} a^{(k,\ldots,\ k_{2m})}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x_{k_1}\ldots\partial x_{k_{2m}}}+$$
$$+\,Tu = f(x), \qquad (1)$$

эллиптическая в смысле И. Г. Петровского, и ее обобщенные решения $u(x)\in W_p^{2m}(\Omega)$ ($u(x)$ и $f(x)\in L_p(\Omega)$ — N-компонентные вектор-функции, $a^{(k_1\ldots k_{2m})}(x)$ — квадратные матрицы с N строками, T — дифференциальный оператор порядка $2m-1$).

С помощью теоремы Марцинкевича (Marcinkiewicz J., Studia math., 1939, 8, 1—27) доказывается

Теорема 1. Пусть Ω_d — такая внутренняя подобласть Ω, что расстояние от Ω_d до границы Ω не меньше некоторого положительного числа d и $\Omega'\subset\Omega_d$. Если матрицы $a^{k_1\ldots k_{2m}}$ и коэффициенты оператора T непрерывны внутри Ω, то из существования обобщенного решения системы (1) вытекает оценка

$$\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega')} \leqslant B_1\|f\|_{L_p(\Omega_d)}+$$
$$+\,\frac{B_2}{d^{\beta(m,\ n,\ p)}}\sup_{\Omega_{n-1}}\|u\|_{W_1^{(2m-1)}(\Omega_{n-1})} \qquad (2)$$
$$(p>1),$$

где B_1 и B_2 — постоянные, не зависящие от u, f; $\beta(m,\ n,\ p)$ — некоторое положительное число, зависящее только от m, n, p; Ω_{n-1} — $(n-1)$-мерные плоские пересечения области Ω_d.

Далее предполагается, что система (1) сильно эллиптическая в смысле Вишика (Матем. сб., 1951, 29 (71), № 3), граница области Ω достаточно гладкая, а граничные условия для $u(x)$ таковы, что

$$|(Lu,\ u)| < \mu^2\|u\|^2_{W_2^m(\Omega)}. \qquad (3)$$

Тогда последнее слагаемое в правой части неравенства (2) оценивается на основании результатов Фридриха (РЖМат, 1955, 1234) или Гусевой (РЖМат, 1956, 3018) и теоремы вложения С. Л. Соболева через $\|f\|_{L_p(\Omega)}$.

Таким образом устанавливается

Теорема 2. Пусть коэффициенты системы (1) $a^{(k)}(x)$ имеет измеримые и ограниченные производные порядка m в области Ω, коэффициенты оператора T достаточное число раз дифференцируемы и выполнены условия теоремы 1. Если система (1) с граничными условиями, гарантирующими выполнение неравенства (3), имеет обобщенное решение с конечной нормой в $W_p^{2m}(\Omega)$, то справедлива следующая оценка:

$$\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega_p)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\Omega)},$$

где $p>1$, если $m\leqslant 2n$; $p>2n/(n+2m)$, если $m>2n$.

Постоянная C зависит от d, но не зависит от u и f.

О. В. Гусева

5584. Об одной задаче Франкля. Бицадзе А. В., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 6, 1091—1094

Для уравнения

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\,u_{yy}=0 \qquad (1)$$

рассматривается следующая краевая задача, имеющая значение в вопросах газовой динамики (Франкль Ф. И., РЖМех, 1956, 4273).

В области D, ограниченной: а) отрезком AA' $[-1,1]$ оси $x=0$; б) характеристикой $A'C$ уравнения (1) $A'(0,\ -1)$, $C(1,\ 0)$; в) отрезком CB оси $y=0$, $(B(a,\ 0),\ a>1)$; г) гладкой кривой σ, соединяющей точки A и B, — найти непрерывное в $\overline{D}$ решение $u(x,\ y)$ уравнения (1) (при $y\neq 0$, $y\neq -x$), имеющее в $\overline{D}$ непрерывные производные u_x и u_y, кроме, может быть, отрезка OC' характеристики $x+y=0$, $O(0,0)$,

$C'(0,\ 5;\ -0,\ 5)$ и точек A, A', O, C, B, вблизи которых u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы, если краевые значения решения заданы на σ и на CB, а на AA' и удовлетворяет условиям:

$$u_x|_{AA'}=0;\ u(0,\ y)-u(0,\ -y)=f(y);\ -1\leqslant y\leqslant 1,$$

где $f(y)$ — заданная функция.

Устанавливается единственность решения поставленной задачи при условии, что вдоль кривой σ $dy/ds\geqslant 0$, где s — длина дуги σ, отсчитываемая от точки B.

В случае, когда σ совпадает с четвертью окружности $x^2+y^2=1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, используя методы теории функций, автор сводит решение задачи к интегральному уравнению с положительным ядром $K(t,\ y)$ для неизвестной функции $\varphi(y)=u(0,\ y)$, $0\leqslant y\leqslant 1$, разрешимость которого следует из того, что $\int_0^1 K(t,\ y)\,dt=(1-y)/\sqrt{2}<1$, причем предполагается, что краевые данные и $f(y)$ удовлетворяют условию Гёльдера. В случае произвольной кривой σ доказательство существования решения задачи сводится к рассмотренному случаю конформным отображением части D, лежащей в полуплоскости $y<0$, на четверть единичного круга. И. Л. Кароль

5585. **Уравнения Лапласа и гармонические пространства. Лихнерович** (Equations de Laplace et espaces harmoniques. Lichnerowicz A.), Premier Colloq. Centre belge rech. math. 1, 1953, Paris, 1954, 9—23 (франц.)

Краткое изложение основных известных свойств гармонических пространств, связанных с линейными самосопряженными дифференциальными выражениями. n-мерное аналитическое риманово пространство H_n с аналитическим невырожденным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ произвольной сигнатуры называется гармоническим в точке x_0, если вблизи нее $\Delta_2\Omega=f(\Omega)$, где $\Omega=\widehat{x_0x}^2/2$ (вдоль геодезической), а оператор Лапласа

$$\Delta_2 U=g^{\alpha\beta}\left(\partial_{\alpha\beta}U-\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\partial_{\rho}U\right)=|g|^{-1/2}\partial_{\alpha}\left(g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}U\,|g|^{1/2}\right);$$

имеются и другие равносильные условия гармоничности в точке. Пространство называется гармоническим, если оно гармонично в каждой своей точке; тривиально гармоническим, если при этом $f(\Omega)\equiv n$. Тип пространства определяется сигнатурой тензора $g_{\alpha\beta}$ (т. е. типом оператора Δ_2). В эллиптическом случае вводятся нормальные координаты, которые дают возможность получить еще одно условие гармоничности и более простое выражение для f, из которого, в частности, вытекает, что функция f для всех точек $x_0\in H_n$ одна и та же. Гармоническим является всякое пространство, допускающее вблизи любой своей точки x_0 транзитивную группу изометрических преобразований, оставляющих x_0 на месте, в частности, любое пространство постоянной кривизны и некоторые другие пространства. Выводятся формулы Копсона-Руза, связывающие производные коэффициентов связности $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$ в нормальных координатах; из этих формул, в частности, следует, что всякое гармоническое пространство является пространством Эйнштейна со скалярной кривизной $-3nf'(0)/2$ и что пространство H_n приводимо в соответствующем смысле (метрическая квадратичная форма в некоторых локальных координатах расщепляется), только если функция $f(\Omega)$ линейная. Далее в эллиптическом случае получается, что

$$5f''(0)/2+f'^2(0)/(n-1)\leqslant 0,$$

причем равенство имеет место только для пространства постоянной кривизны (для $n=2$, 3 гармонические пространства обязательно имеют постоянную кривизну, а при $n\geqslant 4$ это уже не так). Если H_n тривиально гармоническое, то оно локально евклидово, в противном случае оно неприводимо.

Что касается гармонических пространств нормального гиперболического типа, то оказывается, что все они имеют постоянную кривизну. А. Д. Мышкис

5586. **О задаче Коши для уравнения Лапласа. Лаврентьев М. М.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 6, 819—842

Рассматривается задача определения гармонической функции в плоской или пространственной области по данным Коши на куске границы области. Доказывается устойчивость решения этой задачи в классе ограниченных функций. Даются оценки, характеризующие эту устойчивость. Рассматривается вопрос о построении метода эффективного решения задачи по приближенным данным Коши в следующей постановке: Пусть гармоническая функция u, определенная в ограниченной области D, удовлетворяет там неравенству $\|u\|\leqslant M$. На куске S границы D известны последовательности функций φ_n и ψ_n и чисел α_n, $\beta_n\to 0$ таких, что на S

$$\|u-\varphi_n\|\leqslant\alpha_n;\qquad\|\psi_n-\partial u/\partial\nu\|\leqslant\beta_n,$$

где ν — нормаль к поверхности S (нормы функций здесь и выше понимаются в смысле метрики C или L_2). Исходя только из функций φ_n и ψ_n в области D, строится последовательность функций, сходящихся к функции u. Даются оценки скорости этой сходимости. Рассмотрено три способа решения этой задачи. Часть указанных результатов содержится также в статьях автора (РЖМат, 1957, 452, 1450).

Ю. А. Шашкин

5587. **К теории задач Дирихле. Тауц** (Zur Theorie des Dirichletschen Problems. Tautz G. L.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali, 1954, Roma, 1955, 97—102 (нем.)

Рассматривается задача, в некотором смысле обратная задаче Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в n-мерном пространстве (аналогичные рассмотрения в линейном случае проведены автором в Arch. Math., 1952, 3, 232—250; 361—365; см. также РЖМат, 1955, 245). Пусть задана совокупность непрерывных функций $\{F\}$, замкнутые области определения которых содержатся в фиксированной конечной области. Автор приводит (лишь с совсем краткой идеей доказательства) условия, достаточные для существования эллиптического уравнения $\Phi(x,\ F,\ F_i,\ F_{ij})=0$, которому удовлетворяют заданные функции. Формулировка этого условия занимает около двух страниц: сначала требуется, чтобы для любой функции $F_0\in\{F\}$ существовали такие постоянные $M>0$ и $N>0$, что если граничные значения F_0 оставив непрерывными, изменять меньше чем на M, то для таких значений существует и притом только одна функция $F\in\{F\}$, для которой $|F_0-F|<N$; далее требуется, чтобы абстрактно построенная таким образом операция решения «задачи Дирихле» имела первую вариацию (что дает возможность применить теорию линейного случая) и т. д. А. Д. Мышкис

5588. **Асимптотическое поведение собственных функций и собственных значений задачи Дирихле-Неймана для $-\Delta+z$. Тиссен** (Comportement asymptotique des fonctions et valeurs propres du problème de Dirichlet-Neumann pour $-\Delta+z$. Thyssen M.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 5, 280—292 (франц.)

Предполагается, что на части границы достаточно гладкой n-мерной ограниченной области Ω задаются

данные Дирихле, а на дополнении — данные Неймана. Рассматривается асимптотика собственных функций и собственных значений соответствующей задачи для оператора $-\Delta+z$. Используется разложение по собственным функциям итерированного ядра Грина указанной задачи. К разложению применяется теорема тауберовского типа, устанавливаемая в статье. Получены результаты:

$$\lim_{z\to\infty} z^{-n/2}\sum_{z_k\leqslant z}|u_k(x)|^2=[(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)]^{-1},$$

$$\lim_{z\to\infty} z^{-n/2}\sum_{z_k\leqslant z}u_k(x)\overline{u_k(x_0)}=0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z^{-n/2}N(z)=\frac{\operatorname{mes}\Omega}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)},$$

где x, x_0 — точки Ω, z_k — k — ое собственное значение, $N(z)=\sum_{z_k\leqslant z}1$. А. А. Дезин

5589. Об одном решении задачи Дирихле для некоторых полигональных областей. Минасян Р. С., Докл. АН АрмССР, 1956, 22, № 5, 193—202 (рез. арм.)

Рассматривается задача Дирихле для уравнения $\Delta U=Q(x,y)$ внутри некоторой полигональной области, граница которой содержит только прямые углы. Указанная область разбивается на три прямоугольника и требуется, чтобы при переходе через их внутренние границы решение и его первая нормальная производная были непрерывны. Разлагая решение в ряд Фурье по одной из переменных в каждом прямоугольнике и используя условие сопряжения, автор получает вполне регулярную бесконечную алгебраическую систему. Коэффициенты Фурье искомых функций выражаются через решение этой системы. Автор отмечает без доказательства, что коэффициенты построенных рядов убывают достаточно быстро. Библ. 7 назв.

А. И. Кошелев

5590. О задаче Дирихле в неограниченной области для линейного уравнения второго порядка эллиптического типа. Пини (Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nel domini non limitati. Pini Bruno), Rend. Acad. sci. fis. e mat. Napoli, 1952, **19**, 157—170 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Пусть $x=x(s)$, $y=y(s)$, $0\leqslant s\leqslant L$, — параметрическое представление простой замкнутой кривой C с непрерывной кривизной. Бесконечная область D, границей которой является C, содержит семейство кривых $C(t)\equiv(x=x(s)+ty'(s),\ y=(y(s)-tx'(s))$, $t>0$ достаточно мало. В задаче типа Дирихле для области D и уравнения

$$L(u)\equiv u_{xx}+u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y) \qquad (1)$$

обычно ставятся условия в точках C и на бесконечности. В работе ставятся, вообще говоря, интегральные условия на C и на бесконечность, которые задаются при помощи положительной функции $H(x,y)\in C^2$. Коэффициенты в (1) ограничены, $a,\ b\in C^1$; $c,\ f\in C^0$. Функция $u(x,y)\in C^2$ называется решением обобщенной задачи Дирихле, если $L(u)=f$ в D и $\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}H(u-\varphi)^2_{C(t)}\,ds=0$, где $\varphi(s)\in L^2$ $(0\leqslant s\leqslant L)$ — заданная функция. Доказывается, что если существует постоянная $\mu>0$ такая, что $|H_x|<\mu H$, $|H_y|<\mu H$, $M(H)+cH\leqslant 0$, то в классе функций $u\in C^2(D)$, для которых $\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}(Hu^2)_{\gamma(t)}\,d\vartheta=0$, существует не более одного решения обобщенной задачи Дирихле; здесь $M(u)$ — оператор сопряженный $L(u)$, $\gamma(t)$ — окружность с центром в нуле радиуса $1/t$. Существование решения доказывается при некоторых дополнительных ограничениях, из них существенно следующее: $\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}(H^\varepsilon)_{\gamma(t)}\,d\vartheta=0$ для некоторого ε $(0<\varepsilon<1)$. Аналогичные результаты получены для бесконечной полосы вида $-\infty<x<\infty$, $\delta_1(x)<y<\delta_2(x)$. F. G. Dressel

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 532.

5591. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному. Иванов В. К., Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 6, 793—818

Пусть тело T, звездное относительно некоторой внутренней точки, при заполнении веществом плотности $\mu\equiv 1$ имеет внешний потенциал V. Предполагается, что функции параметрического представления границы S тела T дважды дифференцируемы и их вторые производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\lambda<1$. Вне S определена гармоническая функция V_1, регулярная на бесконечности, удовлетворяющая условию $\lim_{r\to\infty}rV_1>0$ и продолжимая через S внутрь T на расстояние $d>0$. Считая известными тело T, его потенциал V и функцию V_1, автор рассматривает вопрос о нахождении тела T_1, имеющего функцию V_1 своим внешним потенциалом при постоянной плотности единица. В предположении близости потенциалов V и V_1 в смысле некоторой функциональной метрики и достаточной гладкости границы искомого тела доказывается существование и единственность решения задачи, а также дается способ его фактического построения. Для решения задачи автор использует с некоторыми изменениями методы, примененные Лихтенштейном в теории фигур равновесия вращающейся жидкости (Lichtenstein L., Gleichgewichtsfiguren der rotierender Flüssigkeiten, Berlin, 1933). Ю. А. Шашкин

5592. Потенциальная функция. Ньютонов потенциал. Дюшон, Брело (Fonction potentielle. Potentiel Newtonien. Duchon R., Brelot M.), Formulaire math. usage physiciens et ingrs, 1956, № 7, 67—73 (франц.)

Статья содержит: а) определения потенциального поля, работы потенциала, ньютоновского и логарифмического потенциалов, потенциалов простого и двойного слоев, гармонической функции, функции Грина, задач Дирихле и Неймана; б) основные результаты по классической теории потенциала. Статья является частью справочника для физиков и инженеров.

Примечание референта. На стр. 70 содержится неверное утверждение о потенциале двойного слоя с постоянной плотностью на замкнутой поверхности. Х. Л. Смолицкий

5593. О существовании фундаментального решения у уравнений эллиптического типа. Любич Ю. И., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 218

См. РЖМат, 1957, 3144.

5594. Краевая задача для волнового уравнения и теоремы о среднем значении. Протер (A boundary value problem for the wave equation and mean value theorems. Protter M. H.), Ann. Math. Studies, 1954, № 33, 249—257 (англ.)

В конечной области D, ограниченной поверхностями $z=0$, $(z-z_0)^2=x^2+y^2$, $(z-x)^2+(y-y_0)^2=z^2$ $(x_0^2+y_0^2<z_0^2)$, ищется решение уравнения $u_{zz}=u_{xx}+u_{yy}$, заданное на принадлежащих D частях первой и второй (или первой и третьей) поверхностей. При помощи обобщенного метода Римана (РЖМат, 1956, 431) и применения теоремы Асгейрсона о среднем значении эта задача приводится к интегральному

уравнению Абеля, откуда получается, что если краевые значения непрерывно дифференцируемы, то решение краевой задачи существует и единственно. С помощью этого результата доказывается, что функция, непрерывно дифференцируемая в круге $\bar{K}$, полностью определяется своими средними значениями по окружностям $C \subset \bar{K}$, касающимся $\bar{K} \setminus K$ и расположенным вне некоторой фиксированной точки $P \in K$ (или по окружностям $C \subset \bar{K}$, проходящим через P).

А. Д. Мышкис

5595. Об одной краевой задаче для гиперболической системы. Лаврентьев М. М., Матем. сб., 1956, 38, № 4, 451—464

Задачу плоского безвихревого установившегося сверхзвукового течения газа слева направо в полосе $0 \leqslant y \leqslant y(x)$ автор сводит к изучению нелинейного функционального уравнения

$$f(u) = \varphi \int_0^u \cos f(u_1) \cos \Big[f(u_1) - \\ - 2 \sum_{k=1}^{\infty} f(u_1 - 2k) + \delta \Big] du_1 + c, \qquad (1)$$

где f — неизвестная функция, φ — угол наклона касательной к кривой $y = y(x)$, δ — постоянная, зависящая от скорости потока на бесконечности, а c — неизвестная постоянная, зависящая от f.

При соблюдении условий: а) $|\varphi| < \pi/2$, б) $\lim_{x \to \infty} \varphi(x)(4+\varepsilon)^{-x} = 0$, в) $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на всей бесконечной прямой, автор доказывает, что уравнение (1) имеет единственное решение.

Если найденная из (1) функция f не удовлетворяет ни одному из неравенств:

$$-\delta < \sum_{k=0}^{\infty} [f(u+v-2k-1) + \\ + f(u-v-2k-1)] \leqslant \pi/2 - \delta,$$

$$-\pi/2 - \delta < \sum_{k=0}^{\infty} [f(u+v-2k-1) + \\ + f(u-v-2k-1)] < -\delta,$$

то искомое течение не существует. Если же f удовлетворяет одному из таких неравенств или обоим, то существует одно или два течения, соответственно.

А. О. Бицадзе

5596. О некоторых задачах, относящихся к уравнению гиперболического типа с двумя переменными. Чилиберто (Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili. Ciliberto Carlo), Bol. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 3, 383—393 (итал.)

Пусть две кривые содержатся в прямоугольнике $R \equiv [a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d]$ и имеют уравнения $y = \alpha(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$ и $x = \beta(y)$, где $c \leqslant y \leqslant d$. Рассматривается задача об отыскании в R функции $z(x, y)$, имеющей непрерывные производные $\partial z/\partial x = p(x, y)$, $\partial z/\partial y = q(x, y)$, $\partial^2 z/\partial x \partial y = s(x, y)$, удовлетворяющей уравнению $s = f(x, y, z, p, q)$ и условиям $p(x, \alpha(x)) = \mu(x)$, $z(\beta(y), y) = \nu(y)$, где $\mu(x)$ и $\nu(y)$ — заданные функции. Кроме того, рассматривается аналогичная задача о решении того же уравнения при условиях $p(x, \alpha(x)) = \mu(x)$, $q(\beta(y), y) = \nu(y)$, $z(x_0, y_0) = z_0$, где $(x_0, y_0) \in R$, z_0 — заданное число. При некоторых предположениях для этих задач доказываются теоремы существования.

Д. М. Эйдус

5597. О задаче Коши для систем в частных производных первого порядка в гиперболическом случае и двух независимых переменных. Лоясевич (Sur le problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dans le cas hyperbolique de deux variables indépendantes. Łojasiewicz S.), Ann. polon. math., 1956, **3**, № 1, 87—117 (франц.)

Для системы

$$\partial \mathbf{z}/\partial t = \mathbf{f}(t, x, \mathbf{z}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{z} = \{z_1(x, t), \ldots, z_n(x, t)\}, \\ \mathbf{q} = \partial z/\partial x \qquad (1)$$

гиперболического типа (все характеристические числа матрицы $D(t, x, \mathbf{z}, \mathbf{q}) = \| \partial f_i/\partial q_j \|$ вещественны и различны) ставится задача Коши: по заданному $\mathbf{z}_0(x)$ найти решение (1) $\mathbf{z}(x, t)$ так, что $\mathbf{z}(x, 0) = \mathbf{z}_0(x)$. Классы C^1, (C^{1+L}) — совокупности функции, первые производные которых непрерывны (удовлетворяют условию Липшица). Правые части $\mathbf{f}$ рассматриваются двух классов C^{**} и C^*, для которых $\mathbf{f}$, $\partial \mathbf{f}/\partial x$, $\partial \mathbf{f}/\partial z_i$, $\partial \mathbf{f}/\partial q_i$ и соответственно $\mathbf{f}$, $\partial \mathbf{f}/\partial q_i$ непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица относительно x, $\mathbf{z}$, $\mathbf{q}$ и соответственно $\mathbf{z}$, $\mathbf{q}$, а $\partial \mathbf{f}/\partial q_i$ — условиям Липшица по t, x, $\mathbf{z}$, $\mathbf{q}$.

Доказываются теоремы:

Теорема единственности. Пусть для $a \leqslant x \leqslant b$ $\mathbf{z}_0(x) \in C^{1+L}$, $\mathbf{f}(t, x, \mathbf{z}, \mathbf{q}) \in C^*$ в окрестности линии $t = 0$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0(x)$, $\mathbf{q} = \mathbf{z}_0'(x)$ и на самой линии матрица $D(x)$ имеет корни $\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \ldots < \lambda_n(x)$. Пусть $\mathbf{z}_1(t, x)$ и $\mathbf{z}_2(t, x) \in C^{1+L}$ — два решения задачи Коши в области T_ε $(0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \quad a - \alpha t \leqslant x \leqslant b - \beta t)$, $(\alpha < \lambda_1(a), \ \beta > \lambda_n(b))$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $\mathbf{z}_1 \equiv \mathbf{z}_2$ в T_δ.

Добавление: пусть $\mathbf{f} \in C^*$ и $\mathbf{z}(t, x) \in C^{1+L}$ есть решение задачи Коши в области T_c $(0 \leqslant t \leqslant c, \ a(t) \leqslant x \leqslant b(t))$, причем $a'(t) \geqslant -\lambda_1(t, a(t))$, $b'(t) \leqslant -\lambda_n(t, b(t))$, где $\lambda_1(t, x) < \ldots < \lambda_n(t, x)$ — корни матрицы $D(t, x, \mathbf{z}(t, x), \partial \mathbf{z}(t, x)/\partial x)$. Тогда $\mathbf{z}(t, x)$ есть единственное решение задачи Коши. Пусть $\mathbf{z}_0(x)$ и $\mathbf{f}(t, x, \mathbf{z}, \mathbf{q})$ периодичны по x с периодом a; пусть $m > 0$ — целое число, $\Delta x = a/m$, $x^\nu = \nu \Delta x$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$. Наряду с системой (1) рассматривается система nm обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{z}^\nu(t)$,

$$d\mathbf{z}^\nu/dt = f\left(t, x^\nu, \mathbf{z}^\nu, \frac{\mathbf{z}^{\nu+1} - \mathbf{z}^\nu}{\Delta x}\right), \quad (\mathbf{z}^m(t) = \mathbf{z}^0(t)) \qquad (2)$$

с начальными условиями: $\mathbf{z}^\nu(0) = \mathbf{z}_0(x^\nu)$.

Теорема существования. Пусть $\mathbf{f}(t, x, \mathbf{z}, \mathbf{q}) \in C^{**}$ в окрестности U линии $t = 0$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0(x)$, $\mathbf{q} = \mathbf{z}_0'(x)$ и на самой линии положительны все корни матрицы $D(0, x, \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}_0'(x))$. Тогда в некотором интервале $0 \leqslant t \leqslant \delta$ для достаточно больших m существует решение (2), а последовательность функций

$$\mathbf{z}_m(t, x) = \mathbf{z}^\nu(t) + \frac{x - x^\nu}{\Delta x}(\mathbf{z}^{\nu+1}(t) - \mathbf{z}^\nu(t)), \\ x^\nu < x < x^{\nu+1}$$

сходится равномерно в $0 \leqslant t \leqslant \delta$, $0 \leqslant x \leqslant a$, и предел ее есть решение задачи Коши из C^{1+L}. Это решение продолжимо периодически на $-\infty < x < \infty$, и периодическое решение единственно.

Замечание: Предположения о периодичности и положительности корней можно отбросить, если идет речь лишь о существовании решения.

Теорема сходимости: Пусть $f_i(t, x, z, q_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$ не зависит от q_j $(j \neq i)$ и есть возрастающая функция q_i. Пусть решение задачи Коши для

$0 \leqslant t \leqslant s$ $\mathbf{z}(t, x) \in C^1$ и $\mathbf{f}(t, x, \mathbf{z}, \mathbf{q})$ периодичны по x с периодом a. Тогда решение системы (2) существует в $0 < t \leqslant s$ для достаточно больших m и $|\mathbf{z}^\nu(t) - \mathbf{z}(t, x^\nu)| \leqslant \varepsilon_m$, где $\lim \varepsilon_m = 0$.

Требование возрастания f_i по q_i существенно, как показывает приводимый в статье пример. Приведенный в начале статьи пример показывает отсутствие решения задачи Коши в случае, когда первые производные $\mathbf{f}$ не удовлетворяют условиям Липшица.

Х. Л. Смолицкий

5598. О фундаментальных решениях сингулярного оператора Бельтрами. Диас, Вейнштейн (On the fundamental solutions of a singular Beltrami operator. Diaz J. B., Weinstein Alexander), Studies Math. and Mech. New. York, Acad. Press, Inc., 1954, 97—102 (англ.)

Уравнение $\Delta_2 u = 0$, где Δ_2 — оператор Бельтрами в пространстве, определяемом метрикой $ds^2 = y^l (dx_1^2 + \ldots + dx_m^2 + dy^2)$, $l = 2k/(m-1)$, $y > 0$ (k действительное число), имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

Авторы устанавливают, что фундаментальное решение уравнения (1) (с особенностью в точке $(a_1, \ldots, a_m, b)$) может быть записано в форме

$$u^{(k)} = \int_0^\pi \frac{\sin^{k-1}\alpha\, d\alpha}{(r^2 + y^2 + b^2 - 2by\cos\alpha)^{(k+m-1)/2}}$$

для $k > 0$ и $u^{(k)} = y^{1-k} u^{(2-k)}$ — для $k < 1$; $r^2 = (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2$. Отмечается, что для $k < 1$ оно (в форме гипергеометрической функции) было найдено референтом (Докл. АН СССР, 1949, 64, 767—770).

М. Н. Олевский

5599. О сингулярной и регулярной задачах Коши. Диас (On singular and regular Cauchy problems. Diaz J. B.), Communs Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 3, 383—390 (англ.)

Речь идет об относящейся к уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1)$$

задаче Коши:

$$u|_{t=t_0} = f(x_1, \ldots, x_m),\ \partial u/\partial t|_{t=t_0} = 0 \qquad (2)$$

(k — постоянная).

Сообщаются результаты Вейнштейна (Weinstein A., C. r. Acad. sci., Paris, 1952, 234, 2584—2585) Диаса и Вейнбергера (РЖМат, 1955, 248), Блума ($m = 1$, $k = -1, -3, \ldots$) (РЖМат, 1955, 5047), касающиеся задачи (1)—(2) в сингулярном случае, т. е. при $t_0 = 0$, и результаты работы Диаса и Ладфорда (РЖМат, 1956, 8819), относящиеся к задаче (2) (при $t_0 = 0$) для несколько более общего уравнения, чем (1) (при $m = 2$).

Указывается также, что решение соответствующей регулярной ($t_0 > 0$) задачи Коши (1)—(2) было дано в диссертации Дейвиса (РЖМат, 1957, 4033). Приводится пример, указанный Дейвисом ($m = 1$, $k = -2$, $f(x) = x^2$), в котором решение регулярной задачи не стремится при $t_0 \to 0$ к решению соответствующей сингулярной задачи.

М. Н. Олевский

5600. Несколько замечаний об уравнении теплоты. Хилле (Quelques remarques sur l'équation de la chaleur. Hille Einar), Rend. mat. e applic., 1956, **15**, № 1-2, 102—118 (франц.)

Непрерывные функции $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$), для которых существуют конечные пределы при $x \to \pm\infty$ для $f(x)\exp(-|x|^\rho)$, образуют пространство C_ρ ($\rho \geqslant 0$) с нормой

$$\|f\|_\rho = \sup |f(x)| \exp(-|x|^\rho).$$

Если для каждого фиксированного $t > 0$ функция $F(x, t) \in C_\rho$, то $F(x, t)$ порождает абстрактную функцию $F(t)$ со значениями в C_ρ, непрерывность и дифференцируемость которой в дальнейшем понимается только в сильном смысле. Абстрактная задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (1)$$

ставится так: пусть $f(x) \in C_\rho$. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) (в обычном смысле) и порождающую абстрактную функцию $u(t) \in C_\rho$, для которой $\lim_{t\to 0} u(t) = f$ и существует производная $u'(t)$.

Функция $N(x, t) \not\equiv 0$ называется нулевым решением в C_ρ, если $\lim_{t\to 0} \|N(t)\|_\rho = 0$. Интеграл

$$W(x, t; f) = \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) f(x+s)\, ds$$

сходится для $f \in C_\rho$ ($\rho < 2$) и дает решение уравнения (1). Для $\rho = 2$ сходимость обеспечена для $0 < t < 1/4$; для $\rho > 2$ интеграл может не иметь смысла. Доказывается:

1. Пусть $0 \leqslant \rho \leqslant 1$; для $f \in C_\rho$ $W(x, t; f)$ есть единственное решение абстрактной задачи Коши. Нулевых решений нет.

2. Пусть $1 < \rho \leqslant 2$. Если $W(x, t; f) \in C_\rho$ для каждого $t > 0$, то $W(x t; f)$ есть единственное решение абстрактной задачи; существуют функции $f \in C_\rho$, для которых $W(x, t; f)$ не принадлежит C_ρ для каждого $t > 0$ и для таких $f \in C_\rho$ нет решения абстрактной задачи Коши. Нулевых решений нет.

3. Пусть $2 < \rho$. Сомнительно существование решения абстрактной задачи Коши. Имеются нулевые решения.

Для доказательства используются некоторые результаты теории полугрупп.

Х. Л. Смолицкий

5601. Об областях сходимости рядов, представляющих решение некоторых задач о течении газа с осью симметрии. Булах Б. М., Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1956, 52, 3—8

Решается следующая задача динамики идеального сжимаемого газа.

На оси симметрии безвихревого изэнтропического течения, принятой за ось $0X$, задается скорость v_x, как аналитическая функция от x, $v(x, 0) = \varphi(x)$; другая компонента скорости на оси в силу симметрии равна нулю. Требуется определить течение в некоторой окрестности оси $0X$.

В плоском случае компоненты скорости v_x, v_y удовлетворяют системе двух уравнений

$$\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial x,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{2(1-\mu^2) v_x v_y}{1 - \mu^2 v_x^2 - v_y^2}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{v_x^2 + \mu^2 v_y^2 - 1}{1 - \mu^2 v_x^2 - v_y^2}\frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad (1)$$

где v_x, v_y измерены в частях критической скорости звука, $\mu^2 = [\varkappa - 1]/[\varkappa + 1]$, $\varkappa$ — адиабатический индекс.

Решение полученной задачи Коши строится в виде рядов

$$v_x = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(x)\, y^\nu,$$

$$v_y = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu(x)\, y^\nu, \qquad (2)$$

где $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$, $\varphi(x)$ — аналитические функции.

При помощи метода мажорант определяется ширина полосы, в которой ряды (2) сходятся.

Для частного случая $\varphi(x) = 1 + x/n$ при $\varkappa = 1, 4$ (что соответствует воздуху при умеренной температуре), решение доведено до числовых результатов. Аналогичным путем исследуется осесимметричное течение и устанавливается, что окончательная мажорантная задача получается одной и той же как для плоского, так и для осесимметричного случаев. Отсюда вытекает, что и области сходимости рядов, вычисленные с помощью окончательной мажорантной задачи для плоского случая, остаются таковыми же и для осесимметричного. П. Ф. Фильчаков

5602. **Об одном классе обобщенных функций. Бабич В. М.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 145
См. РЖМат, 1955, 1759

5603. **Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера. Березанский Ю. М.,** Успехи матем. наук, 1957, 12, № 1, 147
См. РЖМат, 1955, 1233; 1957, 2350, 4857.

5604 Д. **О некоторых вопросах теории уравнений параболического типа. Зерагия П. К.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Тбилисск. ун-т, Тбилиси, 1957

5605 Д. **О некоторых нелинейных задачах, порождаемых уравнением Фурье. Рубинштейн Л. И.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н. МГУ, М., 1957

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

5606. **Применение гиперматричного алгорифма Эгервари для математического анализа многофазных трансформаторов. Ловаш — Надь** (On an application of Egerváry's hypermatrix-algorism to the mathematical investigation of polyphase transformers. Lovass — Nagy V.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1956, 15, № 4-3, 261—286 (англ.; рез. русск., франц., нем.)

Обозначим через p и s первичную и вторичную обмотки n-фазного трансформатора. Каждая обмотка состоит из n контуров, индуктивно связанных между собою. Пусть r_{pk} и r_{sk} — омические сопротивления k-х контуров соответствующих обмоток, l_{pkl} и l_{skl} — взаимоиндукции между k-м и l-м контурами одной и той же обмотки, а m_{kl} — взаимоиндукция между k-м контуром обмотки p и l-м контуром обмотки s.

Процесс изменения тока описывается матричным дифференциальным уравнением

$$L\,di/dt + Ri = e^{j\omega t}u_0 \qquad (1)$$

и начальным условием

$$i(0) = i_0. \qquad (2)$$

Пусть

$$\sqrt{R}\,L^{-1}\sqrt{R} = T^{-1}AT, \qquad (3)$$

где A — диагональная матрица, R — матрица распределения сопротивлений, L — матрица распределения взаимоиндукций. Предполагается, что $l_{pij} = l_{pji}$; $l_{sij} = l_{sji}$; $m_{ij} = m_{ji}$.

Решение уравнения (1) при условии (2) может быть представлено в виде

$$i(t) = (\sqrt{R})^{-1}\overset{*}{T}e^{-At}T\sqrt{R}\,i_0 -$$
$$-(\sqrt{R})^{-1}\overset{*}{T}\left[A(j\omega E_{2n} + A)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times(E_{2n}e^{j\omega t} - e^{-At})\right]T(\sqrt{R})^{-1}u_0,$$

где E_{2n} — единичная матрица порядка $2n$.

В дальнейшем автор преобразует это матричное уравнение к виду, более удобному для исследования, и применяет к изучению как стационарных, так и переходных процессов для двухфазных и трехфазных трансформаторов. Ю. Л. Рабинович

5607. **Невозможное поведение нелинейных цепей. Даффин** (Impossible behavior of nonlinear networks. Duffin R. J.), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 124—128 (англ.)

5608. **Критерий для амплитуды устойчивости колебаний. Мак-Лейн** (Criteria for the amplitude stability of a power oscillator. MacLean W. R.), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, 2, 161—176 (англ.)

5609. **О смешанном регулировании. Шотлендер** (Über gemischte Regelungen. Schottlaender Stefan), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 9-10, 334—336 (нем.)

Рассматривается уравнение $\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x + \gamma(t) = 0$ и ставится вопрос о выборе функции $\gamma(t)$ так, чтобы она давала возможность регулировать затухание при $0 \leqslant \zeta < 1$, когда функция регулирования $g(t) = \alpha x(t) + \beta\dot{x}(t)$ зависит от параметров α и β. Автор строит ее в виде кусочно-линейной функции, разбивая временной интервал на n частей. М. И. Ельшин

5610. **Метод линейных интегральных операторов Бергмана в теории сжимаемой жидкости. С. Осесимметричное течение и сингулярность. Кшиноблоцкий** (Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. C. Axially symmetric flow and singularities. Krzywoblocki M. Z. E.), Österr. Ingr-Arch., 1954, 8, № 4 237—263 (англ.)

5611. **Дискуссия о сверхзвуковом течении. Мизес** (Discussion on transonic flow. Mises R. von), Trans. Sympos. Appl. Math., 1953. 1, New York, 1954, 145—148 (англ.)

5612. **Деформация материальной оболочки переменной толщины ударной волной. Хадсон** (The deformation of a thin material shell of nonuniform thickness by a detonation wave. Hudson G. E.), Trans. Sympos. Appl. Math., 1953. 1, New York, 1954, 207—222 (англ.)

5613. **Замечание к формуле для скорости перемещения поверхностей. Насыров Р. М.,** Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, 116, № 1, 59—60

Вместо известной формулы для скорости перемещения поверхности $F(x, y, z, t) = 0$, имеющей вид

$$v_n = (-\partial F/\partial t)/|\nabla F|$$

(Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В, Теоретическая гидромеханика, т. II, ГИИТЛ, 1948), предлагается уточненная формула

$$v_n = (-\partial F/\partial t)/(\partial F/\partial n),$$

которая не предполагает обязательного совпадения направлений градиента функции F и нормали n.

В. Л. Данилов

5614. **Основные задачи теории фильтрации. Полубаринова-Кочина П. Я., Чарный И. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М., АН СССР, 1956, 79—82

Краткое изложение обзорного доклада на третьем Всесоюзном математическом съезде (Москва, 25 июня—4 июля 1956 г.)

Рассмотрен следующий круг вопросов: 1. Исследование фильтрации для законов, отличающихся от линейного закона Дарси. 2. Применение аналитической теории линейных дифференциальных уравнений и, в частности, однородного уравнения второго по-

рядка класса Фукса к решению задач фильтрации (прямоугольная перемычка, перемычка в форме прямоугольной трапеции, обтекание шпунта и плоского флютбета в двуслойном грунте, линза пресной воды над соленой и др.). 3. Фильтрация из каналов и приток грунтовых вод к каналам при наличии или отсутствии инфильтрации для конечного и бесконечного грунта. Фильтрация в земляных плотинах. 4. Точные и приближенные методы решения задач о фильтрации под гидротехническими сооружениями в однородном и анизотропном грунтах. Применение вариационных принципов к решению этих задач. 5. Установившийся приток однородной жидкости к скважинам (совершенным, несовершенным и перфорированным) в водных, нефтяных и газовых пластах. Осесимметричные задачи. 6. Неустановившиеся движения однородных жидкостей и газов. Плоские и некоторые пространственные движения при растекании бугра грунтовых вод для линеаризированных граничных условий. Нелинейное уравнение Буссинеска и его автомодельные решения. Приближенные методы решения этих задач. 7. Прямые и обратные задачи о перемещении поверхности раздела между водой и нефтью. В прямых задачах по заданным координатам и дебитам скважин определяется положение поверхности раздела в каждый момент времени. В обратных задачах, т. е. в задачах об управлении контуром нефтеносности, определяются координаты и дебиты скважин так, чтобы движение контура приближалось к заданному наилучшим, в известном смысле, образом. Решение получается из условия минимума «невязки», т. е. отклонения действительного движения от заданного. 8. Движение газированной и неоднородной жидкости в пористой среде и, в частности, движение водно-нефтяных смесей.

П. Ф. Фильчаков

5615. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. Баренблатт Г. И., Вишик М. И., Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 3, 411—417

Рассматривается общий случай распространения грунтовых вод плоскими волнами, при котором напор удовлетворяет уравнению Буссинеска

$$\partial H/\partial t = a^2 \partial^2 H^2/\partial x^2,$$

где a — некоторая константа, определяемая свойствами пористой среды и фильтрующейся жидкости.

Предполагается, что в начальный момент задано распределение напора в полубесконечном пласте ($0 \leqslant x < \infty$) и напор на нулевой границе пласта

$$H(x, 0) = \Phi(x), \quad H(0, t) = \Psi(t),$$

а также, что $\Phi(x) \geqslant 0$, $\Phi(x) \not\equiv 0$ при достаточно больших x и что $\Psi(t)$ — положительная функция.

Доказывается теорема о монотонной зависимости решения рассматриваемой задачи от начальных и граничных условий, которая формулируется следующим образом.

Пусть решению $H^{(1)}(x, t)$ соответствуют функции $\Phi^{(1)}(x)$ и $\Psi^{(1)}(t)$, а решению $H^{(2)}(x, t)$ — функции $\Phi^{(2)}(x)$ и $\Psi^{(2)}(t)$, причем

$$\Phi^{(2)}(x) \geqslant \Phi^{(1)}(x), \quad \Psi^{(2)}(t) \geqslant \Psi^{(1)}(t).$$

Тогда $H^{(2)}(x, t) \geqslant H^{(1)}(x, t)$.

Исходя из этой теоремы, авторы устанавливают конечность скорости распространения возмущенной зоны для любой задачи, соответствующей сформулированным выше условиям, при функции $\Phi(x)$, отличной от нуля лишь на некотором конечном интервале оси x.

Кроме того, доказывается, что если $\Psi(t) \to H_0 = \text{const}$ при $t \to \infty$, то при любой функции $\Phi(x)$ и для любого фиксированного x соответствующее решение $H(x, t)$ при $t \to \infty$ стремится к этой же константе H_0. Библ. 7 назв.

П. Ф. Фильчаков

5616. Об автомодельных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестационарной фильтрации газа в пористой среде. Баренблатт Г. И., Прикл. матем. и механ., 1956, 20, № 6, 761—763

Рассматривается вопрос о существовании и единственности решения дифференциального уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p^2}{\partial r}\right),$$

удовлетворяющего условиям:

$$p(r, 0) = \sigma r^{\alpha}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

$$(\sigma = \text{const} > 0; \quad \alpha = \text{const}\, t > 0)$$

Устанавливается, что при $0 < \alpha < 2$ существует единственное решение для всех неотрицательных значений t и нахождение его сводится к решению задачи Коши для некоторого обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. При $\alpha = 2$ решение находится в конечном виде и существует для $0 \leqslant t < \frac{1}{16 a^2 \sigma}$. При $\alpha > 2$ искомое решение оказывается неединственным, что усматривается из неединственности решения соответствующей краевой задачи для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. В последнем случае постановка задачи (о нестационарной фильтрации газа) теряет физический смысл.

Ю. Д. Соколов

5617. Осесимметричная задача теории упругости для полупространств с круговой линией раздела граничных условий. Уфлянд Я. С., Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 4, 531—533

Приводится новое решение осесимметричной смешанной задачи для упругого полупространства, когда на его границе внутри круга $r=a$ заданы перемещения, а вне круга — напряжения. Используя выражения для перемещений через гармонические функции Папковича—Нейбера, автор получает граничные условия в виде

$$\partial\varphi/\partial z\Big|_{\substack{z=0\\ r<a}} = f_1(r); \quad [(3-4\nu)\Phi - \varphi]_{\substack{z=0\\ r<a}} = f_2(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[2(1-\nu)\Phi - \varphi]_{\substack{z=0\\ r>a}} = f_3(r);$$

$$[(1-2\nu)\Phi - \varphi]_{\substack{z=0\\ r>a}} = f_4(r),$$

где $\Phi(r, z)$, $\varphi(r, z)$ — функции, гармонические в полупространстве $z \geqslant 0$, $f_i(r)$ — известные функции.

Эта краевая задача решается в тороидальных координатах с использованием интегрального разложения Фока—Мелера.

В виде примера рассмотрена задача о давлении плоского круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления.

В. И. Моссаковский

5618. Простое решение задачи кручения Сен-Венана при использовании полиномов Чебышева. Аббасси (Simple solution of Saint-Venant torsion problem by using Tchebycheff polynomials. Abbassi Mohammed M.), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 1, 75—81 (англ.)

5619. Отражение волны цилиндрическим зеркалом. Чеймберс (Reflection of a wave by a cylindrical

mirror. Chambers L l. G.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1956, 9, № 3, 145—150 (англ.)

В цилиндрических координатах (ρ, φ, z) положение бесконечно тонкого зеркала радиуса a задается условиями: $-\alpha < \varphi < \alpha$, $\rho = a$.

Ставится задача о вычислении поля отражения плоской волны $\Psi = e^{ik\rho\cos\varphi}$, падающей на это зеркало при условии идеальной проводимости.

Для решения поставленной задачи используется представление решения волнового уравнения через функцию Грина

$$\Psi = \int_S \left[G \frac{\partial \Psi}{\partial n'} - \frac{\partial G}{\partial n'} \Psi \right] dS', \qquad (1)$$

где n — направление наружной нормали, а для функции Грина G имеет место разложение

$$G = \frac{1}{4} iH_0^{(1)}[k|\rho - \rho'|] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} i \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(k\rho) H_n^{(1)}(k\rho') \cos(\varphi - \varphi'), & \rho < \rho', \\ \frac{1}{4} i \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(k\rho') H_n^{(1)}(k\rho) \cos(\varphi - \varphi'), & \rho > \rho'. \end{cases} \qquad (2)$$

На основании специального вида контура, соответствующего поставленной задаче, Ψ представляется в виде:

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_S,$$

где

$$\Psi_S = \int_{-\alpha}^{\alpha} a d\varphi' G(\rho, a; \varphi, \varphi') \left\{ \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right]_{\rho=a^+} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right]_{\rho=a^-} \right\} \qquad (3)$$

Так как в случае $\rho > a$ поле рассеяния может быть представлено в виде

$$\Psi_S^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \Psi_n^S J_n(ka) H_n^{(1)}(k\rho) \cos n\varphi, \qquad (4)$$

то, приравнивая (3) и (4) при $\rho > a$, получим

$$\Psi_S = \Psi_S^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(ka) H_n^{(1)}(k\rho) \cos n\varphi \Psi_n^S =$$

$$= \frac{1}{4} ika \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(ka) H_n^{(1)}(k\rho) \cos n\varphi \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m X_{mn} Q_m, \qquad (5)$$

где

$$X_{mn}(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos m\varphi' \cos n\varphi' d\varphi' = \frac{\sin(m+n)\alpha}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\alpha}{m-n},$$

$$Q_m = 2\Psi_m^i J_m'(ka) + \Psi_m^S \left[J_m(ka) H_m^{(1)'}(ka) + J_m'(ka) H_m^{(1)}(ka) \right].$$

Откуда получается $N+1$ уравнений для $N+1$ неизвестных Ψ_m^S, $0 \leqslant m \leqslant N$, а именно

$$\sum_{m=0}^{N} \Psi_m^S \left\{ \gamma_{mn}^0 - \varepsilon_m X_{mn}(\alpha) \left[H_m^{(1)'}(k) J_m(ka) + H_m^{(1)}(ka) J_m'(ka) \right] \right\} = \sum_{m=0}^{N} 2\varepsilon_m X_{mn}(\alpha) \Psi_m^i J_m'(ka),$$

$$0 \leqslant n \leqslant N. \qquad (6)$$

Решение системы (6) в общем случае слишком сложно. Могут быть исследованы лишь предельные случаи $\alpha \to \pi$ и $\alpha \to 0$.

Автор замечает также, что его метод можно применить для рассмотрения случая $\Psi = H_z$.

Как известно, поставленная задача еще раньше была решена А. Зоммерфельдом по методу «неоконечательного определения коэффициентов» и изложена в его книге (Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, Изд-во ин. лит., М., 1950, гл. I, § 6; гл. 4, § 24). Автор считает, что метод Зоммерфельда неприемлем по нескольким причинам. Так, например, решение, найденное Зоммерфельдом, не является единственным, кроме того, его предположение, что $\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n g_n \cos n\varphi$ является лучшим приближением к $g(\varphi)$, правильно только в пределах $-\pi < \varphi < \pi$ и неправильно в каких-либо других пределах $\beta < \varphi < \gamma$, где $-\pi < \beta < \gamma < \pi$. Д. З. Авазашвили

5620. Об одном типе неоднородных магнитогидродинамических волн. Нардини (Su un tipo di onde magneto-idrodinamiche non omogenee. Nardini Renato), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 350—358 (итал.)

Идеальная несжимаемая жидкость с бесконечно большой проводимостью помещена в постоянное во времени осесимметричное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, параллельное оси z. Рассматриваются возможные решения уравнений гидродинамики. Уравнения решаются в системе координат кругового цилиндра. При этом делаются следующие предположения: 1) $H_r = 0$, $H_\theta = H_\theta(r, z, t)$, $H_z = |\mathbf{H}_0(r)|$; 2) скорость частиц жидкости $v_r = 0$, $v_\theta = v_\theta(r, z, t)$, $v_z = 0$; 3) давление и потенциал внешних неэлектрических сил не зависят от угла θ. При сделанных предположениях система уравнений допускает интегрирование в общем виде. Решением являются неоднородные волны, поверхности равных фаз и амплитуд которых не совпадают. Доказана единственность решения при дополнительных условиях, наложенных на поле волны. П. П. Бирюлин

5621. Момент количества движения, сообщаемого электромагнитной волной малому эллипсоиду, имеющему проводимость в одном направлении. Торальдо-ди-Франча (Momento di quantità di moto ceduto da un'onda elettromagnetica a un piccolo ellissoide, avente conduttività unidirezionale. Toraldo di Francia Giuliano), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 332—343 (итал.)

5622. Одновременная формулировка релятивистской задачи двух тел. Разделение угловых переменных. Кролыковский, Жевуский (One-time formulation of the relativistic two-body problem. Separation of angular variables. Królikowski W., Rzewuski J.), Nuovo cimento, 1956, 4, № 5, 975—990 (англ.; рез. итал.)

5623. Общее решение уравнений ренормализационной группы. Овсянников Л. В., Докл. АН СССР, 1956, 109, № 6, 1112—1114

5624 К. Математическая теория пластичности. Хилл Р. Перев. с англ., М., Гостехиздат, 1956, 407, стр., илл.; 14 р.

5625 Д. Об интегральных операторах, применяемых при изучении движения сжимаемой жидкости. Уэйсел (On integral operators in compressible fluid flow. Wasel Albert David. — Doct. diss., Stanford Univ., 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 10, 1869—1870 (англ.)

См. также: 5439, 5632, 5711, 5718, 5729, 5924, 5930—5938, 5944

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5626. О «парных» интегральных уравнениях в классе обобщенных функций. Парасюк О. С., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 6, 957—958

Приводится решение уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, k_1(x-t)\, dt + \lambda_1 f(x) = g_1(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, k_2(x-t)\, dt + \lambda_2 f(x) = g_2(x)$$

в предположении, что $k_i(x)$, $g_i(x)$ являются обобщенными функциями, а $g_1(x) = 0$ при $x \geqslant 0$, $g_2(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, а функции $k_i(x)$ имеют ограниченные несущие множества (support). Все функции, в том числе и решения $f(x)$, интегрируемы в классе $C(q, r, 1)$. Свертки $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, k_i(x-t)\, dt$ всегда существуют.

При

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt,$$

$$K_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_m(t)\, e^{ixt}\, dt \quad (m = 1, 2),$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, e^{ixt}\, dt + \int_{0}^{\infty} g_2(x)\, e^{ixt}\, dt \right]$$

получена голоморфная при $y > 0$ и $y < 0$ функция $\Phi(z)$, причем

$$\Phi_+(x) = F(x)\,[\lambda_1 + \sqrt{2\pi} K_1(x)] - G(x), \text{ при } y \to 0,\ y > 0,$$

$$\Phi_-(x) = F(x)\,[\lambda_2 + \sqrt{2\pi} K_2(x)] - G(x) \text{ при } y \to 0,\ y < 0.$$

В результате получается «обобщенная» задача Гильберта: определить кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ из условия $\Phi_+(x) = n(x)\Phi_-(x) + r(x)$, $-\infty < x < \infty$, причем $r(x)$ — обобщенная функция, а $n(x)$ — обычная функция полиномиального роста на бесконечности. Решение этой задачи отличается от классического случая другим определением интеграла типа Коши: интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(x)\, dx}{X_+(x)(x-z)}$ понимается как значение функционала $r(x)$ на функции $\frac{1}{X_+(x)(x-z)}$.

М. К. Номоконов

5627. Об одном обобщении теоремы Г. Жиро. Гегелия Т. Г., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 9, 657—663

Рассматривается сингулярный интеграл

$$\iint_S M(P, Q)\, \varphi(Q)/r^2(P, Q)\, dS_Q. \qquad (1)$$

Предполагается, что поверхность S принадлежит некоторому определяемому автором классу B, более общему, чем класс поверхностей Ляпунова, а функция $\varphi(P)$ подчинена следующим условиям: 1) для всех $P, P_1, P_2 \in S$ и для почти всех $Q \in S$

$$|M(P, Q)| \leqslant C;\ |M(P, Q_1) - M(P, Q_2)| \leqslant \leqslant C r(P_1, P_2)/r(Q, P_2);$$

2) для всех $P \in S$ и $\varepsilon > 0$

$$\left| \iint\limits_{S \cap (r(P, Q) > \varepsilon)} M(Q, P)/r^2(Q, P)\, dS_Q \right| \leqslant C.$$

Устанавливаются некоторые классы функций, которые оператор (1) либо сохраняет, либо переводит соответственно в другие данные классы. Так, если обозначить через $H_\alpha \Lambda_p$ и $h_\gamma \lambda_p$ классы функций $\varphi(p)$, модули непрерывности которых удовлетворяют соотношениям

$$\omega(\delta, \varphi) = O\left(\delta^\alpha \ln^{-p} \frac{1}{\delta}\right),\ \omega(\delta, \varphi) = o\left(\delta^\alpha \ln^{-p} \frac{1}{\delta}\right);$$

$$0 < \alpha \leqslant 1,$$

соответственно, то при $\alpha < 1$ оператор (1) сохраняет класс $H_\alpha \Lambda_p$, а класс $H_1 \Lambda_{p+1}$ переводит в $h_\gamma \lambda_p$.

С. Г. Михлин

5628. Сингулярное интегральное уравнение, содержащее параметр. Хатчер (A singular integral equation containing a parameter. Hatcher J. R.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 9, 651—652 (англ.)

Рассматривается инверсия сингулярного уравнения

$$(\pi i)^{-1} \int_a \cos\lambda(t - t_0)\, g(t)\, \frac{dt}{t - t_0} = f(t_0),\ t_0 \in L, \qquad (1)$$

где L (состоящая из ограниченного числа гладких непересекающихся контуров ограниченной длины $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$) является границей плоскости связанной области, $f(t)$ и $g(t)$ подчиняются условию Гёльдера по L, λ — параметр.

По известному решению уравнения (1) для $\lambda = 0$, при помощи функции типа Гёльдера $G[\lambda(t - t_0)]$ с $G(0) = 1$, строится общее решение

$$g(t_0) = (\pi i)^{-1} \int_L G[\lambda(t - t_0)]\, f(t)\, \frac{dt}{t - t_0}. \qquad (2)$$

Замена $g(t)$ в (1) по формуле (2) и применение преобразования Пуанкаре—Бертрана дают условие, которому удовлетворяет $G(t)$:

$$\int_L f(\xi)\, d\xi \int_L \frac{\cos\lambda(t - t_0)\, G[\lambda(\xi - t)]}{(t - t_0)(\xi - t)}\, dt = 0.$$

Отсюда следует, что $G(t) = \cos t$ и

$$(\pi i)^{-1} \int_L \cos\lambda(t - t_0)\, f(t)\, \frac{dt}{t - t_0} = g(t_0).$$

Указано, что аналогичные результаты имеют место и для других функций $K[\lambda(t - t_0)]$ с $K(0) = 1$.

М. К. Номоконов

5629. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши в классе функций, суммируемых с весом. Хведелидзе Б. В., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 2, 304—307

1. Рассматривается сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)\, \varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t). \qquad (1)$$

Обычным приемом оно сводится к краевой задаче

$$\Phi^+(t) = \frac{a - b}{a + b} \Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a + b}. \qquad (2)$$

Относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ свободного члена $f(t)$ и искомой функции $\varphi(t)$ уравнения (1) делаются такие предположения, чтобы коэффициент $(a - b)/(a + b)$, свободный член $f/(a + b)$ и искомая функция $\Phi(z)$ краевого условия (2) принадлежали к классу функций, рассмотренных в заметке автора

(РЖМат, 1957, 6295), при условии $|\mathrm{Re}\,\lambda_k| < 1$. Опираясь на результаты этой заметки, автор дает полное решение уравнения (1) в рассматриваемом классе $L_p(\Gamma, \omega(t))$ функций.

2. Для полного сингулярного уравнения

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int K(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad (3)$$

а также системы таких уравнений (a, b, K — матрицы, f, φ — векторы) строится регуляризирующий оператор непосредственно по самому уравнению (3), не прибегая к соответствующей краевой задаче. До настоящего времени построения регуляризирующего оператора в случае разрывных коэффициентов или разомкнутых контуров производились только на основе решения краевой задачи.

Полученные результаты дают возможность доказать все теоремы Нетера в рассматриваемом случае.

Ф. Д. Гахов

5630. О симметричных алгебраических интегральных уравнениях. Шмейдлер (Über symmetrische algebraische Integralgleichungen. Schmeidler Werner. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1956, Sar. A—I, № 220, 18 S.) (нем.)

Рассматривается однородный интегростепенной многочлен

$$\varphi(y) = \mu^n y^n(s) - \sum_{\beta=0}^{n-1} \mu^\beta y^\beta(s) \int_0^1 \dots \int_0^1 K_\beta(s, t_1 \dots, t_\nu) \times$$

$$\times\, y^{\beta+1}(t_1) \dots y^{\beta+1}(t_\nu)\,dt_1 \dots dt_\nu$$

нечетной степени n с вещественными ядрами K_β, непрерывными по совокупности аргументов $s, t_i \in [0, 1]$, и симметричными относительно $s, t_1, \dots, t_\nu$. Для того чтобы $\varphi(y)$ был однородным, предполагается $(\beta+1)(\nu+1) = n+1$. Оказывается, что уравнение $\varphi(y) = 0$ является уравнением Эйлера вариационной проблемы о максимуме наибольшего абсолютного значения вещественного корня $z_0(y)$ уравнения

$$z^n - \sum_{\beta=0}^{n-1} z^\beta \int_0^1 \dots \int_0^1 K_\beta(s, t_1, \dots, t_\nu)\, y^{\beta+1}(s) \times$$

$$\times\, y^{\beta+1}(t_1) \dots y^{\beta+1}(t_\nu)\,ds dt_1 \dots dt_\nu = 0$$

при дополнительном условии $\|y\|^{n+1} = \int_0^1 y^{n+1}(s)\,ds = 1$.

При этом $\mu = \max\limits_{\|y\|=1} z_0(y)$. Собственным значением уравнения $\varphi(y) = 0$ называется такое значение $\mu \neq 0$, при котором это уравнение имеет нормированное решение $y(s)$ $\left(\int_0^1 y^{n+1}(s)\,ds = 1\right)$, называемое собственной функцией этого уравнения, соответствующей данному собственному значению. Доказывается, что если для всех нормированных $y(s)$, для которых $z_0(y) \geqslant \mu_0 > 0$, абсолютное значение дискриминанта многочлена $\varphi(y)$ больше $\gamma(\mu_0) > 0$, то уравнение $\varphi(y) = 0$ имеет собственное значение и соответствующую ему непрерывную собственную функцию. Приведен пример, показывающий выполнимость перечисленных условий. При некоторых дополнительных ограничениях доказывается, что множество собственных значений уравнения $\varphi(y) = 0$ не более чем счетно и что все соответствующие им собственные функции непрерывны.

М. М. Вайнберг

5631. К проблеме существования собственных векторов нелинейных операторов. Быков Я. В., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 2, 265—268

Пусть A — нелинейный оператор, действующий в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве H и удовлетворяющий следующему условию: существует в H функционал B такой, что

$$\partial B(h_m)/\partial c_k = (A(h_m), e_k),\ m = 1, 2, 3, \dots (1),$$

где $\{e_n\}$ — полная ортонормальная система в H, $h_m = \sum_{k=1}^m c_k e_k$, $\sum_{k=1}^m c_k^2 = c^2 = \mathrm{const}$.

Теорема 1. Если оператор A слабо непрерывен, т. е. преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, то уравнение $\lambda\varphi = A(\varphi) + f$ имеет решение по крайней мере при одном вещественном значении λ.

Теорема 2. Пусть слабо непрерывный оператор A удовлетворяет условию: $A(0) = 0$, причем, когда $h_m \xrightarrow{\text{сл}} 0$, существует $\lim_{m\to\infty} B(h_m)$. Тогда оператор A имеет не менее счетного числа собственных векторов.

Теорема 3. Система нелинейных уравнений $\lambda\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_D K_{ij}(x, s) H_j(s, \varphi)\,ds$, $i = 1, 2, \dots, n$, имеет не менее счетного числа непрерывных собственных векторов, если выполнены следующие условия:

1. $\int_D \int_D \overline{h}(x) K(x, s) h(s)\,ds\,dx \geqslant 0$, где $K(x, s)$ — квадратная матрица, составленная из ядер K_{ij}, $h(x)$ — произвольная матрица-столбец с интегрируемым квадратом, $\overline{h}(x)$ — соответствующая $h(x)$ матрица-строка.

2. Элементы главной диагонали матрицы $K(x, s)$ непрерывны, а остальные элементы матрицы $K(x, s)$ регулярны в смысле теории линейных интегральных уравнений.

3. Оператор $H(x, \psi)$ удовлетворяет по ψ условию (1) $H(x, 0) \equiv 0$, причем каждой непрерывной вектор-функции $\psi(x)$ с нормой $\|\psi\| = \max\limits_{x\in D} \{|\psi_1(x)| + \dots + |\psi_n(x)|\} \leqslant d$, где d — достаточно малое положительное число, оператор $H(x, \psi)$ ставит в соответствие элемент из $L_{2,n}(D)$.

4. Из равномерной сходимости $\{\psi^{(m)}(x)\}$ к $\psi(x)$ ($\|\psi^n\| \leqslant d$) вытекает сходимость $\{H(x, \psi^{(m)})\}$ к $H(x, \psi)$ в метрике пространства $L_{2,n}(D)$. Данные теоремы применяются к различным нелинейным интегральным уравнениям, для которых формулируются теоремы существования. Доказательства отсутствуют.

М. М. Вайнберг

5632. Решение интегрального уравнения Больцмана—Гильберта. Пекерис (Solution of the Boltzmann—Hilbert integral equation. Pekeris C. L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 9, 661—669 (англ.)

Рассматривается интегральное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\sigma^2}{2}\int\int (f' f_1' - f f_1)\,|\mathbf{gk}|\,d\mathbf{k}d\mathbf{c}_1$$

для определения коэффициентов вязкости, теплопроводности или диффузии в идеальном газе.

Гильберт упростил это уравнение, проинтегрировав по к. Автор раскладывает ядро уравнения Гильберта по сферическим функциям и сводит уравнение — в случае самодиффузии — к линейному неоднородному дифференциальному уравнению 2-го порядка. Численное интегрирование последнего дает для коэффициента самодиффузии результаты, согласующиеся с теми, которые были получены Пиддаком (Pidduck, Proc. London Math. Soc., 1916, 15, 89) другим путем. Указывается, что сведение к дифференциальным уравнениям проводилось и Больцманом.

М. К. Фаге

5633 К. Введение в теорию интегральных уравнений. Лалеску (Introducere la teoria ecuaţiilor integrale. Lalescu Traian. Bucureşti Acad. R. P. R., 1956, 135, p., 5, 90 lei), Bul. bibliogr., 1956, A, № 12, 446 (рум.)

Это переиздание (перевод на румынский язык под редакцией Маринеску (G. Marinescu) книги, вышедшей впервые в Бухаресте в 1911 г. на французском языке и излагающей основные факты теории интегральных уравнений, накопленные к тому времени. Имеются многочисленные ссылки на оригинальные работы и большой список их (164 названия).

В первой части рассматриваются уравнения Вольтерра.

Во второй части излагается теория Фредгольма, а также основные результаты теории Гильберта—Шмидта для симметрических ядер.

Третья часть посвящена некоторым сингулярным уравнениям (главным образом, уравнению Абеля) и простейшим нелинейным уравнениям Вольтерра.

М. К. Фаге

См. также: 5584, 5594, 5544, 5737, 5945

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5634. О необходимых условиях экстремума в вариационном исчислении. Пиконе (Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni. Picone Mauro), Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur. Sez. I, 1954, Ser. 8, 4, № 4, 137—176 (итал.)

Дана функция $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n+1})$, которая определена и непрерывна в замкнутой области E, состоящей из точек $(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n+1})$ $(n \geqslant 0)$. Пусть Γ — множество функций $y(x)$ (или кривых $C: y_0 = y(x)$), каждая из которых определена и непрерывна на конечном сегменте с концами $a[y(x)]$ и $b[y(x)]$, имеет на нем непрерывные производные $y^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и кусочно-непрерывные производные $n+1$-го порядка (в этом случае будем говорить, что $y(x)$ принадлежит классу $C^n D^{n+1}$); кроме того, $y(x)$ удовлетворяет условию: когда x меняется на $[a[y(x)], b[y(x)]]$, точка $[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n+1}(x)]$ не выходит из области E.

Требуется найти условия, которым должна удовлетворять функция из Γ, реализующая минимум функционала

$$I[y(x)] = \int_{a[y(x)]}^{b[y(x)]} f[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n+1)}(x)]dx. \quad (1)$$

Обозначим через $C[a, b]$ допустимую кривую, определенную на $[a, b]$. Пусть $C[\alpha, \beta]$ — какая-нибудь дуга кривой $C[a, b]$.

Будем называть точку $P[x, y(x)]$ кривой C внутренней для дуги $C[\alpha, \beta]$, если $\alpha < x < \beta$; в противном случае она называется концевой точкой (левой концевой, если $x = \alpha$, и правой концевой, если $x = \beta$). Введем обозначения: $f_k \equiv \partial f / \partial y_k$,

$$f_{hk} \equiv \partial^2 f / \partial y_h \partial y_k \quad (h, k = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Будем говорить, что дуга $C[\alpha, \beta]$ кривой $C[a, b]$, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, лежит внутри множества Γ, если существуют такие $n+2$ положительных (конечных или бесконечных) числа $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$, что какова бы ни была функция $z(x) \in C^{(n)} D^{(n+1)}$ на $[\alpha, \beta]$, удовлетворяющая условиям

$$z^{(k)}(\alpha) = z^{(k)}(\beta) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$|z^{(k)}(x)| < \rho_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1),$$

кривая с уравнением

$$y_0 = \begin{cases} y(x) + z(x), & \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ y(x), & a \leqslant x \leqslant \alpha, \ \beta \leqslant x \leqslant b \end{cases} \quad (2)$$

всегда принадлежит Γ. Множество кривых (2) из Γ назовем окрестностью кривой C на $[\alpha, \beta]$ с совокупностью радиусов ρ_k $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ индекса k.

Будем называть точку кривой C внутренней точкой множества Γ, если она лежит внутри некоторой дуги кривой C, в противном случае точка кривой C называется граничной точкой множества Γ.

Автор находит необходимые условия минимума не только в классическом для вариационного исчисления случае, когда все точки кривой, реализующей минимум функционала (1), являются внутренними точками Γ, но и в случае, когда минимум-кривая содержит граничные точки множества Γ.

Основным орудием исследования является понятие точки сгущения, которое вводится следующим образом.

Пусть на $C \in \Gamma$ выбрана точка $P_0[x_0, y(x_0)]$, $x_0 < b$; пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, p_1, p_2, \ldots, p_\nu, p$ — заданные действительные числа, последние $\nu+1$ из которых положительны.

Для любого заданного ε, $|\varepsilon| < (b - x_0) / \left(p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s\right)$, положим

$$x_s = x_0 + \sum_{k=1}^{s} p_k \varepsilon \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$$x_{\nu+1} = x_\nu + p\varepsilon;$$

построим кривую C_ε с уравнением

$$y(x, \varepsilon) = \begin{cases} y(x), & a \leqslant x \leqslant x_0, \\ \eta_s(x, \varepsilon), & x_{s-1} \leqslant x \leqslant x_s, \ s = 1, 2, \ldots, \nu, \\ \zeta(x, \varepsilon), & x_\nu \leqslant x \leqslant x_{\nu+1}, \\ y(x), & x_{\nu+1} \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

где $\eta_s(x, \varepsilon)$ и $\zeta(x, \varepsilon)$ — некоторые (явно выписанные в работе) многочлены, из которых $\eta_s(x, \varepsilon)$ не выше $n+1$-го порядка, а $\zeta(x, \varepsilon)$ не выше $2n+1$-го порядка, удовлетворяющие определенным условиям.

Точка P_0 называется ν-кратной точкой сгущения справа для кривых множества Γ с первыми параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ и вторыми параметрами $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, p$, если для любого малого по абсолютной величине числа ε кривая C_ε принадлежит множеству Γ.

Аналогично определяется ν-кратная точка слева.

При условии непрерывности всех частных производных

$$f_k = \partial f / \partial y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$$

и при некоторых ограничениях, накладываемых на E, доказывается следующая основная теорема:

Теорема 1. Если кривая $C: y_0 = y(x)$ реализует минимум функционала (1) в множестве Γ, то в каждой

ее ν-кратной точке сгущения $P_0[x_0, y(x_0)]$ для кривых Γ справедливо неравенство

$$F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm}), \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, p_1, \ldots, p_\nu, p] \geqslant 0, \qquad (3)$$

где $F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm}), \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, p_1, \ldots, p_\nu, p] =$

$$= \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) - \left(p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s\right) f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm})] + p\int_0^1 f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm}) + \Omega(t)]\, dt;$$

через Q_0 обозначена точка $[x_0, y(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0)]$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ — первые параметры, а $p_1, \ldots, p_\nu$, p — вторые параметры точки сгущения; $\Omega(t)$ — некоторый многочлен, а знаки $+$ или $-$ в (3) относятся к правой или левой точке сгущения.

Ограничиваясь, для простоты, случаем однократных точек сгущения, при котором первым параметром будет λ, вторым параметром p (полагаем $p_1 = 1$), автор доказывает следующие следствия теоремы 1:

Условие Лежандра. Пусть f имеет на E непрерывную частную производную $f_{n+1,\, n+1}$.

Если в точке $P_0[x_0, y(x_0)]$ кривой $C: y_0 = y(x), C \in \Gamma$ удовлетворяется условие

$$F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm}), \lambda, p] \geqslant 0 \qquad (4)$$

при фиксированном p и меняющейся в некоторой окрестности справа (слева) точки $y^{(n+1)}(x_0^{\pm})$ величине λ, то справедливо неравенство $f_{n+1,\, n+1}(R_0^{\pm}) \geqslant 0$, где через $R_0^{\pm}$ обозначена точка

$$[x_0, y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n)}(x_0), y^{(n+1)}(x_0^{\pm})].$$

Условие Вейерштрасса. Если в точке $P_0[x_0, y(x_0)]$ удовлетворяется (4) при фиксированном λ и переменном $p \to \infty$, то справедливо неравенство

$$\mathcal{E}[R_0^{\pm}, \lambda] = f(Q_0, \lambda) - f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm})] - f_{n+1}[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm})][\lambda - y^{(n+1)}(x_0^{\pm})] \geqslant 0.$$

Условие Пиконе. Если в точке $P_0[x_0, y(x_0)]$ удовлетворяется (4) при фиксированном λ и переменном $p \to 0$ и если существуют такие два числа $M(Q_0) > 0$ и $\alpha(Q_0) < 1/(n+1)$, что

$$|f(Q_0, y_{n+1})| < M(Q_0)\,(1 + |y_{n+1}|^{\alpha(Q_0)}),$$

то имеет место следующее неравенство:

$$f(Q_0, \lambda) - f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^{\pm})] \geqslant 0.$$

Доказываются также некоторые следствия найденного автором нового условия (условия Пиконе).

В первой главе работы детально исследован случай интеграла (1), когда $n = 0$, и получены аналогичные результаты (и некоторые другие).

В третьей главе рассмотрен случай интеграла (1), когда y_i $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ являются векторами с компонентами $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ir}$, и доказаны неравенство (4) и условия Лежандра, Вейерштрасса и Пиконе. Чтение работы затрудняется наличием большого числа опечаток. М. К. Керимов

5635. **О необходимых условиях экстремума в вариационном исчислении. Пиконе** (Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni. Picone Mauro), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 283—296 (итал.)

Текст доклада автора, посвященного изложению полученных им результатов по вариационному исчислению (реф. 5634). М. К. Керимов

5636. **Замечание к необходимому условию Пиконе в вариационном исчислении. Гаучи** (Bemerkung zu einer notwendigen Bedingung von Picone in der Variationsrechnung. Gautschi Walter), Comment. math. helv., 1956, 31, № 1, 1—4 (нем.)

Пиконе поставил вопрос: нельзя ли освободиться от ограничений, которые ему пришлось наложить на функцию f и множество E при доказательстве теоремы 1 (реф. 5634).

Автор доказывает теорему 1, накладывая на f только условие непрерывности. М. К. Керимов

5637. **Обобщение необходимого условия Пиконе в случае двойных интегралов. Гаучи** (Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo. Gautschi Walter), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 3, 283—289 (итал.)

Дана функция $f(x, y, z_0, z_1, z_2)$, определенная и непрерывная в замкнутой области E, состоящей из точек (x, y, z_0, z_1, z_2). Через Γ обозначим множество функций $z(x, y)$ (или поверхностей $S: z_0 = z(x, y)$), определенных и непрерывных в области $D(z)$ плоскости (x, y) и имеющих в $D(z)$ кусочно-непрерывные частные производные z_x и z_y. Для любой $(x, y) \in D(z)$ точка $\{x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)\}$ не выходит из E.

Требуется найти условия, которым должна удовлетворять функция $z(x, y) \in \Gamma$, реализующая минимум функционала

$$I[z(x, y)] = \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y)\, dxdy. \qquad (1)$$

Используя метод Пиконе (реф. 5634), автор вводит понятие точки сгущения и доказывает аналог теоремы 1 (реф. 5634), условия Лежандра, Вейерштрасса и Пиконе. Подробное доказательство теоремы 1 не приводится. М. К. Керимов

5638. **Методы пространства Гильберта в вариационной теории и численном анализе. Хестинс** (Hilbert space methods in variational theory and numerical analysis. Hestenes Magnus R.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954. Vol. 3. Groningen—Amsterdam, 1956, 229—236 (англ.)

Доклад автора на конгрессе. Формулируются следующие две вариационные задачи о квадратичных функционалах:

1) Изучить свойства функционала

$$J(x) = K(x) + \int_a^b 2\omega(t, x, \dot{x})\, dt$$

в классе $\mathfrak{A}$ кривых с уравнениями

$$x = x^j(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b;\ j = 1, \ldots, n),$$

где $x^j(t)$ — абсолютно непрерывная функция с интегрируемым квадратом производной функции $\dot{x}^j(t)$, причем $K(x)$ — некоторая квадратичная форма от значений x на концах интервала (a, b) и

$$2\omega = P_{jk}x^j x^k + 2Q_{jk}x^j\dot{x}^k + R_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k.$$

После введения скалярного произведения

$$(x, y) = x^j(a)\, y^j(a) + \int_a^b \dot{x}^j(t)\, \dot{y}^j(t)\, dt$$

класс $\mathfrak{A}$ превращается в пространство Гильберта.

2) Изучить свойства функционала

$$J(x) = K + \int_T R_{jk}^{\alpha_1 \ldots \alpha_r\ \beta_1 \ldots \beta_r}(t)\, x^j_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} x^k_{\beta_1 \ldots \beta_r}\, dt$$

в классе $\mathfrak{A}$ всех функций

$$x = x^j(t) \quad (t \in T,\ j = 1, \ldots, n),$$

непрерывных с непрерывными производными до r-го порядка включительно в ограниченной открытой области T пространства переменных $(t^1, \ldots, t^m)$, причем $K(x)$, в частности, может быть квадратичной формой от $x^j(t)$ и их производных, а

$$x^j_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \frac{\partial^r x^j}{\partial t^{\alpha_1} \ldots \partial t^{\alpha_r}}.$$

После введения скалярного произведения

$$(x, y) = \int_T \left\{ x^j(t)\, y^j(t) + x^j_k(t)\, y^j_k(t) \right\} dt,$$

где последние члены под интегралом представляют собой сумму соответствующих производных порядка $\leqslant r$, $\mathfrak{A}$ становится пространством Гильберта.

Для каждого подпространства $\mathfrak{B}$ пространства $\mathfrak{A}$ вводится J-ортогональное дополнение $J\mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}$, состоящее из всех элементов $x \in \mathfrak{A}$, для которых $J(x, y) = 0$ при всех $y \in \mathfrak{B}$. Здесь $J(x, y)$ — ограниченная билинейная форма в $\mathfrak{A}$, связанная с квадратичной формой $J(x)$. Если в задаче 1) за $\mathfrak{B}$ принять класс функций, образующихся в нуль в точках $t = a$ и $t = b$, то J-ортогональное дополнение состоит из экстремалей, т. е. решений уравнений Эйлера $\frac{d}{dt}\omega_{\dot{x}^j} = \omega_{x^j}$.

Вводится много других понятий и дается интерпретация вопросов вариационного исчисления в терминах этих понятий (например, введенное автором понятие эллиптичности для $J(x)$ в $\mathfrak{A}$ эквивалентно усиленному условию Лежандра).

Введенные понятия распространяются на нелинейные задачи вариационного исчисления. Наконец, дается один минимаксный принцип и некоторые применения полученных результатов к численным методам анализа.

М. К. Керимов

5639. Применение метода Пфаффа в теоретической физике. М у ш и ц к и й (Примена Pfaff-ове методе у теориској физици. М у ш и ц к и Ђ о р ђ е), Зб. радова. Српска АН, 1956, 50, 179—218 (сербохорв.; рез. франц.)

Даны функции $X_l = X_l(x_i, \xi_s, x_{is})$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, где $x_i = x_i(t_j, \xi_s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, t_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — независимые переменные, а ξ_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ — параметры.

Выражение $\Phi = \sum_{i=1}^n X_i \delta x_i$ называется обобщенной формой Пфаффа; здесь $\delta x_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \delta t_j$. С формой Φ связаны обобщенные уравнения Пфаффа

$$\delta X_i = \delta \Phi / \delta x_i$$

или

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta X_j}{\delta x_i} - \frac{\delta X_i}{\delta x_j} \right) \delta x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Формулируется вариационный принцип Пфаффа: всякое физическое явление, для которого можно определить кинетическую и потенциальную энергии, описывается обобщенными уравнениями Пфаффа, если в качестве обобщенной формы Пфаффа взять выражение $\Phi = L\delta t$, где $L\delta t$ — элемент действия, относящийся к единице объема, L — разность кинетической и потенциальной энергий.

Доказывается, что для данного явления принцип Пфаффа эквивалентен принципу Гамильтона—Остроградского, а обобщенные уравнения Пфаффа для первого совпадают с уравнениями Эйлера—Лагранжа для второго.

Применяя принцип Пфаффа, автор выводит различные уравнения теоретической физики (уравнение движения электрона, уравнение Шрёдингера и др.).

М. К. Керимов

5640. Вариационный принцип Швингера для квантовой задачи рассеяния в одном измерении. Д о л ф, Р и т т (The Schwinger variational principles for one-dimensional quantum scattering. D o l p h C. L., R i t t R. K.), Math. Z., 1956, 65, № 3, 309—326 (англ.)

Сделана попытка строгого обоснования вариационного принципа Швингера для задач рассеяния (Schwinger J., Levine H., Phys. Rev., 1948, 74, 958—974) в случае задачи в одном измерении.

Пусть $\omega(x)$ — решение уравнения

$$\omega'' + [k^2 - V(x)]\,\omega = 0$$

при граничных условиях:

$$\lim_{x \to \infty} [\omega' - ik\omega] = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\omega' + ik\omega]\, e^{-ikx} = 2ik.$$

Для нахождения величины

$$\frac{1}{\lambda_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\, V(x)\, e^{-ikx} dx$$

можно применять вариационный принцип Швингера и найти λ_1 как стационарное значение соответствующим образом нормированной билинейной интегральной формы.

Доказано следующее достаточное условие выполнения вариационного принципа Швингера:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, dx < 2k.$$

В случае, если $\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, dx \geqslant 2k$, необходимо для выполнимости принципа Швингера наложить добавочные условия на $V(x)$. Показано, например, что для потенциала

$$V(x) = \begin{cases} 12\pi^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

вариационный принцип Швингера не имеет места.

О. С. Парасюк

См. также: 5285, 5812, 5893, 5894, 5900, 5901, 5928

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

5641. Элементы аналитической теории тригонометрических функций. (Метод. очерк). Б о я р ч у к А. И., Уч. зап. Грозненск. гос. пед. ин-та, 1956, № 7, 74—87

Рассматривая решение (методом последовательных приближений) дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ при соответствующих начальных условиях, автор приходит к известному определению $\sin x$ и $\cos x$ (формулы Эйлера) и других тригонометрических функций.

Дается вывод формул сложения тригонометрических функций (для учащихся средней школы).

Новых результатов не содержится. Имеются опечатки.
В. К. Захаров

5642. Изучение уравнения $x^{y/x}=y^{x/y}$. **Амичи** (Studio dell'equazione $x^{y/x}=y^{x/y}$. Amici Andrea), Ricerca, 1956, 7, genn.-giugno, 59—63 (итал.)

5643. Сравнение среднего арифметического и среднего геометрического. Девиде (Ein Vergleich des arithmetischen und geometrischen Mittels. Devidé Vladimir), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, 11, № 1, 23—24 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Доказывается неравенство:

$$\left(\sum_0^{n-1}(n-i)\,d_i\right)^n \geqslant n^n \prod_0^{n-1}\sum_0^i d_j,$$

где $d_1,\ d_2,\ldots,\ d_n$ — неотрицательны. Из этого неравенства следует известное соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим.
С. П. Пулькин

5644. Об оценках некоторых детерминантов и приложении этих оценок к распределению собственных значений. Гельфонд А. О., Матем. сб., 1956, 39, № 1, 3—22

Для обобщенных детерминантов Вандермонда

$$\Delta_{n+1}=\Delta_{n+1}\left(\frac{x_0,\ldots,x_n}{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}\right)=\begin{vmatrix} x_0^{\alpha_0}\ldots x_0^{\alpha_n}\\ \ldots\ldots\\ x_n^{\alpha_0}\ldots x_n^{\alpha_n}\end{vmatrix}$$

доказывается ряд неравенств следующих типов:

$$\prod_{s=0}^{n} x_s^{\delta}(1-x_s)^{\varepsilon}\left|\Delta_{n+1}\left(\frac{x_0,\ldots,x_n}{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}\right)\right|<$$

$$<(\delta+\alpha_1)^{-\varepsilon n/3-\varepsilon}e^{-2\sqrt{2\pi}\sqrt{\varepsilon}(n+1)^{3/2}/9+\gamma_2 n\ln n},$$

$$\int_0^1\ldots\int_0^1\prod_{s=0}^{n}x_s^{\delta-1}\Delta_{n+1}^2\left(\frac{x_0,\ldots,x_n}{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}\right)dx_0\ldots dx_n<$$

$$<\frac{1}{\delta}(\delta+2\alpha_1)^{-n}\frac{\alpha_1^2}{(\alpha_1+\delta)^2}\,e^{-2\sqrt{2}(n+1)^{3/2\pi/3}\sqrt{3}-\gamma_3 h\ln n},$$

где $\alpha_0=0,\ 0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n,\ \delta>0,\ 0<\varepsilon\leqslant 1$, причем γ_2 не зависит от $n,\ \alpha_1\ldots,\ \alpha_n,\ x_0,\ x_1,\ldots.\ x_n$, а γ_3 — от $\delta,\ \alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ (в первом неравенстве, кроме того, предполагается, что $x_0,\ldots,\ x_n$ заключены между 0 и 1). В этих неравенствах $n^{3/2}$ в показателях не может быть заменено никакой большей степенью n.

Доказанные неравенства применяются к изучению интегральных уравнений Фредгольма с ядрами $K(x,y)$, аналитическими по y на интервале (0, 1) и удовлетворяющими следующим условиям:

1. $|K(x,y)|<e^{\gamma_0}[xy(1-x)(1-y)]^{\delta-1/2}$,

$$0<\delta\leqslant 1/2,\ \gamma_0>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1.$$

2. $K(x,z)$ — функция, регулярная внутри луночки

$$|z-1/2\pm 1/[2\operatorname{tg}(\pi/2q)]|\leqslant 1/[2\sin(\pi/2q)],$$

где $q\geqslant 1$ фиксировано.

3. При $0<\varepsilon\leqslant 1/2$ и z, находящемся в замкнутой области с уравнением контура

$$z=\frac{[1+(1-2\varepsilon)e^{i\varphi}]^{1/q}}{[1+(1-2\varepsilon)e^{i\varphi}]^{1/q}+[1-(1-2\varepsilon)e^{i\varphi}]^{1/q}},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

выполняется неравенство

$$|K(x,z)|<\frac{e^{\gamma_0}}{[x(1-x)]^{1/2-\delta}\varepsilon^{p/q}},$$

где $p\geqslant 0$ фиксировано.

Показывается, что для уравнений с такими ядрами собственные значения удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_n|>e^{\theta\sqrt{n}-\gamma},$$

где γ и θ — постоянные, причем θ зависит от $\delta,\ q$ и p (значение θ указывается).

Приведем еще один результат, обобщающий одно неравенство Гильберта: каковы бы ни были числа $\delta>0,\ \alpha_n>\alpha_{n-1}>\ldots>\alpha_1>0=\alpha_0$, всегда можно найти целые, в совокупности отличные от нуля числа $x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{x_i x_k}{\delta+\alpha_i+\alpha_k}<\frac{2n^{\lambda}}{\delta+2\alpha_1}\,e^{-2\sqrt{2}(n+1)^{1/2/3}\sqrt{3}},$$

где λ — постоянная, не зависящая от $\alpha_i,\ i=1,\ 2,\ldots,\ n$.
В. И. Левин

5645. Обобщенные L_2-лапласианы. **Шапиро** (Generalized L_2-Laplacians. Shapiro Victor L.) Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 4, 630—635 (англ.)

Пусть $A(F,x,r)$ есть среднее значение по шару радиуса r с центром в точке x функции $F(x)$, определенной в n-мерном ($n\geqslant 2$) евклидовом пространстве E_n. Функция $f(x)\in L_2$ называется обобщенным L_2-лапласианом функции $F(x)$, если
$\lim\|f(x)-[A(F,x,r)-F(x)]\,[2(n+2)r^2]\|_{L_2}=0$.
Функция $F(x)$ названа локальным L_2-потенциалом для $f(x)$, если для любого $R>0$ в шаре $D(0,R)$ радиуса R с центром в начале координат найдется такая гармоническая функция $h_R(x)$, что разность между $F(x)$ и ньютоновским (логарифмическим для $n=2$) потенциалом по шару $D(0,R)$ с плотностью $f(x)$ равна $h_R(x)$ почти всюду в $D(0,R)$. Доказывается теорема: для того чтобы $F(x)\in L_2(E_n)$ имела $f(x)\in L_2$ обобщенным L_2-лапласианом, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ была локальным L_2-потенциалом для $f(x)$. Аналогично вводятся L_p-лапласианы и потенциалы, $1\leqslant p<\infty$ и для $1\leqslant p\leqslant 2$ отмечается наличие теоремы, аналогичной вышеуказанной.
Х. Л. Смолицкий

5646. Обобщенные лапласианы. **Шапиро** (Generalized Laplacians. Shapiro Victor L.), Amer. L. Math., 1956, 78, № 3,497—508 (англ.)

Пусть $F(x)$ — вещественная функция, определенная в n-мерном ($n\geqslant 2$) евклидовом пространстве E_n точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $L(F,x_0,t)$ означает среднее значение (если оно существует) функции $F(x)$ по сфере $|x-x_0|=t$ радиуса t с центром в x_0. Если имеет место равенство

$$L(F,x_0,t)=\Gamma(n/2)\sum_{j=0}^{r}\alpha_j t^j/(2^{2j}j!\,\Gamma(j+n/2))+$$
$$+0(t^{2r}),$$

где $\alpha_j\ (j=0,1,\ldots,r)$ — постоянные, то говорят, что α_r есть обобщенный лапласиан порядка r функции $F(x)$ в точке x_0 и обозначается $\Delta_r F(x_0)$. Из существования $\Delta_r F(x_0)$ следует существование $\Delta_s F(x_0),\ 0\leqslant s\leqslant r-1$. Пусть $P(x)=-[(n-2)\omega_n]^{-1}|x|^{-n+2}$ $(n\geqslant 3)$, $(-(2\pi)^{-1}\log|x|^{-1}$ для $n=2)$.

Доказывается теорема 1: пусть $f(x),\ \Delta_j f(x)\ (j=1,\ldots,r-1)$ непрерывны в ограниченной области $R\subset E_n$ и $Z\subset E_n$ — замкнутое и ограниченное множество емкости нуль; $\Delta_r f(x)$ существует в $R-RZ$ и интегри-

руемо в R. Тогда в любой области R', лежащей вместе с границей в R, имеет место

$$f=\underbrace{P*P*\ldots*P}_{r}*\Delta_r f(x)+H_r,$$

где H_r — полигармоническая функция порядка r в R', и

$$P*f\equiv\int_R P(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Величины

$$\Psi^*F(x_0)=\overline{\lim_{t\to 0}}\sup\{2n\,[L(F,x_0,t)-F(x_0)]/t^2\},$$

$$\Psi_*F(x_0)=\underline{\lim_{t\to 0}}\inf\{2n\,[L(F,x_0,t)-F(x_0)]/t^2\}$$

называются верхним и нижним первым обобщенным лапласианом функции в точке x_0. Куб $-\pi<x_j\leqslant\pi\,(j=1,\ldots,n)$ обозначается Ω_n; $\Phi(x)$ — 2π-периодическая по каждому аргументу x_i, $\Phi(x)=-(2\pi)^n P(x)$ в Ω_n. В работе используется и изучена функция $G(x)$ названная функцией Грина на торе Ω_n и определяемая своим рядом Фурье

$$\sum_{\Sigma m_j^2\neq 0} e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}/(m_1^2+\ldots+m_n^2).$$

Доказывается теорема 2: пусть $F(x)$ и $g(x)$ — вещественные 2π-периодические функции, причем $F(x)$ непрерывна в E_n, $g(x)$ интегрируема в Ω_n. Пусть $Z\subset\Omega_n$ — замкнутое множество нулевой емкости.

Если I. $\Psi^*F(x)>-\infty$, $\Psi_*F(x)<+\infty$ для $x\in\Omega_n-Z$. II. $g(x)\leqslant\Psi^*F(x)$ в Ω_n. Тогда: а) $\Delta_1F(x)$ существует почти всюду в Ω_n и $\Delta_1F(x)\in L_1(\Omega_n)$; б) в точках, где $\int_{\Omega_n}|\Delta_1F(y)|\,|\Phi(x-y)|\,dy<\infty$, имеет место

$$F(x)=-(2\pi)^{-n}\int_{\Omega_n}\Delta_1F(y)\,G(x-y)\,dy+(2\pi)^{-n}\int_{\Omega_n}F(y)\,dy.$$

В теореме 3 устанавливается достаточное условие для того, чтобы тригонометрический ряд $\sum a_{m_1,\ldots,m_n}e^{i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}$, суммируемый по Абелю (с множителями $e^{-z\sqrt{m_1^2+\ldots+m_n^2}}$ при $0<z\to 0$) к суммируемой в Ω_n функции $f(x)$, был рядом Фурье функции $f(x)$. Х. Л. Смолицкий

5647. Некоторые тождества, относящиеся к среднему арифметическому и среднему геометрическому. Блануша (Quelques identités algébriques concernant les moyennes arithmétique et géométrique. Blanuša Danilo), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, **11**, № 1, 17—22 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа,

$$S=1/n\sum_{i=1}^n x_i,\quad G=\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n},$$

$$x_i=S+h_i\,(i=1,2,\ldots,n).$$

Доказывается тождество

$$G^n-S^n=h_1h_2x_3\ldots x_n+(h_1+h_2)\,h_3Sx_4\ldots x_n+$$
$$+(h_1+h_2+h_3)\,h_*S^2x_5\ldots x_n+\ldots+ \qquad (1)$$
$$+(h_1+\ldots+h_{n-1})\,h_nS^{n-2}.$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны и не все равны между собой, то их можно перенумеровать так, что первый член правой части этого равенства будет положителен, остальные — неотрицательны. Отсюда следует известное неравенство $S^n>G^n$. Пользуясь неравенством Гурвица и доказанным неравенством, автор устанавливает некоторые условия выполнимости неравенств $S>G$, $S^n>G^n$ также в случае, когда $x_1, \ldots, x_n$ могут быть отрицательны. Доказывается еще тождество

$$S-G=\varphi(y_1,\ldots,y_{pm})=1/p\,[\varphi(y_1^p,\ldots,y_m^p)+$$
$$+\varphi(y_{m+1}^p,\ldots,y_{2m}^p)+\ldots+\varphi(y_{(p-1)m+1}^p,\ldots,y_{pm}^p)], \quad (2)$$

где $\varphi(y_1,\ldots,y_n)=1/n\sum_{i=1}^n y_i^n-\prod_{i=1}^n y_i,\quad n=pm.$

Это тождество является обобщением тождества Гурвица, совпадающего с (2) при $p=2$. С. П. Пулькин

5648. О «мультипликативных» бесконечных системах. Круковский Б. В. (Круковский-Синевич), Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, **19**, 125—135

Приводится способ решения бесконечной системы уравнений «мультипликативного», т. е. следующего вида:

$$x_i=\sum_{k=1}^\infty\alpha_i\beta_kx_k+b_i\,(i=1,2,\ldots).$$

Устанавливаются условия возможности замены системы

$$y_i=\sum_{k=1}^\infty a_{ik}y_k+c_i\,(i=1,2,\ldots)$$

на «близкую» ей мультипликативную

$$x_i=\sum_{k=1}^\infty\alpha_i\beta_kx_k+c_i$$

в случае, когда можно подобрать числа α_i, β_k так, что

$$\sum_{k=1}^\infty|a_{ik}-\alpha_i\beta_k|<q<1\,(i=1,2,\ldots)$$

Дана элементарная оценка погрешности, допускаемой при такой замене. Ф. И. Харшиладзе

5649. О распространении метода последовательных приближений на квадрат-нормальные бесконечные системы линейных уравнений. Круковский Б. В. (Круковский-Синевич), Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, **19**, 136—140

Приводится элементарное доказательство возможности (установленной впервые Л. В. Канторовичем, Успехи матем. наук, 1948, **3**, вып. 6, 153—155) применения метода последовательных приближений к бесконечной системе уравнений

$$x_i=\sum_{k=1}^\infty a_{ik}x_k+b_i\,(i=1,2,\ldots)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty|a_{ik}|^2<1,\quad\sum_{i=1}^\infty|b_i|^2<\infty.$$

Опечатка: на стр. 139 в строке 8 (снизу) вместо (4,1) должно быть (2,2). Ф. И. Харшиладзе

5650. К некоторым геометрическим проблемам максимума и минимума. Поццоло-Феррарис (Sopra alcuni problemi geometrici di massimo e minimo. Pozzolo Ferraris Giulia), Period. mat., 1956, **34**, № 4, 228—233 (итал.)

5651. Об асимптотах плоских кривых. Шайкин (Asupra problemei asimptotelor unei curbe plane. Şaichin A.), An. Univ. «C. J. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1956, № 11, 25—27 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что два обычных определения асимптоты плоской кривой неравносильны; одно из них более общее.

Исследуется случай, когда эти определения равносильны. Резюме автора.

5652. **К вопросу о действиях над степенными рядами.** Керопян К. К., Тр. Ростовск.-н/Д. инж.-строит. ин-та, 1956, вып. 5, 229—231

Рассматривается вопрос о возведении в степень s сходящегося степенного ряда и перемножении двух или нескольких сходящихся степенных рядов с помощью ряда Маклорена. В. К. Захаров

5653. **Бесконечно дифференцируемая функция, линии уровня которой в окрестности изолированного минимума не звездообразны.** Лагунов В. Н., Сб. науч. тр. Томского инж.-строит. ин-та, 1956, 1, 124—130

Строится пример функции, бесконечно дифференцируемой в окрестности изолированного минимума, линии уровня которой в этой окрестности не звездообразны. Н. М. Дайнеко

5654. **Симметричная производная на $(k-1)$-мерной гиперсфере.** Шапиро (The symmetric derivative on the $(k-1)$-dimensional hypersphere. Shapiro Victor L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 514—524 (англ.)

Симметричная производная $\mu_s(x)$ вполне аддитивной функции области μ ограниченного изменения, определенной на борелевых множествах, принадлежащих единичной $(k-1)$-мерной сфере Ω k-мерного евклидова пространства, определяется как

$$\lim_{h\to 0} |D(x,h)|^{-1}\mu[D(x,h)],$$

где $|D(x,h)|$ — $(k-1)$-мерный объем сферической шапки $D(x,h)$, отсекаемой от сферы Ω сферой радиуса $2\sin(h/2)$ с центром в точке x, принадлежащей Ω. Предполагается, что $k \geqslant 3$.

Вводится понятие ряда Стилтьеса сферических гармоник, принадлежащих μ:

$$S[d\mu] = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x),$$

где

$$Y_n(x) = \frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{\Omega} P_n^{\lambda}(\cos\gamma)\, d\mu(y),$$

причем $\lambda = (k-2)/2$, x и y — точки Ω, $\cos\gamma = (x,y)$, а P_n^{λ} — ультрасферический полином.

Доказывается: 1. Если $\mu_s(x)$ существует и конечно, то $S[d\mu]$ суммируемо (C,η), $\eta > \max(3/2, k-2)$, к $\mu_s(x)$; если, кроме того, $|\mu|[D(x',\varepsilon)] = 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где x' — точка, диаметрально противоположная x, а $|\mu|$ обозначает полное изменение μ, то $S[d\mu]$ суммируемо (C,δ), $\delta > \lambda + 1$, к $\mu_s(x)$.

2. Если μ абсолютно непрерывна, т. е. представима в виде

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\Omega(x),$$

где $d\Omega(x)$ — $(k-1)$-мерный элемент объема на Ω, а f — интегрируемая на Ω функция, и если в некоторой точке x_0 на Ω $Y_n(x_0) = O(1/n)$, то для сходимости

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x)$$

в точке x_0 к числу β, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_s(x_0) = \beta$. Последний результат является обобщением одной теоремы Харди и Литтлвуда из теории рядов Фурье. В. И. Левин

5655. **Элементарные интегралы.** Potts (Elementary integrals. Potts D. H.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 8, 545—554 (англ.)

Рассматривается задача: какие условия должны быть выполнены для того, чтобы интеграл от элементарной функции выражался через элементарные функции?

Вводится понятие дифференциального поля и его расширения следующим образом: $\mathfrak{F}$ — семейство действительных, кусочно-дифференцируемых функций, определенных на интервале I и таких, что: 1) $\mathfrak{F}$ содержат все постоянные; 2) если $\alpha \in \mathfrak{F}$, $\beta \in \mathfrak{F}$, то $\alpha+\beta$ и $\alpha\cdot\beta \in \mathfrak{F}$; 3) если $\alpha \in \mathfrak{F}$, то $\alpha' \in \mathfrak{F}$; 4) если $\alpha \in \mathfrak{F}$, то $1/\alpha \in \mathfrak{F}$, если $\alpha \neq 0$.

В этом случае $\mathfrak{F}$ — дифференциальное поле.

Пусть θ — кусочно-дифференцируемая функция, определенная на I и не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Все рациональные функции от θ, с коэффициентами из $\mathfrak{F}$, образуют поле, означаемое $\mathfrak{F}(\theta)$ и называемое расширением $\mathfrak{F}$.

Далее доказываются теоремы, раскрывающие свойства $\mathfrak{F}(\theta)$. Приведем, для примера, формулировки первой и седьмой теорем.

Теорема 1. Если $\theta \notin \mathfrak{F}$, $\theta' \in \mathfrak{F}$, $\beta_0, \beta_1 \ldots, \beta_n \in \mathfrak{F}$ $\beta_0\theta^n + \beta_1\theta^{n-1} + \ldots + \beta_n \equiv 0$, то $\beta_0 \equiv \beta_1 \equiv \ldots \equiv \beta_n \equiv 0$.

Теорема 7. Если $\alpha \in \mathfrak{F}$, $\int \alpha \notin \mathfrak{F}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$, где θ_i — или показательная функция, или логарифм, то существуют $\beta_0, \ldots, \beta_n \in \mathfrak{F}$ и постоянные $c_1, \ldots, c_n$ такие, что

$$\int \alpha = \beta_0 + c_1 \log\beta_1 + \ldots c_n \log\beta_n.$$

После этого доказанные теоремы применяются к решению поставленной в начале задачи, в результате получается

Теорема 8. Если 1) α и $\beta \in \mathfrak{F}$; 2) $\int e^{nx}\alpha \notin \mathfrak{F}$, $n = 1,2,\ldots$ 3) $\gamma = \int e^{\alpha}\beta$ — элементарная относительно $\mathfrak{F}$, т. е. содержится в расширении, то существует $\delta \in \mathfrak{F}$ такая, что

$$\gamma = e^{\alpha}\delta + \text{const}.$$

В качестве примера доказывается, что $\int e^{x^2}dx$ не выражается в элементарных функциях. В статье делаются ссылки на монографию Ритта (Ritt J. F., Integration in finite terms, Columbia University Press, 1948). А. Н. Черкасов

5656. **Вычисление некоторого класса определенных интегралов, содержащих квадрат бесселевой функции первого порядка.** Шифрин К. С., Тр. Всес. заочн. лесотехн. ин-та, 1956, № 2, 153—162

Рассматривается метод вычисления интеграла

$$f(\mu) = \int_0^{\infty} z^4 e^{-\mu z} J_1^2(z)\, dz,$$

где $J(z)$ — бесселева функции первого порядка. В. В. Немыцкий

5657. **Новая формула о среднем значении и ее применение в приближенном вычислении определенных интегралов.** Чорэнеску (O nouă formulă de medie și aplicațiile ei la calculul cu aproximație al integralelor definite. Ciorănescu N.), Gaz. mat. și fiz., 1956, A7, № 1, 19—23 (рум.)

Пользуясь выведенной ранее обобщенной формулой о среднем (Bull. math. Soc. Roum. Sc., 1944, 46, 107—112) для функции $F(x) \in C^{(n)}[a,b]$ и имеющей при $a < x < b$ конечную производную $F^{(n+1)}(x)$, автор получает квадратурную формулу

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{n!\,(2n-p-1)!}{(2n)!\,(n-p-1)!\,(p+1)!} \times$$

$$\times (b-a)^{p+1}[F^{(p)}(b) + (-1)^p F^{(p)}(a)] +$$

$$+ (-1)^p \frac{n!}{12\,(2n)!}\,(b-a)^{n+3} F^{(n+1)}(\xi)\, X'_n(\xi),$$

где ξ, $\xi' \in (a,b)$ и $X_n(x) = P_n[2x-(a+b)]/(b-a)]$. ($P_n(x)$ — полином Лежандра). Рассматриваются некоторые обобщения этой формулы и детализация для частных случаев. Дается оценка остаточного члена. Б. П. Демидович

5658. **Нули некоторых интегралов, подобных интегральному синусу. Ливингстон, Лорк** (The zeros of certain sine-like integrals. Livingston A. E., Lorch Lee), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 813—816 (англ.)

Рассматривается интеграл

$$\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt \quad (x>0), \tag{1}$$

где: 1) $f(t)\geqslant 0$ $(0\leqslant t<1)$, 2) $f(t)\not\equiv 0$ ни в каком интервале из $[0, 1)$, 3) $f(t+n)=(-1)^n f(t)$ $n=1, 2, 3, \ldots)$, 4) $f(t)/t$ интегрируема в смысле Лебега на $[0, 1]$. Обозначим через z_n единственный нуль интеграла (1) в интервале $(n, n+1)$ и через C $(0<C<1)$ число, для которого $2\int_0^C f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt$.

При этих предположениях доказывается, что $z_n-n\downarrow C$.

С. И. Зуховицкий

5659. **Неравенства, обратные неравенству Шварца. Белман** (Converses of Schwarz's inequality. Bellman Richard), Duke Math. J., 1956, 23, № 3, 429—434 (англ.)

Для некоторых классов функций устанавливается неравенство

$$\left(\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx\right)^2 \geqslant K\left(\int_0^1 u^2 dx\right)\left(\int_0^1 v^2 dx\right),$$

являющееся обращением известного неравенства Буняковского (по автору — Шварца). Указывается общий метод для рассмотрения таких задач, применимый к разным классам функций. Для пространства $L^p(0, 1)$ приводится следующая теорема (обращение неравенства Гёльдера): пусть $u(x)\in L^p(0, 1)$ $(p>1)$, $v(x)\in L^{p'}(0, 1)$ $(1/p+1/p'=1)$, причем u и v выпуклы и нормированы условиями

$$\int_0^1 u^p dx=1,\ \int_0^1 v^{p'}dx=1;\ u(0)=v(0)=0,\ u(1)=v(1)=0.$$

Тогда $\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx\geqslant \frac{(p+1)^{1/p}(p'+1)^{1/p'}}{6}$. В случае $p=2$ этот результат в основном содержится в работе Бляшке и Пика (Blaschke W., Pick. G., Math. Ann., 1916, 77, 277—302).

Рассматривается также многомерный случай.

С. И. Зуховицкий

5660. **О пределе $\lim_{x\to 0}\sin x/x$. Вьеторис** (Vom Grenzwert $\lim_{x\to 0}\sin x/x$. Vietoris L.), Elem. Math., 1957, 12, № 1, 8—10 (нем.)

5661 К. **Прикладная теория функций. Иноуэ** (應用函數論.井上正雄, 共立出版, 255 圓, 70 頁, 400 圓, Кёрицу-сюппан, 1954, 325 стр., 400 иен (японск.)

5662 К. **Элементы дифференциального и интегрального исчисления. Картасинский, Околович** (Elementy rachunku różniczkowego i całkowego. Dla kl. 3 technikum. Wyd. 5. Kartasiński S., Okołowicz M., Warszawa, Państw. Wydawn. Szkol. Zawod., 1956, 152, 4 nlb. s., il., 6.20 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 34, 516 (польск.)

5663 К. **Избранные примеры на дифференцирование и интегрирование. Хемнициус** (Differentiation und Integration ausgewählter Beispiele. Eine Sammlung v. 380 ausgew. vollst. durchgerechneten Beispielen, unter Berücks. d. Zusammenhänge zwischen Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Chemnitius Fritz. Berlin, Verl. Techn. 1956, XII, 202 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 19, 1373(нем.)

5664 К. **Высшая математика. Т. 3. Шабак** (Matematici superioare. Vol. 3. Şabac Gh. Ion. Ministerul Invatamîntului. Inst. politehn., Bucureşti, 1956, 435p., il., 12,50 lei.-Litogr.), Bul. bibliogr., 1956, A, № 11, 419 (рум.)

5665 К. **Интегральное исчисление. Ч. 2. Ярник** (Integrální počet. 2. část. Celost. vysokošk. učebnice. Jarnik Vojtěch. Praha, ČSAV, 1955, 760, (1) s., 42, 80 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 47, 1130 (чеш.)

5666 К. **Лекции по теории функций. Гиццетти** (Lezioni di teoria delle funzioni. Anno accademico 1952—53. (Univ. studi Roma). Ghizzetti Aldo. Roma, V. Veschi, 1955, 294 p., ill.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 656, 602 (итал.)

5667 К. **Курс математического анализа. Ч. 1. Учебник для втузов. 4-е изд. Берман** (Matematikai analízis. 1 r. Egyetemi tankönyv, v. 4. kiad. Berman A. F., Oroszból ford. Budapest, Tankönyvkiado, 1955, 472 l., 18 ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 12, 382 (венг.)

5668 К. **Курс математического анализа. 2. Гребенча М. К., Новоселов С. И.** (Učebnice matematické analysy. 2. díl. Grebenča M. K., Novoselov S. I. Z rus. Praha, ČSAV, 1955, 655, (1) s., il., 54, 40 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 42, 1016 (чеш.)

5669 К. **Математический анализ. Т. I. Погожельский** (Analiza matematyczna. T. I. Wyd. 4. niezmien. Pogorzelski Witold. Warszawa Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 4 nlb., 227, 1 nlb. s., il., 20 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 23, 337 (польск.)

5670 К. **Математический анализ. Т. 2. Погожельский** (Analiza mathematyczna. T. 2. Wyd. 5. niezmien. Pogorzelski Witold. Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk., 1956, 310, 1 nlb. s., il., 29 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 39, 583 (польск.)

5671 К. **Математический анализ. Кемп** (Mathematical analysis; an introduction for college students. Camp Ezra John. Heath, 1956, 610 pp., 6 doll.), Cumul. Book Index, 1956, 59, № 6, 18 (англ.)

5672 К. **Лекции по математическому анализу. Часть I. Каччопполи** (Lezioni di analisi matematica. Parte I. Caccioppoli Renato. Napoli, Ed. Treves di L. Lupi, 272 p., 3000 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 660—663, 183 (итал.)

5673 К. **Введение в исчисление бесконечно малых. Часть 2. Веселый** (Úvod do počtu infinitesimálního. Díl 2. Veselý Ferdinand. Praha, SPN, 1955, 173 s., il., 12, 20 Kčs.), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 19, 474 (чешск.)

5674 К. **Лекции по анализу. Т. 2. Функциональные ряды. Геометрические приложения. Прямолинейные интегралы. Функции многих переменных. Дифференцирование и интегрирование их. Северн, Скорца-Драгони** (Lezioni di analisi. Vol. 2: Serie di funzioni. Applicazioni geometriche. Integrali rettilinei. Funzioni di più variabili. Derivazione e integrazione ad esse inerenti. 4 ed. Severi Francesco, Scorza Dragoni Giuseppe. Bologna, C. Zuffi, 1955, vii. 398 p., 4500 L.), Bibliogr. ital., 1956, № 654—655, 498 (итал.)

5675 К. **Суммирование бесконечно малых величин. Изд. 2-е испр. Натансон И. П.**, М., Гостехтеориздат, 1956, 56 стр., илл., 80 коп.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

5676. **Замечание об общих гармонических рядах. Тенка** (Osservazioni sulle serie armoniche generali. Tenca Luigi), Archimede, 1956, 8, № 4—5, 215—217 (итал.)

5677. К вопросу о так называемом «коэффициенте гармоник». Рафальсон З. Е., Тр. Ленингр. ин-та киноинженеров, 1956, вып. 4, 57—64

Рассматривается ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{2k\pi x}{T}+b_k\sin\frac{2k\pi x}{T}$$

и определяется величина

$$\nu=\frac{\sqrt{(a_2^2+b_2^2)+(a_3^2+b_3^2)+\dots}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}},$$

которая называется «коэффициентом гармоник». Вычисляется значение ν для отдельных примеров.

В. В. Немыцкий

5678. К вопросу о суммировании рядов. Соболев А. И., Тр. Ленингр. технол. ин-та холодильн. пром-сти, 1956, 14, 331—334

Строится тождественное соотношение

$$\frac{t_1}{x_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t_{2i-1}-t_{2i}}{x_i}+\sum_{i=2}^{n}\frac{t_{2i-2}x_i-t_{2i-1}x_{i-1}}{x_{i-1}x_i}+\frac{t_{2n}}{x_n},$$

где параметры t_i $(i=1, 2, \dots, 2n)$ и x_i $(i=1, 2, \dots, n)$ произвольны. При помощи этого соотношения можно не только доказать сходимость исследуемого ряда, но и найти его сумму, если знать сумму другого сходящегося ряда. Введя обозначения

$$\frac{t_1}{x_1}=A,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{t_{2i-1}-t_{2i}}{x_i}=S_n,\ \sum_{i=2}^{n}\frac{t_{2i-2}x_i-t_{2i-1}x_{i-1}}{x_{i-1}x_i}=\sigma_n,$$

$$\frac{t_{2n}}{x_n}=R_n,$$

получим $A=S_n+\sigma_n+R_n$. Пусть $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ и $\lim_{n\to\infty}R_n=0$, тогда и для переменного σ_n существует конечный предел, т. е. ряд $\sum_{i=2}^{\infty}(t_{2i-2}x_i-t_{2i-1}x_{i-1})/(x_{i-1}x_i)$ будет сходиться.

Выбирая соответствующим образом параметры t_i и x_i, получим разнообразные ряды, и если окажется, что сумма одного из полученных рядов $\sum_{i=1}^{\infty}(t_{2i-1}-t_{2i})/x_i$ или $\sum_{i=2}^{\infty}(t_{2i-2}x_i-t_{2i-1}x_{i-1})/x_{i-1}x_i)$ известна, то сумма второго ряда непосредственно получится из формулы

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A-S.$$

Для иллюстрации метода приводятся примеры.

М. Н. Дайнеко

5679. Абсолютная суммируемость A бесконечных рядов. Чэнь Цзянь-гун (級數的絕對總和性A. 陳建功), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math sinica, 1956, 6, № 2, 170—183 (кит.; рез. англ.).

Говорят, что ряд абсолютно суммируем A, если функция $f(x)=\sum c_nx_n$ будет ограниченной вариации на интервале $0\leqslant x\leqslant 1$. Цель этой статьи состоит в решении следующей задачи: пусть ряд $\sum c_n$ суммируем $|A|$, при каком условии ряд $\sum c_n$ сходится? Ответ дается следующей теоремой: Когда $\sum c_n$ суммируем $|A|$, тогда условия $c_n=o(1)$ и $c_0+c_1+\dots+c_n=O(1)$ являются необходимыми и достаточными для сходимости ряда $\sum c_n$.

Замечание. Лемма 4 в моей английской статье «Сходимость абсолютно суммируемых рядов» (РЖМат, 1956, 4609) является неверной; ее можно было бы заменить леммой, установленной выше, во время доказательства леммы 5. Резюме автора.

5680. О суммировании двойных рядов методом Бернштейна—Рогозинского. Тевзадзе Н., Тр. Тбилисск. ун-та, 1956, 60, 11—17 (рез. груз.)

Двойной ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}$ называют суммируемым методом $(БР^{\lambda}, \alpha_m, \beta_n)$ к значению S, если $\lim\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{ik}\cos i\alpha_m\cos k\beta_n=S$ при m, n стремящихся к ∞, удовлетворяя при любом $\lambda>1$ условию: $1/\lambda<m/n<\lambda$. Устанавливаются теоремы:

1. Если двойной ряд сходится к S и, кроме этого, его частные суммы удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}&S_{mn}=o(m^2)\text{ при фиксированном }n,\\&S_{mn}=o(n^2)\text{ при фиксированном }m,\end{aligned}\qquad(1)$$

тогда при $\alpha_m=O(1/m)$, $\beta_n=O(1/n)$ этот ряд суммируем методом $(БР^{\lambda}, \alpha_m, \beta_n)$ к тому же числу S.

2. Если частные суммы двойного ряда удовлетворяют условиям (1) и можно указать такие числа M и N, что для всех m, $n>N$, $|S_{mn}|<M$, то метод $(БР^{\lambda}, \alpha_m, \beta_n)$ $(0\leqslant\alpha_m<\pi/4m,\ 0\leqslant\beta_n<\pi/4n)$ эквивалентен сходимости этого ряда.

Для случая простых рядов аналогичные теоремы указаны в монографии Г. Харди «Расходящиеся ряды» (М., Изд-во ин. лит., 1951), которую автор не цитирует. Для двойных рядов метод Бернштейна—Рогозинского рассматривался, при более жестких условиях, И. И. Огиевецким (Науч. зап. Днепропетр. ун-та, 1948, 34) и А. Бендукидзе (РЖМат, 1956, 3888).

М. Ф. Тиман

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

5681. Полиномы, определяемые производящей функцией. Боас, Бак (Polynomials defined by generating relations. Boas R. P., Jr, Buck R. C.), Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 9, 626—632 (англ.)

Пусть $A(w)$, $\psi(w)$, $g(w)$ — степенные ряды с положительными радиусами сходимости. Авторы рассматривают производящую функцию

$$K(z, w)=A(w)\psi[zg(w)]=\sum_{n=0}^{\infty}w^np_n(z)\qquad(1)$$

и находят условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $p_n(z)$ был полиномом n-й степени, и приводят его явное выражение через коэффициенты указанных рядов. Единственные функции $H(t)$ (при условии $H(0)=1$), для которых производящая функция имеет форму $K(z, w)=H[a(w)+zb(w)]$, есть функции $H(t)=e^t$ и $H(t)=(1-t)^{-\lambda}$.

Рассматриваются полиномы $\{P_n(z)\}$, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{P_{n+1}(z)-P_{n+1}(rz)}{z-rz}=P_n(z);$$

при $r=1$ это полиномы Аппеля, а при $r=0$ — полиномы, для которых $K(z, w)=A(w)/(1-zw)$; эти полиномы являются подклассом полиномов, определенных (1) при

$$g(w)=w,\ \psi(w)=\sum_{n=0}^{\infty}w^n\prod_{k=1}^{n}(r-1)/(r^k-1).\qquad(2)$$

Примечание референта. 1) Полиномы, соответствующие случаю $\psi(t)=e^t$, авторы называют полиномами Шеффера; однако до него этот случай рассмотрел Мейкснер (Meixner J., J. London Math. Soc., 1934, 9, 6—12). 2) Авторы не заметили того, что при условии (2) их полиномы являются обобщением полиномов Бейтмана (Bateman H., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1934, 20, 63—66).

Я. Л. Геронимус

5682. Некоторые формулы относительно полиномов Лежандра. Митринович (Neke formule koje se odnose na Legendre-ove polinome. Mitrinovic Dragoslav S.), Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz., 1956, № 1, 20 s. (сербохорв.; рез. франц.)

Устанавливаются следующие формулы относительно полиномов Лежандра $P_n(x)$:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d^r}{dx^r}P_m(x)\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\,dx\equiv$$

$$\equiv 2\sum_{k=1}^{N}\left\{(2n-2s-4k+5)\binom{k+s-2}{s-1}\times\right.$$

$$\left.\times\binom{\frac{1}{2}(\overline{m-r}-\overline{m-s})+k+r-2}{r-1}\prod_{\lambda=2}^{r}(m+n+r-\right.$$

$$\left.-s-2k-2\lambda+5)\prod_{\mu=2}^{s}(2n-2\mu-2k+5)\right\},\quad(1)$$

где числа N, m, n, r, s удовлетворяют следующим условиям: 1) $r\geqslant 2$, $s\geqslant 2$, $m-r\geqslant n-s$; 2) $(m-r)-(n-s)$ четное;

3) $N=\begin{cases}(n-s)/2+1, & \text{если } n-s \text{ четное},\\ (n-s-1)/2+1, & \text{если } n-s \text{ нечетное}.\end{cases}$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d^r}{dx^r}P_m(x)\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\,dx=0\qquad(2)$$

для $(m-r)-(n-s)$ нечетного.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{d^r}{dx^r}P_m(x)\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\,dx\equiv$$

$$\equiv 2^{2-r-s}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}(r-k)!\,(s+k-1)!\times$$

$$\times\binom{m+r-k}{r-k}\binom{m}{r-k}\binom{n+s+k-1}{s+k-1}\binom{n}{s+k-1},\quad(3)$$

где m, n, r, s — натуральные числа, удовлетворяющие следующим условиям: $m-r\geqslant n-s$, $(m-r)-(n-s)$ — четное.

$$\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{d^s}{dx^s}P_n(x)\right\}^2dx\equiv 2^{2-2s}\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k-1}(s-k)!\,(s+k-1)!\times$$

$$\times\binom{n+s-k}{s-k}\binom{n}{s-k}\binom{n+s+k-1}{s+k-1}\binom{n}{s+k-1}.$$

Последняя формула, представляющая частный случай формулы (3), фактически означает, что выражение $\int_{-1}^{+1}\{d^sP_n(x)/dx^s\}^2\,dx$ делится на произведение $(n+s)(n+s-1)(n+s-2)\ldots(n-s+1)$.

Рассматриваются также некоторые частные случаи, входящие в формулу (1). Из резюме автора

5683. О детерминанте Турана для полиномов Лежандра и Лагерра. Эвейда (On Turan's determinant for Legendre and Laguerre polynomyals. Eweida M. T.), Rev. mat. hisp.-amer., 1955, 15, № 3—4, 79—87 (англ.)

Для полиномов Лежандра $p_n(x)$ автор устанавливает следующие неравенства:

1. $\Delta_n(x)=p_n^2(x)-p_{n-1}(x)\,p_{n+1}(x)>0$ для $-1<x<1$ (неравенство Турана), $\Delta_n(-1)=\Delta_n(1)=0$.

2. $\Delta_n(x)<0$ для всех $x>1$ и $x<-1$.

3. $\lim_{x\to\pm1}\Delta_n(x)/(1-x^2)={}^1/_2$.

4. $d/dx\Delta_n(x)=0$ только при $x=0$; в этой точке $\Delta_n(x)$ принимает максимальное значение.

Для полиномов Лагерра $L_n(x)$ устанавливаются аналогичные результаты.

1. $\Delta_n(x)=L_n^2(x)-L_{n-1}(x)\,L_{n+1}(x)>0$ для всех $x\neq 0$ (неравенство Турана для полиномов Лагерра установлено Cerë (Szegö), Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 401—405).

2. $\lim_{x\to0}\Delta_n(x)/x^2={}^1/_2$.

3. $d\Delta_n(x)/dx=0$ только при $x=0$; в этой точке $\Delta_n(x)$ принимает минимальное значение.

Доказательство автора основано на рекуррентной зависимости между тремя последовательными полиномами $p_n(x)$ или $L_n(x)$.

Н. Обрешков

5684. О полиномах Якоби. Карлиц (On Jacobi polinomials. Carlitz Leonard), Bol. Unione mat. ital., 1956, 11, № 3, 371—381 (англ.)

Используя данные Cerë (Szegö G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publs. N.Y., 1939) представления полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-r}\binom{n+\beta}{r}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}$$

и равенство

$$dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)/dx={}^1/_2(n+\alpha+\beta+1)\,P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

автор получает многочисленные соотношения между полиномами Якоби, в том числе и соотношения, содержащие произведения этих полиномов. Среди полученных выражений встречаются, как указывает автор, соотношения, приведенные ранее без доказательства в работе Фелдхейма (Feldheim E., Acta math., 1941, 74, 117—138).

В заметке встречается много опечаток. Библ. 7 назв.

Э. Л. Блох

5685. О символах Ганкеля и о вычислении $J_\nu(z)\,Y_{\nu+p}(z)-Y_\nu(z)\,J_{\nu+p}(z)$. Ма Минь-юань (Sur les symboles de Hankel et le calcul de $J_\nu(z)\,Y_{\nu+p}(z)-Y_\nu(z)\,J_{\nu+p}(z)$. Ma Min-Yuan), C. r. Acad. sci., 1956, 243, № 25, 1995—1997 (франц.)

Для символов Ганкеля $(\nu,m)=1/m!\prod_{i=1}^{m}\{\nu^2-(i-{}^1/_2)^2\}$, где $m>0$ — целое число и $\nu(0,1)=1$, справедливо соотношение $[\nu+p,\nu]_{2k+|p|+1}=0$, где p, $k\geqslant 0$ — целые числа, а $[\nu+p,\nu]_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r(\nu+p,n-r)(\nu,r)$.

Если $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода, то справедливо тождество

$$\frac{\pi z}{2}[J_\nu(z)\,Y_{\nu+p}(z)-Y_\nu(z)\,J_{\nu+p}(z)]\equiv\cos\frac{p}{2}\pi\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{[\nu+p,\nu]_{2\nu+1}}{(2z)^{2r+1}}-$$

$$-\sin\frac{p}{2}\pi\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{(\nu+p,\ \nu)_{2r}}{(2z)^{2r}}\equiv -R_{p-1,\ \nu-1}(z),$$

где p — целое число, причем $k=0$ для $p=0$ и $2k<|p|\leqslant 2k+2$ при $p\neq 0$; $R_{p-1,\ \nu-1}(z)$ — полином Ломмеля.

В формуле (2) опечатки: вместо $2\nu+1$ должно быть $2r+1$, а вместо $(\nu+p,\ \nu)$ должно быть $[\nu+p,\ \nu]$.

В т. 224, № 8, стр. 1102 этого же журнала даны исправления опечаток, допущенных в статье.

Я. Л. Геронимус

5686. Некоторые соотношения между функциями Бесселя и Лежандра. Кук (Some relations between Bessel and Legendre functions. Cooke J. C.), Monatsh. Math., 1956, 60, № 4, 322—328 (англ.)

Используя выражение

$$\left(\frac{\pi c}{2}\right)^{1/2}\int_0^\infty e^{-st}t^{-1/2}J_m(\rho t)\,J_{n+1/2}(ct)\,dt=$$
$$=P_n^{-m}(\mu)\,q_n^m(\zeta),\qquad(1)$$

где $z=c\mu\zeta$, $\rho=c\sqrt{(1-\mu^2)\ (1+\zeta^2)}$, $-1<\mu<1$, полученное автором (РЖМат, 1953, 310), и известные соотношения между различными функциями Бесселя, вычисляются интегралы, аналогичные (1), содержащие функции Бесселя второго и третьего рода, а также функции Бесселя мнимого аргумента.

Эти интегралы, так же как и интеграл (1), выражаются через присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, действительного и мнимого аргумента. В заключение, используя выражение для полиномов Гегенбауэра (Gegenbauer), автор находит некоторые разложения функций Бесселя в ряды, содержащие функции Лежандра.

Замечание. Разложения функций Бесселя J_m и I_m в ряд по функциям Лежандра, приведенные автором в формулах (24) и (25), совпадают с аналогичными разложениями, полученными ранее другим методом и в других обозначениях референтом (РЖМат, 1956, 543).

Э. Л. Блох

5687. Некоторые определенные интегралы, содержащие конические функции. Фельзен (Some definite integrals involving conical functions. Felsen Leopold B.), J. Math. and Phys., 1956, 35, № 2, 117—178 (англ.)

Автор рассматривает интегралы типа

$$\int_0^\infty x\frac{\operatorname{th}\pi x}{\operatorname{ch}\pi x}K_x^m(\cos\theta)\,K_x^m(\cos\theta')\,[\varphi(x)]^\gamma\,dx,$$
$$\varphi(x)=x^2+1/4,\quad m=0,\ 1,$$

где $\gamma=\pm 1$; $K_x^m(\cos\theta)=P^m_{-1/2+ix}(\cos\theta)$ — коническая функция порядка x степени m. Он вычисляет их, исходя из формулы Мелера (Mehler F. G., Math. Ann., 1881, 18, sec. 4, Eq. (17)).

Я. Л. Геронимус

5688. Добавление к моей работе: «Формула Максвелла для сферических функций». Мор (Nachtrag zu meiner Note «Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen». Mohr Ernst), Math. Nachr., 1956, 15, № 2, 122 (нем.)

Дается добавление к работе автора (РЖМат, 1956, 552).

5689. Вычисление сферической функции группы D_2. Эскин Л. Д., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 7, 19—24

Путем надлежащего видоизменения метода И. М. Гельфанда и референта (Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 36) находится следующее выражение для сферической функции $\varphi(\lambda_3,\ \lambda_4)$ представления основной невырожденной серии группы D_2 (группы унимодулярных ортогональных матриц четвертого порядка):

$$\varphi(\lambda_3,\ \lambda_4)=\frac{8\pi^4}{i(\rho_2-\rho_1)}\times$$
$$\times\frac{\lambda_3^2\lambda_4^2\left[(\lambda_4/\lambda_3)^{i(\rho_2-\rho_1)/2}-(\lambda_3/\lambda_4)^{i(\rho_2-\rho_1)/2}\right]}{(\lambda_3^2\lambda_4^2-1)(\lambda_3^2-\lambda_4^2)}\times$$
$$\times\left[\frac{(\lambda_3\lambda_4)^{i(\rho_2+\rho_1)/2}-(\lambda_3\lambda_4)^{-i(\rho_2+\rho_1)\ 2}}{i(\rho_2+\rho_1)/2}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\lambda_3\lambda_4)^{i(\rho_2+\rho_1)/2+1}-(\lambda_3\lambda_4)^{-i(\rho_2+\rho_1)/2-1}}{i(\rho_2+\rho_1)/2+1}\right],$$

где ρ_1, ρ_2 — параметры, определяющие данное представление. При этом существенную роль играет найденная автором параметризация унитарной подгруппы группы D_2.

М. А. Наймарк

5690. Заметка о сферических функциях Бесселя. Янкович (Note on spherical Bessel functions. Janković Zlatko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, 11, № 2, 143—148 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Рассматриваются функции

$$j_l=\frac{y_{l+1/2}}{\sqrt{x}}\quad\text{и}\quad n_l=(-1)^{l+1}\frac{y_{-(l+1/2)}}{\sqrt{x}}$$

(называемые автором сферическими функциями Бесселя), где y_ν отличаются от функций Бесселя 1-го рода постоянным множителем.

Для этих функций получены предельные соотношения при $x\to\infty$ и $x\to 0$. Указывается на возможность применения введенных функций к решению уравнения $\Delta\psi+k^2\psi=0$ и дается разложение функции j_l в степенной ряд.

Э. Л. Блох

5691. Модифицированные отношения цилиндрических функций. Оноэ (Modified quotients of cylinder functions. Onoe Morio), Math. Tables and other Aids Comput., 1956, 10, № 53, 27—28 (англ.)

Речь идет о функциях

$$G_\nu(z)\equiv zC_{\nu-1}(z)/C_\nu(z)\ldots\qquad(1)$$

($C_\nu(z)$ — цилиндрическая функция), встречающихся при решении некоторых краевых задач математической физики. Автор считает желательным, принимая в качестве $C_\nu(z)$ в (1) функции $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, собрать формулы, относящиеся к соответствующим функциям $G_\nu(z)$, и табулировать их. Частично эта работа выполнена им в Rept. Inst. Industr. Sci. Univ. Tokyo, 1955, № 32.

М. Н. Олевский

5692. О функциях $\nu(x,\ n)$ и $\mu(x,\ m,\ n)$. Коломбо (Sur les fonctions $\nu(x, n)$ et $\mu(x, m, n)$. Colombo Serge), Bull. sci. math., 1955, 79, mai—juin, 72—78 (франц.)

Для функций

$$\nu(x,\ n)=\int_n^\infty\frac{x^u du}{\Gamma(u+1)},$$

$$\mu(x,\ m,\ n)=\int_0^\infty\frac{x^{u+n}u^m}{\Gamma(u+n+1)}du,$$

рассмотренных Эрдейи, Магнусом, Оберхеттингером, Трикоми (РЖМат, 1957, 3259), Эмбером и Поли (Humbert P., Poli L., Bull. sci. math., 1944, 68, 204—214), Коломбо (РЖМат, 1954, 2220), выводятся некоторые соотношения, связанные с преобразованиями Меллина, Лапласа—Карлсона и Ганкеля. П. И. Кузнецов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5693. **Об обобщенных функциях, встречающихся в операционном исчислении электротехников (случай контура с сосредоточенными постоянными). Фрейташ** (Sur les distributions qui interviennent dans le calcul symbolique des électrotechniciens (cas des circuits à constantes concentrées). Freitas A. César de), Rev. Fac. Ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A3**, № 2, 279—310 (франц.)

Построение операционной теории линий с сосредоточенными постоянными на основе понятия обобщенной функции. В. И. Левин

5694. **Новое правило символического исчисления. Тоскано** (Nuove regole di calcolo simbolico. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 541—543 (итал.)

Пусть $\varphi(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ или $f(t) \supset \varphi(p)$. Обозначим $d/dx \equiv D_x$. Тогда

$$t^{u(1-u)}(t^u D_t)^n f(t) \supset (-1)^n (p^u D_p)^{n-1} p^{n-(n-1)u} D_p \varphi(p), \quad (1)$$

или при $u \neq 1$

$$t^{n(1-u)} D^n_{t^{1-u}} f(t) \supset (-1)^n D^{n-1}_{p^{1-u}} p^{n(1-u)} D_{p^{1-u}} \varphi(p) \quad (2)$$

и

$$t^{n(1-u)+\nu}(t^u D_t)^n f(t) \supset (-1)^{n+\nu} p D_p^{\nu+1}(p^u D_p)^{n-1} \times \times p^{(n-1)(1-u)}\varphi(p).$$

Соотношения (1) и (2) могут быть распространены на интегральные преобразования с ядрами, зависящими от произведения переменных, например, на преобразования Мейера. П. И. Кузнецов

5695. **Теорема операционного исчисления. Ратхи** (A theorem in operational calculus. Rathie C. B.), Ganita, 1953, 4, № 2, 135—137 (англ.)

Теорема. Если $f(x) \doteqdot \Phi(p)$ и $p^{2-\nu} e^{ap^2} f(p) \doteqdot g(x)$, то

$$\Phi(p) = (2a)^{-1/2\nu}\,\Gamma(\nu)\, p \int_0^\infty e^{-(p+x)^2/8a} D_{-\nu}\left(\frac{p+x}{\sqrt{2a}}\right) g(x)\,dx$$

в предположении, что $g(x) = O(x^\mu)$ для малых x при $\mathrm{Re}(\mu) > -1$ и $g(x) = O(x^\lambda)$ для больших x при $\mathrm{Re}(\lambda - \nu + 1) < 0$, где $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, $\mathrm{Re}(p) > 0$ и $\mathrm{Re}(a) > 0$. После доказательства приводится один пример применения этой теоремы для вычисления интеграла, содержащего функцию параболического цилиндра. А. П. Прудников

5696. **Некоторые теоремы о двойственных себе соотношениях в операционном исчислении. II. Бос** (Certain theorems on selfreciprocal relationship in operational calculus. II. Bose B. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 4, 201—215 (англ.)

Обобщение результатов, полученных автором в ранее опубликованных статьях (РЖМат, 1955, 5921; 1956, 1467). П. И. Кузнецов

5697. **Некоторые теоремы и неравенства операционного исчисления для функций двух переменных. Чакраварти** (On some theorems and inequalities in operational calculus with two variables. Chakravarty N. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 4, 221—235 (англ.)

Выводится ряд теорем и неравенств для двойных преобразований Лапласа—Карсона:

$$f(p,q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} h(x,y)\,dx\,dy,\ \mathrm{Re}(p) > 0,\ \mathrm{Re}(q) > 0.$$

Выводы опираются на предположенную, но не доказанную автором законность изменения порядка интегрирования в многомерных несобственных интегралах. П. И. Кузнецов

5698. **Некоторые теоремы операционного исчисления функции n переменных. Чакраварти** (On certain theorems in operational calculus with n variables. Chakravarty N. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 4, 259—264 (англ.)

Формальный вывод четырех теорем n-мерного операционного исчисления (реф. 5697). П. И. Кузнецов

5699. **О разложении оригинала преобразования Лапласа в ряд по функциям Чебышева—Лагерра. Гугнина В. И.**, Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1956, вып. 17, 149—153

По изображению $F(p)$ функции $f(t)$ определяются коэффициенты Δ_n разложения ее в ряд

$$f(t) = e^{-t/2}\sum_{n=0}^\infty \Delta_n \frac{L_n(t)}{n!}, \quad (1)$$

где $L_n(t)$ — полиномы Лагерра.

Предполагается равномерная сходимость ряда (1) на полупрямой $(0, \infty)$. Приведены 2 примера. Э. Л. Блох

5700. **Трансформанты Лапласа эмпирически заданных функций. Пуч-Адам** (Transformées de Laplace des fonctions empiriquement données. Puig-Adam P.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, **37**, 263—278, Discuss. 279—282, 347—354 (франц.)

Эмпирические данные, определяющие функцию $f(x)$, относятся к конечному интервалу $(0, L)$; поэтому вычисление трансформанты Лапласа $L[f(x)]$ требует введения гипотез о поведении $f(x)$ при $x > L$. В зависимости от них строятся различные оценки погрешности

$$\varepsilon = \left|\int_L^\infty f(x)\,e^{-px}dx\right| = \left|L[f(x)] - \int_0^L f(x)\,e^{-px}\,dx\right|.$$

Обсуждаются различные аналитические представления $f(x)$ по эмпирическим данным (полиномиальная аппроксимация, приближение с помощью экспонент $\sum a_i e^{a_i x}$), используемые при вычислении трансформант. Указывается способ вычисления трансформанты

$$\Psi(p) \approx \int_0^L f(x)\,e^{-px}\,dx = -\frac{1}{p}\int_0^L f(x)\,du\ (u = e^{-px}),$$

основанный на применении Стилтьесова планиметра Нистрома. А. И. Лурье

5701. **Об одной формуле обращения преобразования Лапласа. II. Руни** (On an inversion formula for the Laplace transformation. II. Rooney P. G.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 49—52 (англ.)

Пусть

$$\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,du = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \varphi(u)\,du,$$

где интеграл берется в смысле Лебега.

Определим оператор

$$\overrightarrow{{}^{\nu}L}_{k,t}[f(s)] = \frac{k^{3/2}e^{2k}}{t\pi^{1/2}}\int_0^{+\infty} x^{\nu/2}J_{\nu}(2kx^{1/2})f\left[\frac{k(x+1)}{t}\right]dx. \quad (1)$$

В ранее опубликованной статье (РЖМат, 1956, 2325) автор получил результаты для вышеуказанной формулы обращения для случая $\nu > -1$. Для целых отрицательных $\nu < -1$ имеют место теоремы:

1. Если $e^{-\gamma t}\varphi(t) \in L(0, \infty)$, $\gamma > 0$, то $\overrightarrow{{}^{-n}L}_{k,t}[f(s)]$ существует при всех t и всех $k > \gamma t$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\overrightarrow{{}^{-n}L}_{k,t}[f(s)] = (-t)^{-n}\,{}^{0}L_{k,t}[f^{(n)}(s)] - \frac{(-1)^{n-1}k^{n+1/2}e^{2k}}{\pi^{1/2}}\sum_{r=1}^{n}\frac{(kt)^{-r}}{(n-r)!}f^{(r-1)}\left(\frac{k}{t}\right),$$

где ${}^{-\nu}L_{k,t}[f(s)]$ определяется формулой (1), в которой интеграл берется в смысле Коши.

2. Если $e^{-\gamma t}\varphi(t) \in L(0, \infty)$, $\gamma > 0$, то для каждого $t > 0$ лебеговского множества функции φ

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\overrightarrow{{}^{-n}L}_{k,t}[f(s)] + \frac{(-1)^{n-1}k^{n+1/2}e^{2k}}{\pi^{1/2}} \times \sum_{r=1}^{n}\frac{(kt)^{-r}}{(n-r)!}f^{(r-1)}\left(\frac{k}{t}\right)\right\} = \varphi(t).$$

П. И. Кузнецов

5702. **Замечание об одной формуле обращения типа Стилтьеса.** **Порчелли** (Note on a Stieltjes type of inversion. Porcelli Pasquale), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 447—448 (англ.)

Обозначим через $g(t)$ вещественную функцию с ограниченным изменением на отрезке $[0, 1]$ и положим

$$F(z) = \int_0^1 (1+zt)^{-1}\,dg(t)$$

при $z \notin [-\infty, -1]$. В таком случае

$$\lim_{y\to+0}\frac{-1}{\pi t}I_m F\left(\frac{-1}{t} + iy\right) = \frac{g'_+(t) + g'_-(t)}{2}$$

при $0 < t < 1$ везде, где существуют $g'_+(t)$ и $g'_-(t)$.

Я. Тагамлицкий

5703. **Конволюция и некоторые случаи ее применения.** **Хювяринен** (Konvoluutio ja muutamia sen sovellutuksia. Hyvärinen Lassi), Arkhimedes, 1956, № 2, 16—21 (фин.)

5704 К. **Интегральные преобразования в математической физике.** **Трантер К. Дж.** Перев. с англ. Ред. Лыков А. В., М., Гостехиздат, 1956, 204 стр., илл., 6 р. 75 к.

Книга состоит из 7 глав и добавления: 1. Интегральные преобразования и их формулы обращения; 2. Преобразование Лапласа; 3. Преобразование Фурье; 4. Преобразования Ганкеля и Меллина; 5. Приближенное вычисление интегралов, встречающихся при решении задач методом интегральных преобразований; 6. Конечные интегральные преобразования; 7. Совместное применение методов релаксации и интегральных преобразований. Добавление состоит из 5 статей других авторов, относящихся к тематике книги.

В книге дано краткое, иногда без строгих доказательств, изложение преобразований Лапласа, Фурье, Ганкеля и Меллина и их применение к различным задачам физики и техники. Благодаря своей краткости она может служить первым пособием для ознакомления с указанными интегральными преобразованиями и их применениями. В книге отсутствуют интегральные преобразования Гильберта, Лузина и др., которые в последнее время находят широкое применение в приложениях.

Перевод книги выполнен недостаточно аккуратно, например, теорема о свертке именуется теоремой Фальтунга и т. п.

П. И. Кузнецов

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

5705. **Разложение силовой функции взаимного притяжения двух однородных эллипсоидов.** **Кондурарь В. Т.**, Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1956, 10, 97—107

Имеются два однородных вытянутых эллипсоида вращения с общей плоскостью симметрии, в которой имеются два эллипса; оси вращения эллипсоидов расположены в плоскости симметрии. Обозначим через R взаимное расстояние между центрами эллипсоидов, через Φ и Ψ углы между направлениями осей вращения и линий центров эллипсоидов. Автор выводит следующую формулу для силовой функции взаимного притяжения эллипсоидов

$$U = U(R, \Phi, \Psi) = \frac{m_1 m_2}{R}f \times \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{s} R^{\nu,\,s}_{2n,\,2k,\,2q}\bar{R}^{2\nu,\,2s}_{2n,\,2k,\,2q} \times \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{2k}\left(\frac{b_1}{R}\right)^{2\nu}\left(\frac{b_2}{R}\right)^{2n},$$

где m_1, m_2 — массы эллипсоидов, b_1 и b_2 — малые полуоси, f — некоторая постоянная. Величины $R^{\nu,\,s}_{2n,\,2k,\,2q}$ выражаются бесконечными рядами, расположенными по степеням эксцентриситета e_1 экваториального сечения одного эллипсоида, а $\bar{R}^{2\nu,\,2s}_{2n,\,2k,\,2q}$ выражаются бесконечными рядами, расположенными по степеням величины b_2/R и по степеням эксцентриситета e_2 экваториального сечения другого эллипсоида. Коэффициенты последних рядов суть тригонометрические полиномы относительно $\cos\Phi$, $\sin\Phi$, $\cos\Psi$, $\sin\Psi$.

В работе имеются опечатки.

Н. М. Дайнеко

5706. **Оценка некоторого структурного отношения и сравнение двух методов измерения одной и той же величины.** **Бастенер** (Estimation d'une relation structurale et comparaison de deux méthodes de mesure d'une même grandeur. Bastenaire F.), Rev. statist. appliquée, 1955, 3, № 2, 83—99 (франц.)

Часто бывает, что одну и ту же характеристику (например, физическую или химическую) можно измерить различными способами. Ясно, что величина измерения зависит не только от количества, но и от точности способа измерения. Очень важно также учитывать чувствительность способа измерения к изменениям характеристики, а также связь чувствительности с точностью. При выборе способа измерения нельзя обойтись без оценки «структурного соотношения», степени разброса измерений и учета неточности, связанной с принятым критерием. Исследованием этих вопросов и занимается автор. Работа состоит из следующих частей:

1. Оценка некоторого структурного соотношения между двумя величинами, измерения которых производятся с ошибками.

2. Сравнение двух методов измерения одной и той же величины.

3. Применение к сравнению двух испытаний металлургического кокса.

Автор предупреждает, что в работе не все строго доказано. Из резюме автора

5707. К статье Инсолера «Журнал финансовой математики». Фрола (Su di un articolo di F. Insolera apparso sul «Giornale di matematica finanziaria». Frola Eugenio), Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953—1954, 88, № 1, 256—258 (итал.)

Приводятся полемические и методические высказывания по поводу работы, упоминаемой в заголовке.

П. И. Романовский

См. также: 5453, 5550, 5569, 5577, 5588, 5589, 5594, 5595, 5704, 5706, 5710, 5712, 5730, 5928

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

5708. Об определении полного пространства. Серпинский (O pewnej definicji przestrzeni zupełnej. Sierpiński W.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. 2, 1, № 2, 206—207 (польск.)

Автор говорит, что метрическое пространство обладает свойством Асколи, если каждая убывающая последовательность замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, имеет общую точку. Доказывается хорошо известная эквивалентность свойства Асколи и обычной полноты метрического пространства. В заключение дается пример полного метрического пространства, в котором имеется убывающая последовательность замкнутых шаров (с радиусами, не стремящимися к нулю) без общей точки. W. Słowikowski

5709. Инвариантные подпространства вполне непрерывных операторов в локально выпуклых линейных топологических пространствах. Альтман (Invariant subspaces of completely continuous operators in locally convex linear topological spaces. Altman M.), Studia math., 1956, 15, № 2, 129—130 (англ.)

Ароншайн и Смит доказали (РЖМат, 1955, 4539), что для каждого линейного вполне непрерывного эндоморфизма банахова пространства существуют собственные инвариантные подпространства. Автор обобщает эту теорему на случай локально выпуклого линейного топологического пространства X. Эндоморфизм U пространства X называется вполне непрерывным, если он отображает некоторую окрестность элемента $0 \in X$ в компактное множество. R. Sikorski

5710. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Кангро Г. Ф., ENSV Teaduste Akad. toimetised. Tehn. ja füüs.—matem. teaduste seer., Изв. АН ЭстССР, сер. техн. и физ.-матем. н., 1956, 5, № 2, 108—128 (рез. эст., нем.)

Пусть X, Y — банаховы пространства, $A_{n\nu}$ — линейные операторы из X в Y. Исследуется преобразование вида

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad (1)$$

переводящее последовательности $\xi = \{x_\nu\} \subset X$ в последовательности $\eta = \{y_n\} \subset Y$. Через c_X, m_X, l_X обозначаются банаховы пространства, составленные по образцу известных пространств c, m, l из последовательностей элементов пространства X.

В § 1 устанавливаются условия, при которых преобразование (1) отображает пространство m_X в c_Y, l_X в c_Y, l_X в l_Y. Случай $c_X \to c_Y$ был разобран ранее (Melvin-Melvin H., Proc. London Math. Soc., 1951, 53, 83—108; Zeller K., Math. Z., 1952, 56, 18—20).

Основные теоремы:

Теорема 2. Если при каждом ν существует $\lim_{n\to\infty} A_{n\nu} = A_\nu$ (по норме), то для того чтобы (1) устанавливало отображение пространства m_X в c_Y, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) $\sum_\nu A_{n\nu} x_\nu$ сходится при каждом n и при всех $\xi \in m_X$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\|x_\nu\| \leqslant 1} \left\| \sum\limits_{\nu=0}^{p} (A_{n\nu} - A_\nu) x_\nu \right\| = 0$ равномерно относительно p. При выполнении этих условий $\lim y_n = \sum_\nu A_\nu x_\nu$.

Теорема 3. Для того чтобы (1) устанавливало отображение пространства l_X в c_Y, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) при каждом ν существует $\lim_{n\to\infty} A_{n\nu} x = A_\nu x (x \in X)$; 2) $\|A_{n\nu}\| \leqslant M$ $(n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, где M — постоянная. При этом $\lim y_n = \sum_\nu A_\nu x_\nu$.

Теорема 4. Для того чтобы (1) устанавливало отображение пространства l_X в l_Y, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_n \|A_{n\nu} x\| \leqslant M \|x\|,$$

где M — постоянная, не зависящая от x и ν.

В § 2 эти теоремы применяются к исследованию абстрактных множителей суммирования. Под абстрактными множителями понимаются линейные операторы, переводящие элементы пространства X в элементы пространства Y. Для некоторых матричных методов суммирования находятся условия, при которых последовательность абстрактных множителей переводит ряд, суммируемый одним способом, в ряд, суммируемый другим способом.

В § 3 рассматривается абстрактное умножение рядов: «перемножаются» ряд элементов банахова пространства и ряд линейных операторов, действующих в этом пространстве, получается ряд элементов другого банахова пространства. Исследуется вопрос о суммируемости полученного ряда в связи с теми или иными предположениями о суммируемости перемножаемых рядов.

Примечание референта. Доказательство теоремы 2 может быть несколько сокращено с помощью следующего очевидного замечания: если A_ν — линейные операторы и ряд $\sum_\nu A_\nu x_\nu$ сходится для любой последовательности $\xi \in m_X$, то сходимость этого ряда в единичном шаре пространства m_X равномерна.

Б. З. Вулих

5711. О методе Фридрихса расширения положительно определенного оператора до самосопряженного. Бирман М. Ш., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1956, 33, № 3, 132—136

Прием Фридрихса (Friedrichs K., Math. Ann., 1934, 109, 465—487, 685—713) расширения положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве распространяется на тот случай, когда положительно определенный оператор отображает одно из двух взаимно сопряженных пространств

Банаха в другое. С помощью полученного результата доказывается (в терминах пространств $L_\varphi(\Omega)$) существование обобщенных решений краевых задач для некоторых типов самосопряженных эллиптических уравнений. О. В. Бесов

5712. Об одном комбинаторном неравенстве и его применении к пространствам L^2. К о т л я р (A combinatorial inequality and its applications to L^2-spaces. C o t l a r M.), Rev mat. cuyana, 1955, 1, № 2, 41—55 (англ.)

Пусть E — отрезок $[1, N]$ натурального ряда, а $\mu(H)$ — такая неотрицательная функция, определенная на совокупности подмножеств $H \subset E$, что $\mu(H_1) \leqslant \leqslant \mu(H_2)$, если $H_1 \subset H_2$. Пусть, далее, $f(i)$ — определенная на E функция с целыми неотрицательными значениями. Через $\varphi_H(i)$ обозначается характеристическая функция подмножества H.

Существует конечное число представлений вида

$$f(i) = \lambda_1 \varphi_{H_1}(i) + \lambda_2 \varphi_{H_2}(i) + \ldots + \lambda_n \varphi_{H_n}(i),$$

где λ_k — неотрицательные целые числа, а множества H_k могут пересекаться. Автор называет интегралом функции $f(i)$ по отношению к функции $\mu(H)$ величину

$$\sum f \Delta\mu = \max \{\lambda_1 \mu(H_1) + \ldots + \lambda_n \mu(H_n)\}.$$

Ниже используется следующая специальная функция $\mu(H)$: если H состоит из одного числа, то $\mu(H) = 0$, если же $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ и $h_1 < h_2 < \ldots < h_m$, то

$$\mu(H) = 5\{(h_m - h_1) + (h_{m-1} - h_2) + \ldots\}.$$

Пусть даны целое неотрицательное число k и вещественное число $\lambda > 1$ и пусть $f_\nu(i)$ — всевозможные функции указанного выше вида, для которых $f_\nu(1) + f_\nu(2) + \ldots + f_\nu(N) = k$. Для суммы $S = \sum_\nu \lambda^{-\sum f_\nu \Delta\mu}$ автор получает оценку

$$S \leqslant \frac{\lambda^{2k} k k^{k^{3/4}} N}{(\lambda^5 - 1)^k (\lambda - 1)^k},$$

которую затем использует для доказательства некоторых теорем теории коммутативных нормированных колец, в частности, колец ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Теоремы эти, однако, остаются недоказанными, так как автор опирается на неравенство

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^{-[\gamma_1 \mu(H_1) + \gamma_2 \mu(H_2) + \ldots]} \leqslant \left(\sqrt[5]{2}\right)^{-\sum f \Delta\mu},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — целые неотрицательные коэффициенты в разложении $f(i) = \gamma_1 \varphi_{H_1}(i) + \gamma_2 \varphi_{H_2}(i) + \ldots$; на самом же деле, как это следует из приведенного выше определения интеграла, знак неравенства должен быть обратный.

Из упомянутых теорем автор выводит некоторые следствия относительно сингулярных интегральных операторов. Эти следствия верны, так как они легко, и притом в усиленной форме, вытекают из известных теорем об ограниченности сингулярных операторов в L_2.

П р и м е ч а н и е р е ф е р е н т а. 1. Автор рассматривает нелинейный оператор T, определенный на всем гильбертовом пространстве и удовлетворяющий соотношению $(Tx, y) = (x, Ty)$. Однако хорошо известно, что это соотношение влечет за собой линейность оператора T. 2. Теорему об ограниченности в L_2 двойного сингулярного интеграла автор приписывает Кальдерону и Зигмунду. На самом деле эта теорема впервые была доказана референтом (Докл. АН СССР, 1937, 15, № 6, 429—432). С. Г. Михлин

5713. Теория нормированных колец. I, II. Г у а н ь Ч ж а о - ч ж и, Т я н ь Ф а н - ц з э н (賦範環論 • 關肇直, 田方增), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 1, 107—216; № 2, 223—363 (кит.)

Обзорная статья, посвященная элементарному изложению теории нормированных колец. Статья разделена на две части и состоит из 4 глав и 2 приложений.

В гл. 1 и 2 изложена общая теория нормированных колец, в гл. 3 рассматриваются нормированные кольца с инволюцией и в гл. 4 дан обзор результатов, относящихся к гармоническому анализу на коммутативных локально компактных топологических группах.

Изложение построено на основе работ И. М. Гельфанда. В приложении 1 даны основные понятия, связанные с банаховыми пространствами, в приложении 2 говорится о мерах на локально компактных пространствах и о мерах Хара. Ким Кё Сек

5714. Об одном обобщении теоремы Гельфанда и Колмогорова. М а т т е с (Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Gelfand und Kolmogoroff. M a t t h e s K l a u s), Math. Nachr., 1956, 15, № 2, 117—121 (нем.)

Совокупность (D, E) непрерывных функций $f(p)$ на локально бикомпактном пространстве E называется n-кольцом, если для любой функции $F(x_1, \ldots, x_m)$ $(-\infty < x_1, \ldots, x_m < \infty)$, имеющей непрерывные производные до порядка n, выражение $F(f_1(p), \ldots, f_m(p))$ принадлежит (D, E) вместе с элементами $f_1(p), \ldots, f_m(p)$. Пример: кольцо $D_n(\mathfrak{M})$ всех функций $f(p)$ с непрерывными производными до порядка n на n-кратно дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}$.

Т е о р е м а. Если n-кольца (D, E) и (D', E') алгебраически изоморфны, то пространства E и E' гомеоморфны, причем существует такой (единственный) гомеоморфизм $\omega : E \to E'$, что исходный изоморфизм α между кольцами (D, E) и (D', E') может быть записан в виде $\alpha f(p) = f(\omega p)$.

С л е д с т в и е. Если для двух n-кратно дифференцируемых многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ кольца $D_n(\mathfrak{M})$ и $D_n(\mathfrak{M}')$ изоморфны, то между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ существует взаимно однозначное и в обе стороны n-кратно дифференцируемое соответствие. Г. Е. Шилов

5715. Идеалы в мультипликативных системах непрерывных функций; исправление. С и в и н, Ю д (Ideals in multiplicative systems of continuous functions: a correction. C i v i n P a u l, Y o o d B e r t r a m), Duke Math. J., 1956, 23, № 4, 631 (англ.)

Исправляется одно из утверждений заметки авторов (РЖМат, 1957, 2485), не влияющее на окончательные результаты. Г. Е. Шилов

5716. О групповом изоморфизме унитарных групп в AW^*-алгебрах. С а к а и (On the group isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras. S a k a i S h ô i c h i r ô), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 1—2, 87—95 (англ.)

Пусть M и N — два AW^*-фактора в смысле Капланского (Kaplansky I., Ann. Math., 1951, 53, 233—249), M_u, N_u — их унитарные группы, т. е. совокупность всех элементов u в M, соответственно N, удовлетворяющих условию $u^*u = uu^* = e$. Доказывается, что всякий равномерно непрерывный (в одну сторону) по норме групповой изоморфизм между M_u и N_u порождается некоторым (линейным или сопряженно линейным) $*$-изоморфизмом самих этих факторов M, N. М. А. Наймарк

5717. Приведение к треугольному виду квазиунитарных операторов. П о л я ц к и й В. Т., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1 М., АН СССР, 1956, 119—120

Оператор T называется квазиунитарным, если оператор $I-T^*T$ конечномерный. Рассматриваются квазиунитарные операторы, имеющие внутри единичного круга по крайней мере одну регулярную точку. Для таких операторов строится треугольная модель и исследуется спектр. М. С. Лившиц

5718. О собственных числах и собственных элементах одного класса эрмитовых операторов. В и т о (Sugli autovalori e sulle autosoluzioni di una classe di trasformazioni hermitiane. V i t o L u c i a n o d e), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, 25, 144—175 (итал.)

В гильбертовом пространстве рассматриваются самосопряженные операторы, для которых обратные операторы вполне непрерывны. Новых результатов статья не содержит. С. Г. Михлин

5719. Общие собственные векторы перестановочных операторов. Ч ж у н (Common eigenvectors of commuting operators. C h o n g F.), Austral. J. Sci., 1956, 19, № 1, 9—10 (англ.)

В гильбертовом пространстве рассматриваются линейные операторы, имеющие в каждом инвариантном подпространстве положительной размерности непустой чисто точечный спектр. Элементарными рассуждениями устанавливается, что если два таких оператора A и B перестановочны, то у них есть по крайней мере один общий единичный собственный вектор (теорема I). Если, кроме того, A и B — нормальные операторы, то у них есть общая полная ортонормированная система собственных векторов (теорема II). И. С. Иохвидов

5720. Упрощенное каноническое спектральное представление нормальных операторов в гильбертовом пространстве и его применения. И н о у э (Simplification of the canonical spectral representation of a normal operator in Hilbert space and its applications. I n o u e S a k u j i), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 10, 694—698 (англ.)

Предварительное сообщение об исследованиях автора, связанных с редукцией интегрирования по комплексной плоскости в спектральной формуле для нормальных операторов к интегрированию по кривой и приложением полученного представления к вопросу об унитарной эквивалентности нормальных операторов.

В ряде мест изложение неясное; доказательства не приводятся. И. М. Глазман

5721. Порождающие элементы кольца ограниченных операторов. Д е й в и с (Generators of the ring of bounded operators. D a v i s C h a n d l e r), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 970—972 (англ.)

Пусть K — некоторое слабо замкнутое кольцо ограниченных линейных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H ($\dim H = n \leqslant \infty$). Элементы $A, B, C, \ldots$ из K называются порождающими элементами кольца K, если наименьшее слабо замкнутое кольцо, содержащее операторы $A, B, C, \ldots$, совпадает с K. Исследуется вопрос о построении системы, состоящей из наименьшего числа m проектирующих операторов, порождающих кольцо M всех ограниченных операторов в H.

Дано конструктивное доказательство равенства $m=3$ при $3<n\leqslant\infty$ (легко видеть, что при $1\leqslant n\leqslant 3$ будет $m=n$); с помощью той же конструкции устанавливается существование системы двух унитарных операторов, порождающих M. И. М. Глазман

5722. Несепарабельность некоторых конечных факторов. Ф е л д м а н (Nonseparability of certain finite factors. F e l d m a n J a c o b), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 1, 23—26 (англ.)

Рассматривается слабо замкнутое самосопряженное кольцо $\mathfrak{A}$ конечного класса операторов в гильбертовом пространстве, содержащее единичный оператор. Пусть $\mathfrak{Z}$ — центр кольца $\mathfrak{A}$, Γ — пространство максимальных идеалов кольца $\mathfrak{Z}$, f — естественный изоморфизм кольца $\mathfrak{Z}$ на кольцо $C(\Gamma)$ всех непрерывных комплексных функций на Γ, $\operatorname{tr}(A)$ — след в $\mathfrak{A}$ со значениями в $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{M}_\gamma=\{A: f(\operatorname{tr}(A^*A))(\gamma)=0\}$, $\mathfrak{A}_\gamma=\mathfrak{A}/\mathfrak{M}_\gamma$ и φ_γ — естественный гомоморфизм кольца $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_\gamma$. Пусть, наконец, $\mathfrak{H}_\gamma$ — гильбертово пространство, полученное из $\mathfrak{A}_\gamma$ пополнением по скалярному произведению $(\xi,\eta)=f(\operatorname{tr}(B^*A))(\gamma)$ при $A\in\xi$, $B\in\eta$.

Основной результат: Пусть $\gamma\in\Gamma$. Если $\{\gamma\}$ (множество, состоящее из одной точки γ) открыто, то $\mathfrak{H}_\gamma$ сепарабельно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(E)$, где $E=f^{-1}(\chi_{\{\gamma\}})$ (χ_Δ вообще обозначает характеристическую функцию множества Δ), можно изоморфно представить в виде кольца операторов в сепарабельном пространстве; если же $\{\gamma\}$ не открыто, то $\mathfrak{H}_\gamma$ сепарабельно тогда и только тогда, когда существует одновременно открытое и замкнутое множество Γ_0, содержащее Γ и такое, что $\mathfrak{A}(E_0)$, где $E_0=f^{-1}(\chi_{\Gamma_0})$, n-однородно при некотором натуральном n.

М. А. Наймарк

5723. О типах направленности разложений в общей теории интеграла. А у м а н (Über Typen von Zerlegungsausrichtungen in der allgemeinen Integrationstheorie. A u m a n n G e o r g), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1956, 59, № 2, 79—86 (нем.)

Общее понятие интеграла (верхнего и нижнего тотала) строится с помощью произвольным образом упорядоченной (в смысле Шатуновского—Мура—Смита) совокупности конечных разложений области интегрирования на заданные ячейки (РЖМат, 1956, 6504). Два упорядочения разложений $\geqslant_1$ и $\geqslant_2$ называются эквивалентными, если для любого разложения $\mathfrak{z}$ существуют такие разложения $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$, что из $\mathfrak{z}'\geqslant_2\mathfrak{z}_1$ следует $\mathfrak{z}'\geqslant_1\mathfrak{z}$ и из $\mathfrak{z}'\geqslant_1\mathfrak{z}_2$ следует $\mathfrak{z}'\geqslant_2\mathfrak{z}$. Эквивалентные упорядочения порождают одинаковые интегралы. Обратное верно, если упорядочение разложений обладает следующим свойством: при заданных разложениях $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{z}'$, если для каждой компоненты $I_\nu\in\mathfrak{z}$ существует разложение $\mathfrak{z}_\nu\geqslant\mathfrak{z}'$, содержащее I_ν в качестве одной из компонент, то $\mathfrak{z}\geqslant\mathfrak{z}'$.

Упорядочение разложений может быть введено посредством задания отображения каждого разложения на некоторое множество ячеек. Например, если дано отображение $\mathfrak{z}\to\mathfrak{R}(\mathfrak{z})$, причем: 1) $\mathfrak{z}\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{z})$, 2) $\mathfrak{z}_1\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{z}_2)$ и $\mathfrak{z}_2\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{z}_3)$ влекут $\mathfrak{z}_1\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{z}_3)$, 3) для любых $\mathfrak{z}_1$ и $\mathfrak{z}_2$ существует $\mathfrak{z}_3\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{z}_1)\wedge\mathfrak{R}(\mathfrak{z}_2)$, то упорядочение можно задать так: $\mathfrak{z}'\geqslant\mathfrak{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{z}'\subset\mathfrak{R}(\mathfrak{z})$.

Применительно к функциям одного вещественного переменного общие результаты дают возможность установить упорядоченную шкалу различных процессов интегрирования. Б. З. Вулих

5724. Заметка об интегрировании в векторных пространствах. У э с т о н (A note on integration in vector spaces. W e s t o n J. D.), J. London Math. Soc., 1956, 31, № 4, 399—400 (англ.)

Интегрирование функций со значениями в линейных топологических пространствах сводится к интегрированию функций со значениями в сопряженных банаховых пространствах.

Пусть E — локально компактное пространство с мерой Радона μ, F — локально выпуклое линейное топологическое пространство, в котором замкнутая выпуклая оболочка любого компактного множества компактна, f — непрерывная функция из E в F с компактным несущим множеством, C — множество ее значений, S — замкнутая выпуклая оболочка множеств C и $-C$. Из сделанных предположений следует, что множество S

компактно. Пусть Y — подпространство пространства F, порождаемое множеством S, и для $y \in Y$ положим

$$\|y\| = \inf_{\rho>0,\ \rho y \in S} \{1/\rho\}.$$

По одной теореме Диксмье (Dixmier J., Duke Math. J., 1948, 15, 1057—1071, теорема 19) из компактности множества S в смысле топологии, индуцированной в Y из F (назовем ее топологией $\mathscr{T}$), следует, что Y как линейное нормированное пространство, эквивалентно сопряженному пространству X^* к некоторому банахову пространству X. Пространство X можно составить из линейных функционалов на Y, которые непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$. При этом в S топология $\mathscr{T}$ совпадает со слабой топологией пространства X^*, а потому можно считать, что значения функции f принадлежат пространству X^*.

Интеграл от функции f, как элемент пространства X^*, определяется формулой

$$\langle x, \int f(t)\, d\mu(t)\rangle = \int \langle x, f(t)\rangle\, d\mu(t),$$

где x — любой элемент из X. Б. З. Вулих

5725. Об аксиоматическом построении теории распределений. Себаштьян-и-Сильва (Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions. Sebastião e Silva J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A4**, №1—2, 79—186 (франц.)

Рассматривается задача прямого построения пространств распределений Л. Шварца. Для распределений конечного порядка она ставится в следующей абстрактной алгебраической форме. Пусть E — коммутативная группа, Λ — полугруппа гомоморфизмов подгрупп группы E на всю группу, содержащая тождественный автоморфизм, и для каждого $\Phi \in \Lambda$ задана подгруппа $N(\Phi) \subset E$, содержащая ядро гомоморфизма Φ; требуется построить надгруппу $\tilde{E} \supset E$, в которой каждый гомоморфизм $\Phi \in \Lambda$ можно продолжить на все $\tilde{E}$ так, чтобы 1) продолжение $\tilde{\Phi}$ было эндоморфизмом, 2) $\widetilde{\Phi\Psi} = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}$ для всех $\Phi, \Psi \in \Lambda$, 3) для всякого $\tilde{u} \in \tilde{E}$ существовали такие элементы $u \in E$ и $\Phi \in \Lambda$, что $\tilde{u} = \tilde{\Phi}u$, и 4) $\tilde{N}(\Phi) = E \cap N(\tilde{\Phi})$, где $N(\tilde{\Phi})$ — ядро эндоморфизма $\tilde{\Phi}$. Эта задача не может иметь более одного решения, с точностью до операторного изоморфизма, оставляющего все элементы из E на месте. Указываются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять подгруппа $\tilde{N}(\Phi)$ для ее разрешимости, и дается алгебраическая конструкция решения. Если E — пространство $\mathfrak{C}(Q)$ всех непрерывных функций на (конечном или бесконечном) интервале $Q \subset R^n$, Λ — полугруппа с единицей, порожденная операторами дифференцирования D_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$, и $D^{\mathbf{p}} = D_{x_1}^{p_1} \ldots D_{x_n}^{p_n}$ $(p_1 \geqslant 0, \ldots, p_n \geqslant 0)$, то $\tilde{N}(D^{\mathbf{p}})$ должно быть совокупностью всех функций вида $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu_i=0}^{p_i-1} x_i^{\nu_i} \gamma_{i,\nu_i}(x)$, где γ_{i,ν_i} — непрерывные функции, не зависящие от x_i. Группа $\tilde{E}$ оказывается тогда совокупностью $\mathfrak{C}_p(Q)$ всех распределений конечного порядка на Q (конечного — ибо в соответствии с условием 3) каждое распределение $\tilde{u}$ есть результат применения некоторого расширенного оператора дифференцирования $\tilde{D}^{\mathbf{p}}$ к непрерывной функции u). При этом совокупность $\mathfrak{C}_p(Q)$ всех распределений порядка $\leqslant n_p$ реализуется как фактор-пространство $\mathfrak{C}(Q)\,\tilde{N}(D^{\mathbf{p}})$, где $D = D_{x_1} \ldots D_{x_n}$, а $\mathfrak{C}_\omega(Q)$ — как индуктивный предел этих фактор-пространств (относительно отображений $\mathfrak{C}_p(Q) \to \mathfrak{C}_{p+1}(Q)$, порождаемых интегрированием $u \to \mathfrak{I}u = \int_c^x \ldots \int u(x)\, dx$, где c — произвольная фиксированная точка из Q). Совокупность же $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$ всех распределений на произвольном открытом множестве $\Omega \subset R^n$ строится затем как проективный предел пространств $\mathfrak{C}_\omega(Q)$ по всевозможным компактным интервалам $Q \subset \Omega$. (Такая же конструкция пространства распределений (подробно описанная лишь для случая $n = 1$) была несколько раньше предложена Сикорским (РЖМат, 1956, 3945). *Реф.*). Дается аксиоматическое описание объединения всех пространств $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$ (РЖМат, 1956, 5357). Устанавливаются топологические свойства пространств $\mathfrak{C}_\omega(Q)$ и $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$ (топологизированных в соответствии с их конструкцией), причем автор существенно опирается на свою работу (РЖМат, 1957, 1586). Находится общий вид линейных отображений пространств $\mathfrak{C}_\omega(Q)$ и $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$; при этом оказывается, что ядро Дирака $\delta(x - y)$, рассматриваемое как функция от y на Q или Ω со значениями соответственно в $\mathfrak{C}_\omega(Q)$ или $\mathfrak{C}_\pi(\Omega)$, играет ту же роль, что и ядро $(z - \zeta)^{-1}$ в теории аналитических функционалов Фантапие, т. е. линейное отображение F вполне определяется своей «индикатрисой» $F(\delta(x - y))$.

На этом основывается установление тождества пространства $\mathfrak{C}_\pi$ с пространством $\mathfrak{D}'$ Л. Шварца. В одном из приложений дается построение пространств распределений конечного порядка с помощью последовательностей бесконечно дифференцируемых функций; точно такое же построение было сообщено в докладе Я. Микусинского на Всесоюзном совещании по функциональному анализу в январе 1956 г. Д. А. Райков

5726. Исправления к статье «Об аксиоматическом построении теории распределений»: Себаштьян-и-Сильва (Rectifications à l'article «Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions». Sebastião e Silva J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1955—1956, **A5**, № 1, 169—170 (франц.)

Несколько поправок к указанной статье (реф. 5725) в связи с замечаниями, сообщенными автору Л. Шварцем, реферировавшим ее для Math. Revs. Указывается, что установленное в статье (необходимое и) достаточное условие непрерывности линейного отображения пространства $\mathfrak{C}_\pi(\Omega) = \mathfrak{D}'$ в любое локально выпуклое пространство (а именно, сохранение сходимости последовательностей) является непосредственным следствием результатов, содержащихся в работе Гротендика (Grothendieck A., Summa brasiliensis math., 1954, **3**, 57—123). Отмечается, что более полная и общая теория интегрирования распределений предложена Л. Шварцем в его семинаре 1953—1954 г. (Schwartz L., J. analyse math., 1954—1955, **4**, 88—148). Д. А. Райков

5727. Об отношении абстрактной теории интегралов Римана к теории мер Радона. Бауэр (Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße. Bauer Heinz), Math. Z., 1956, **65**, № 4, 448—482 (нем.)

Подробное изложение результатов автора (реф. 5728). В. А. Рохлин

5728. К теории интеграла Римана в локально компактных пространствах. Бауэр (Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen. Bauer Heinz), Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1955, München, 1956, 187—208 (нем.)

Дается схема построения теории интеграла Римана относительно некоторого функционала как для случая абстрактного пространства, так и для случая локально компактного пространства («компактными пространствами» автор называет бикомпакты).

В § 1 рассматривается абстрактное множество E, некоторая совокупность $\mathfrak{L}$ действительных функций, определенных на E, и действительный положительный линейный функционал I, заданный на $\mathfrak{L}$. При этом предполагается, что если $f\in\mathfrak{L}$ и $g\in\mathfrak{L}$, то $\alpha f+\beta g\in\mathfrak{L}$ (α и β — действительные числа), $|f|\in\mathfrak{L}$ и $\min(1, f)\in\mathfrak{L}$. Пополняя относительно функционала I кольцо функций $\mathfrak{L}$ до некоторого пространства $\overline{\mathfrak{L}}$ и распространяя функционал I в функционал $\overline{I}$ на всем пространстве $\overline{\mathfrak{L}}$, автор определяет множество $\mathfrak{S}\subseteq\overline{\mathfrak{L}}$ функций, интегрируемых по Риману, и интеграл Римана формулой: $\int f d\mu=\overline{I}(f)$, $f\in\mathfrak{S}$. Здесь μ обозначает полную меру, естественным образом индуцируемую функционалом I на таких множествах $A\subseteq E$, что $\chi_A\in\overline{\mathfrak{L}}$, где χ_A — характеристическая функция, именно $\mu A=\overline{I}(\chi_A)$. Определяется также и несобственный интеграл Римана.

В § 2 формулируется теорема о разложении линейного функционала I на непрерывную часть I_c и «чисто разрывную» часть I_p и дается связь этого разложения с разложением меры μ на σ-аддитивную часть μ_c и «чисто конечно-аддитивную» часть μ_p (Yosida K., Hewitt E., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 46—66). Изучается также связь собственных и несобственных интегралов относительно функционалов I_c и I_p с соответствующими интегралами относительно I.

В § 3 дается схема построения интеграла Римана в локально компактном пространстве относительно функционала I, определенного на множестве непрерывных функций, удовлетворяющем некоторым условиям. Устанавливается связь между топологией пространства E и естественно возникающими метрическими понятиями: мерой, квадрируемостью множеств, интегрируемостью функций и т. п.

Указывается связь построенной теории с результатами предыдущих работ автора, а также работ Хаупта, Пока и др.

В § 4 сформулированы теоремы, показывающие, что построение интеграла Римана для абстрактного пространства E относительно функционала I может быть в известном смысле сведено к построению интеграла Римана для непрерывных функций в некотором локально компактном пространстве $E'_{\mathfrak{L}}$, которое, в частности, обладает следующими свойствами: 1) E плотно в $E'_{\mathfrak{L}}$; 2) каждая функция $f\in\mathfrak{L}$ может быть продолжена в такую непрерывную функцию f', определенную на $E'_{\mathfrak{L}}$, что множества $[|f|<\alpha]$ компактны для любого $\alpha>0$.

Даются условия, при которых пространство $E'_{\mathfrak{L}}$ с точностью до гомеоморфизма, оставляющего на месте точки из E, определяется однозначно.

В § 5 рассматривается пространство $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ всех положительных линейных функционалов I, определенных на пространстве $\mathfrak{L}$. Изучается топология пространства $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ и ее связь с сходимостью мер μ множеств, где каждая мера μ индуцируется соответствующим функционалом $I\in\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$.

§ 6 посвящен изучению топологии пространства $\mathfrak{M}_+(E)$ положительных радоновых мер в локально компактном пространстве E, где $\mathfrak{M}_+(E)=\mathfrak{J}_+(\mathfrak{K}(E))$, $\mathfrak{K}(E)$ — множество всех непрерывных действительных функций с компактными носителями в E.

Доказательства не приводятся.

Л. Д. Кудрявцев

5729. Теория обобщенных функций. Фэн Кан (廣義函數論. 馬康), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 3, 405—590 (кит.)

Систематически излагается теория обобщенных функций на основе работ Л. Шварца, И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова. Даны такие основные понятия, как обобщенные функции, их дифференцирование и интегрирование, дифференциальные и интегральные уравнения, свертывание, локальные свойства, преобразование Фурье; указаны применения к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных. В статье содержится много собственных результатов автора. Ли Дя Гон

5730. Сингулярные интегральные операторы и сферические функции. Хорват (Singular integral operators and spherical harmonics. Horváth J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 52—63 (англ.)

Доказывается, что: 1) если $\varphi\in(\mathscr{D})$ (обозначения см. Schwartz L., Théorie des distributions, I, II, Paris, 1950, 1951), а характеристика $k(\sigma)$ суммируема по единичной сфере S_{n-1}, причем $\int_{S_{n-1}}k(\sigma)\,d\sigma=0$, то сингулярный интеграл

$$\mathscr{K}[f]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x-t|>\varepsilon}k\left(\frac{x-t}{|x-t|}\right)\frac{f(t)}{|x-t|^n}\,dt$$

существует и определяет некоторую обобщенную функцию K; 2) если $k(\sigma)\in L^s(S_{n-1})$, $s>1$, то $K\in(\mathscr{D}'_L p)$ при любом p, $1<p<\infty$. Для любой обобщенной функции $T\in(\mathscr{D}'_L p)$ определяется «преобразование Гильберта» $\mathscr{K}[T]=K*T$.

Доказывается теорема: Если $k(\sigma)\in L^s(S_{n-1})$ при некотором $s>1$, то преобразование $T\to K*T$ непрерывно отображает $(\mathscr{D}'_L p)$ в $(\mathscr{D}'_L p)$ при любом p, $1<p<\infty$.

Дается новый вывод формул композиции кратных сингулярных интегралов, данных в свое время Кеферентом и Жиро. С. Г. Михлин

5731. Определение оператора H Шрёдингера для атома водорода. Кольме (Définition de l'opérateur H de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène. Colmez Jean), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1955, 72, № 2, 111—149 (франц.)

Подробное изложение и дальнейшее развитие ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 3159). М. А. Наймарк

5732. Об изоморфизме пространств. Оно (Spacial isomorphism について. I. 小野貴生), 數學, Сугаку, 1954, 6, № 1, 21—23 (японск.)

5733 К. Элементы функционального анализа. Люстерник, Соболев (Elemente der Funktionalanalysis. Ljusternik L. A., Sobolew W. I. Berlin, Akademie-Verlag, 1955, xi, 256 S., 25.00 DM) (нем.)

Перевод книги «Элементы функционального анализа» М., Гостехиздат, 1951).

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 63.

5734 К. Функциональный анализ. Рисс, Надь (Functional analysis. Riesz Frigyes, Sz.-Nagy Béla. Translated by Leo F. Boron. New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1955, xii, 468 pp., 10.00 doll.) (англ.)

Перевод книги «Leçons d'analyse fonctionnelle» 2-d ed. (Budapest, Akad. Kiadó, 1953).

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 175.

5735 К. Теория линейных операций. Банах (Théorie des opérations linéaires. Banach Stefan. New York, Chelsea Publishing Co., 1955, vii, 254 pp., 3.95 doll.) (франц.)

Фотоофсетная перепечатка с оригинала (Warszaw, 1932).

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 175.

5736 К. Линейный анализ. Мера и интеграл, пространства Банаха и Гильберта, линейные интегральные уравнения. З а а н е н (Linear analysis. Measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations. Z a a n e n A d r i a a n C o r n e l i s. New York, Interscience Publishers Inc.; Amsterdam, North-Holland Publishing Co.; Groningen, P. Noordhoff N. V., 1953, vii+601 pp., 11.00 doll.) (англ.)

В первой части (87 стр.) рассматриваются мера и интеграл, лебеговы функциональные пространства L_p и пространства Орлича L_Φ. Дается сжатое изложение этих тем, достаточно полное, но оставляющее в стороне все, что несущественно для последующих глав книги. Как указано в предисловии, в этой части использованы записи лекций Брёйна (Bruijn N. G. de). Интеграл определен как мера в произведении пространств: основного пространства с мерой и прямой линии.

Вторая часть (279 стр.) посвящена общей теории линейных операторов в пространствах Банаха и Гильберта. Она начинается аксиоматическим определением этих пространств и их наиболее очевидными свойствами, включая изложение понятий произведения пространств и фактор-пространства, и такими примерами, как пространства L_p, L_Φ, l_p и пространство B_p-почти периодических функций. Далее следует глава о линейных функционалах и линейных операторах в пространствах Банаха, слабой сходимости, сопряженном пространстве, сопряженных операторах, проекциях, включая новое доказательство теорем Банаха о замкнутых линейных операторах.

(Сопряженное пространство E^* действительного или комплексного пространства Банаха E определено как пространство всех ограниченных линейных функционалов в E. Референту кажется, что в комплексном случае более удобно определять E^* как пространство всех ограниченных сопряженно-линейных функционалов в E, так как в частном случае комплексного гильбертова пространства E E^* может быть отождествлено тогда с E, и, таким образом, излишне различать, как это делает автор, «банахово-сопряженные» и «гильбертово-сопряженные» операторы в пространстве Гильберта).

Линейные операторы в конечномерных пространствах рассматриваются в отдельной главе, включающей изложение канонической формы матрицы и элементарных делителей. Далее следует глава об ограниченных линейных операторах в пространстве Гильберта, трактующая, в частности, интегральные преобразования, особенно с ядрами с конечной двойной нормой, и излагающая теорию Фредгольма для этих операторов в форме, данной Смитисом (Smithies F., Duke Math. J., 1941, 8, 107—130). Введены симметричные, унитарные, нормальные и симметризуемые операторы, но не включена спектральная теория ограниченных нормальных операторов.

Далее следует глава о взаимных соотношениях между рангами и нуль-пространствами ограниченного линейного оператора и его сопряженного, о спектре и резольвенте. Компактные (т. е. вполне непрерывные) линейные операторы вводятся в следующей главе, излагающей, в частности, теорию Ф. Рисса, сведения относительно резольвенты и эргодические теоремы Йосида (Yosida K. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1938, 14, 292—294). Компактные линейные операторы в пространстве Гильберта, которые являются симметричными или нормальными, или симметризуемыми, весьма обстоятельно изложены в следующей главе. Теория компактных симметризуемых линейных операторов, берущая свое начало в статьях об интегральных операторах с симметризуемым ядром (Marty J., C. r. Acad. sci., 1910, 150, 1499—1502; Pell A. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1911, 12, 165—180; Garbe A., Math. Ann., 1915, 76, 527—547), была развита весьма значительно в последние 12 лет, главным образом в работах автора, Рида (W. T. Reid) и Зиммерберга (H. J. Zimmerberg), так что мы обладаем теперь совершенно полными аналогиями — для этих операторов с теоремами о продолжении и минимаксными теоремами для компактных симметрических операторов.

В третьей части рассматриваются несингулярные линейные интегральные уравнения, т. е. фредгольмова теория и спектральная теория линейных интегральных операторов, одна из итераций которых компактна. В первой главе теория Фредгольма — Смитиса обобщается на случай интегральных уравнений в произвольных пространствах L_p и L_Φ. Во второй рассматриваются теоремы о продолжении для интегральных уравнений с нормальным, эрмитовым или положительно определенным ядром. Последние две главы посвящены обстоятельному изучению интегральных уравнений с симметризуемым ядром.

Богатое собрание примеров и частных теорем иллюстрирует и дополняет абстрактные построения. По сравнению с богатством изложенного материала, библиографические ссылки довольно редки. Хотя каждая глава заключается списком ссылок, они далеко не полны, и, в частности, опущены ссылки, относящиеся к большинству теорем, данных в качестве «примеров».

Изложение всегда ясное и удобное для чтения. Книга представляет собой ценный вклад в учебную литературу по функциональному анализу. Ее главной чертой является то, что она уделяет особое внимание интегральным уравнениям и особенно уравнениям с симметризуемым ядром — области исследования, в которой мы обязаны автору многими личными результатами. B. Sz.-Nagy

Перевод из Math. Bevs, 1954, 15, № 10, 878.

5737 К. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. В а й н б е р г М. М. М., Гостехиздат, 1956, 344 стр., 10 р. 65 к.

Монография содержит изложение развитых за последние десятилетия вариационных методов исследования нелинейных уравнений. Систематизированы важные результаты по нелинейным уравнениям, опубликованные ранее в виде отдельных статей и кратких заметок. Монография содержит так же новые предложения, публикуемые впервые.

В гл. I (§§ 1—4) изложены некоторые вопросы анализа в линейных пространствах. В § 1 рассмотрены различные виды непрерывности операторов и функционалов. Устанавливаются необходимые и достаточные условия полной непрерывности операторов. Сформулирована теорема Гантмахер—Шмульяна—Эберлейна о том, что для слабой компактности единичного шара необходимо и достаточно, чтобы пространство было рефлективным. В § 2 вводятся понятия интеграла Стилтьеса от абстрактной функции, криволинейного интеграла по абстрактной кривой. Изучаются свойства упомянутых интегралов и вопрос о предельном переходе под знаком интегралов. Доказана теорема о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. В § 3 устанавливаются необходимые и достаточные условия линейности дифференциала Гато и изучается связь между дифференциалами Гато и Фреше. В § 4 исследуются вопросы непрерывности производной от оператора.

В гл. II (§§ 5—7) изложена теория потенциальных операторов. В § 5 доказывается, что если оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из пространства E в E^*, имеет линейный дифференциал Гато $\mathbf{DF}(x, h)$ и непрерывную по

x билинейную форму $(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2)$, то для потенциальности оператора $\mathbf{F}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольных $h_1, h_2 \in E$ выполнялось условие: $(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2) = (\mathbf{DF}(x, h_2), h_1)$. В § 6 доказана теорема М. К. Гавурина о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. В § 7 излагаются некоторые результаты референта о компактности и слабой непрерывности потенциальных операторов.

Гл. III, IV и V являются центральными. §§ 8 и 9 являются вводными для завершающего гл. III § 10, в котором исследуется уравнение вида $x = \mathbf{BF}(x)$, где $\mathbf{F}$ — потенциальный, а $\mathbf{B}$ — линейный самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве. В этом же параграфе содержатся две новые теоремы 10.2 и 10.4.

В гл. IV изложены вопросы условного экстремума функционалов. В § 11 устанавливаются некоторые предложения о гиперболоидах в гильбертовом пространстве. В § 12 доказывается для сферы и гиперболоида теорема Л. А. Люстерника. §§ 13 и 14 посвящены, в основном, теории Л. А. Люстерника об условно критических точках четных функционалов.

В гл. V (§§ 15—17) изложены задачи о собственных числах и точках ветвления нелинейных операторов. В § 15 исследуются собственные векторы оператора $\mathbf{AF}$, где $\mathbf{F}$ — сильно потенциальный и $\mathbf{A}$ — положительный оператор в вещественном гильбертовом пространстве, а в § 16 рассматривается случай, когда, $\mathbf{A}$ — индефинитный оператор. § 17 посвящен точкам бифуркации потенциальных операторов и операторов вида $\mathbf{AF}$. Приводится теорема М. А. Красносельского о точках бифуркации.

В гл. VI (§§ 18—23) изучаются операторы и функционалы, встречающиеся в теории нелинейных интегральных уравнений. В §§ 18—20 изучается оператор В. В. Немыцкого. В § 21 находится его потенциал; кроме того, приводятся известные результаты относительно нелинейного интегрального уравнения Лихтенштейна. В § 22 исследуются свойства квадратичных функционалов $(\mathbf{A}u, v)$, где $\mathbf{A}$ — линейный самосопряженный в L_2 интегральный оператор, который действует из пространства L_q в пространство L_p $(p \geqslant 2, p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Основными предложениями § 22 являются обобщенная теорема Дини и теорема о равномерной сходимости квадратичных, а значит и билинейных, форм $(\mathbf{A}_n u, u)$ к $(\mathbf{A}u, u)$, когда $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор из L_q в L_p, $\mathbf{A}_n u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} (u, \varphi_k)\, \varphi_k(x)$, λ_k и φ_k суть характеристические числа и соответствующие им собственные функции оператора $\mathbf{A}$. В § 23 исследуются свойства главного квадратного корня из $\mathbf{A}$, т. е.

$$\mathbf{A}^{1/2} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u)}{\sqrt{|\lambda_k|}} e_k \varphi_k(x),$$

где $e_k = \operatorname{sign} \lambda_k$, когда все λ_k, начиная с некоторого k, положительны.

В последней гл. VII (§§ 24—26) доказываются теоремы существования решений для систем нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. В этой главе собраны также теоремы, установленные ранее вариационными методами автором и другими математиками. В ней содержатся и новые предложения, например, теорема о существовании решений уравнений $\lambda u - \mathbf{A}u = 0$, когда линейный интегральный оператор $\mathbf{A}$ не является вполне непрерывным. Библ. 172 назв. Э. С. Цитланадзе

5738 К. Полуупорядоченные линейные пространства. Накано (Semi-ordered linear spaces. Nakano Hidegoro. Tokyo, Japan Soc. Promot. Sci., 1955, 508 pp.) (англ., нем.)

Сборник статей автора, посвященных различным вопросам теории линейных полуупорядоченных пространств. Все статьи были ранее опубликованы в периодической литературе (1941—1953 гг.) и приводятся в книге без изменений. Целью публикации, как явствует из предисловия, является восстановление приоритета автора, часть результатов которого повторена другими учеными. Некоторые статьи сборника были прореферированы ранее (РЖМат, 1955, 346, 2307, 2763; 1956, 619, 1491). И. С. Иохвидов

5739 Д. Монотонные функции и меры на упорядоченных топологических пространствах. Рево (Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés. Revuz André. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris, Chartres, Impr. Durand, 1954, 86 p.) (франц.)

Работа посвящена построению теории меры со значениями, принадлежащими некоторой частично упорядоченной топологической группе. В гл. I рассматривается, в основном, мера, принимающая числовые значения. Общему случаю посвящена гл. II. В последней, третьей, главе разобраны некоторые частные случаи и приложения теории. С. В. Фомин

5740 Д. К теории функций в банаховых пространствах. Зёдер (Beiträge zur Funktionentheorie in Banachschen Räumen. Soeder Heinrich. Diss. Math.-naturwiss. Fak. Münster, 1956. o. O., 1956, 46 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1957, B, № 2, 134 (нем.)

5741 Д. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли. Березин Ф. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. МГУ, М., 1957

5742 Д. Об итерационных методах в пространстве Банаха. Каазик Ю. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Тартуск. ун-т, Тарту, 1957

См. также: 5463, 5575, 5577, 5585, 5627, 5629, 5631, 5638, 5640

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5743 О некоторой задаче теории вероятностей. (1). (Движение молекулы на прямой линии). Мыцельский, Пашковский (Sur un problème du calcul de probabilité. (1) (Le mouvement d'une molécule sur une droite). Mycielski Jan, Paszkowski S.), Studia math., 1956, 15, № 2, 188—200 (франц.)

Масса распределяется на прямой линии непрерывным образом так, что на каждой полупрямой концентрируется бесконечная масса. Молекула, движущаяся случайным образом по этой прямой, может: 1) изменять направление движения (отражение), 2) поглощаться массой (абсорбция), 3) не изменять движения (прохождение). Предполагается, что отражение, абсорбция и прохождение в неперекрывающихся интервалах стохастически независимы и что вероятности отражения, абсорбции и прохождения в интервале, содержащем массу x, зависят только от x и от направления движения молекулы. Даются функциональные уравнения для вероятностей отражения, абсорбции и прохождения в случае, когда вероятность отражения меньше 1, по крайней мере, для одного направления движения (для частного

случая, в котором вероятности не зависят от направления движения, эти уравнения были даны Рылл-Нардзевским). Статья посвящена решению этих функциональных уравнений и нахождению простых асимптотических формул для вероятностей отражения, абсорбции и прохождения. K. Urbanik

5744. **Центральная предельная теорема для однородно ограниченных ортонормальных систем. Моргенталер** (A central limit theorem for uniformly bounded orthonormal systems. Morgenthaler George W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 2, 281—311 (англ.)

Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — равномерно ограниченная действительная ортонормальная система на интервале (a, b). Доказывается, что существует подпоследовательность $\psi_k(t) = \varphi_{n_k}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ системы $\{\varphi_n(t)\}$ и неотрицательная ограниченная функция $f(x)$ такая, что $\int_a^b f(x)\,dx = 1$; кроме того, для любого подмножества E, имеющего положительную меру $m(E) > 0$, интервала (a, b) и каждой последовательности a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ действительных чисел, удовлетворяющих условиям $S_n = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} \to \infty$ и $a_n = o(S_n)$, распределение функции $S_n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(t)$ сходится при $n \to \infty$ к предельному распределению в каждой точке непрерывности последней; характеристическая функция этого распределения $\chi(t) = m(E)^{-1} \int_E \exp[-t^2 f(x)/2]\,dx$. Такие распределения (которые являются смесью гауссовых распределений) называются автором псевдогауссовыми. При доказательстве используется обобщение теоремы Банаха и Сакса (Banach S., Saks S., Studia math., 1930, 2, 51—57). Даются числовые примеры, показывающие, что существуют случаи, в которых обычное гауссово распределение не может быть получено как предельное распределение в сформулированной выше задаче; а с другой стороны, что любое псевдогауссово распределение может быть найдено как предельное распределение в сформулированном выше смысле. Эти результаты обобщаются также для комплексных ортогональных систем; в этом случае двумерные псевдогауссовы распределения получаются в качестве предельных распределений. Тот же самый метод применяется к доказательству следующей теоремы типа Каца (Kac M., Ann. Math., 1946, 47,33—49): если $f(t)$ — ограниченная и периодическая функция с периодом 1, кроме того $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$ и $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 1$, тогда существует последовательность целых чисел $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ таких, что для любой последовательности a_k действительных чисел, удовлетворяющих вышеупомянутым требованиям, и для любого подмножества E интервала $(0, 1)$, имеющего положительную меру $m(E) > 0$, распределение функции $S_n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k f(m_k x)$ сходится к нормированному гауссову распределению. A. Rényi

5745. **Случайные функции как случайные элементы в пространствах Банаха. Форте, Мурье** (Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans les espaces de Banach. Fortet R., Mourier E.), Studia math., 1955, 15, № 1, 62—79 (франц.)

Рассматриваются случайные элементы X пространства Банаха X. Случайный элемент называется «настоящим» (proprement dit), если существует последовательность измеримых и ограниченных множеств $e_k \subset X$, сходящаяся к X и притом $\lim_{k\to\infty} \mathrm{mes}(e_k) = l$, где $\mathrm{mes}(e_k)$ — вероятностная мера множества e_k, индуцированная случайным элементом X. Характеристическим функционалом случайного элемента X называется положительно определенная функция $\varphi(x^*) = E\{\exp[ix^*(X)]\}$, где x^* — элемент пространства X^*, сопряженного с пространством X. Функция $\varphi(x^*)$ называется нормальным функционалом, если она имеет вид

$$\varphi(x^*) = \exp\left\{-\frac{1}{2} E[(x^*, X)^2]\right\}. \qquad (1)$$

Если существует настоящий случайный элемент X, характеристический функционал $\varphi(x^*)$ которого вида (1), то $\varphi(x^*)$ называется нормальным характеристическим функционалом, а случайный элемент X — лапласовским.

Пусть $\{X_j\}$ — последовательность взаимно независимых, одинаково распределенных случайных элементов в X и притом $E(X_j) = 0$ (0 — нулевой элемент пространства X) и $E\|X_j\|^2 < \infty$. Пусть $Z_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j$ и φ_n — характеристический функционал элемента Z_n. Доказывается, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к пределу, являющемуся положительно определенной и нормальной функцией (теорема I).

Пространство X называется пространством типа G, если каждому $x \in X$ можно поставить в соответствие элемент $x^* = g(x)$ так, что $\|g(\|x\|)\| = \|x\|$, $(g(x), x) = \|x\|^2$ и притом существует такое число $A > 0$, что для любых $x, y \in X$, $\|g(x) - g(y)\| \leq A\|x - y\|$. Если пространство X сепарабельно, регулярно и типа G, то всякая положительно определенная и нормальная функция $\varphi(x^*)$ является характеристическим функционалом лапласовского случайного элемента X такого, что $E\|X\|^2 < \infty$ (теорема III). Если пространство X сепарабельно, регулярно, типа G и имеет базис, а $f(x)$ является функционалом или численной функцией, равномерно непрерывной (в сильной топологии в X) на каждом шаре конечного радиуса в X, то $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$ (теорема V).

Если заменить в предположениях теоремы III предположение об одинаковости распределения вероятностей случайных элементов X_j условиями:

(a) $E(X_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$,

а интегралы $\int_0^\infty a^2 dF_j(a)$, где $F_j(a) = P(\|X_j\| < a)$, сходятся равномерно по j,

(b) Для любого $x^* \in X^*$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{j=1}^n E[(x^*, X)^2] = \varphi(x^*) \geqslant 0,$$

тогда утверждение теоремы III выполняется (теорема III′).

Пусть элементы $x_1, x_2, x_3, \ldots$ являются базисом в X и пусть U_k — линейная операция, которая элементу $x \in X$ ставит в соответствие выражение $\sum_{r=k+1}^\infty a^r x_r$. Если заменить в предположениях теоремы V предположение об одинаковости распределения вероятностей X_j условиями (a), (b), и, кроме этого, предположить, что (c) $\lim_{k\to\infty} E(\|U_k(X_j)\|^2) \to 0$ равномерно относительно j, тогда утверждение этой теоремы справедливо.

Приведены примеры применения доказанных теорем к теории стохастических процессов.

Примечание референта. Авторами не цитируется работа Колмогорова (Kolmogorov A. N., C. r. Acad. sci., 1935, 200, 1717—1720), в которой впервые введены некоторые основные понятия и доказаны некоторые свойства распределения вероятностей в пространствах Банаха. M. Fisz

5746. **Некоторые замечания об уравнениях Колмогорова. Хилле** (Quelques remarques sur les équations de Kolmogoroff. Hille Einar), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 3—4, 3—14 (франц.)

Назовем $P(t)=\{p_{ij}(t)\}$, $i, j=1,\ldots,n\ldots$ матрицей переходных вероятностей, если

$$0\leqslant p_{jk}(t),\quad \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(t)=1,\ \lim_{t\to 0+} p_{jk}(t)=\delta_{jk};$$

$$p_{jk}(s+t)=\sum p_{jm}(s)\,p_{mk}(t),\quad 0<s,\ t<\infty.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ алгебру комплексных матриц $B=\{b_{jk}\}$, удовлетворяющих условию

$$\|B\|=\sup\Big|\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}\Big|<\infty.$$

Рассмотрим матрицу A, удовлетворяющую условиям

$$a_{jn}\geqslant 0,\ k\neq j,\ a_{jj}\leqslant 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}=0,\ j=1,\ldots,n,\ldots \quad (1)$$

Матрицу A можно рассматривать как линейный оператор в $\mathfrak{M}$: $A[B]=AB$, $B\in\mathfrak{M}$. Матрицы B такие, что $B\in\mathfrak{M}$ и $AB\in\mathfrak{M}$ образуют подпространство $D(A)$.

Автор рассматривает вопрос о существовании и единственности решения уравнения:

$$y'(t)=Ay(t);\ y(t)\in D(A),\ t>0 \quad (2)$$

с начальными условиями: $\lim_{t\to 0}\|y(t)-B\|=0$.

Теорема 1. Пусть матрица $A=\{a_{jk}\}$ удовлетворяет (1) и $a_{jk}=0$, $j<k$. Рассмотрим A_0 — сужение оператора A с областью определения $D(A_0)\subseteq D(A)$. Тогда A_0 порождает полугруппу матриц $\{P(tA_0), 0<t\}$ переходных вероятностей и матричная функция $P(tA_0)$ удовлетворяет уравнениям:

$$P'(tA_0)=AP(tA_0),$$

$$P'(tA_0)=P(tA_0)A.$$

$P(tA_0)[B]$ — единственное решение (2) при $B\in D(A_0)$.

Теорема 2. Пусть U, V, W — матричные функции, удовлетворяющие (1) и

а) $W=U+V$,

б) $W\in\mathfrak{M}$,

в) сужение оператора U — оператор U_0 определяет полугруппу сильно непрерывную в $D(V)$ для $t>0$ с $P(0, W_0)=E$.

Следствие. Матрица $P(tW_0)$ — решение уравнений

$$P'(tW_0)=WP(tW_0),$$

$$P'(tW_0)=P(tW_0)W,$$

$$\lim_{t\to 0} P_{jk}(tW_0)=\delta_{jk},$$

и $P(tW_0)[B]$ — единственное решение в $\mathfrak{M}$ уравнения (2) для $B\in D(U_0)$.

Аналогичные теоремы имеют место в l.

М. И. Фортус

5747. **Условие стационарности для стохастических процессов типа авторегрессии и скользящего среднего. Уайз** (Stationarity conditions for stochastic processes of the autoregressive and moving-average type. Wise J.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 215—219 (англ.)

Даются необходимые и достаточные условия стационарности процесса типа авторегрессии и скользящего среднего

$$x_t+\alpha_1 x_{t-1}+\ldots+\alpha_k x_{t-k}=\varepsilon_t+\beta_1\varepsilon_{t-1}+\ldots$$

$$\ldots+\beta_h\varepsilon_{t-h},$$

выраженные в терминах коэффициентов процесса. Эти условия выводятся из известных (см. реф. 5754К) условий для особенностей спектральных плотностей. Для $k\leqslant 4$ даны таблицы критериев стационарности.

А. А. Зингер

5748. **Случайные функции множеств. Шпачек** (Zufällige Mengenfunktionen. Špaček Antonín), Math. Nachr., 1955 (1956), 14, № 4—6, 355—360 (нем.)

Пусть в абстрактном пространстве X задана σ-алгебра $\mathfrak{S}$ подмножеств X. Пусть F — множество всех определенных на $\mathfrak{S}$ действительных функций множеств, $\mathfrak{F}$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств F, содержащая для любых r и $A\in\mathfrak{S}$ множества $\{\varphi:\varphi\in F, \varphi(A)<r\}$, μ — вероятностная мера, определенная на $\mathfrak{F}$. $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ называется случайной функцией множеств. Пусть ν — вероятностная мера на $\mathfrak{S}$ и W — множество вероятностных мер из абсолютно непрерывных относительно ν. Если внешняя мера $\bar{\mu}(W)=1$, то $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ называется почти всюду абсолютно непрерывной относительно ν. Доказывается, что для того чтобы $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ была почти всюду относительно ν абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы

а) $\mu\{\varphi:\varphi\in F, \varphi(A)\geqslant 0\}=1$ для всех $A\in\mathfrak{S}$,

б) $\mu\{\varphi:\varphi\in F, \varphi(A\cup B)=\varphi(A)+\varphi(B)\}=1$ для любых непересекающихся A, $B\in\mathfrak{S}$,

в) $\mu\{\varphi:\varphi\in F, \varphi(X)=1\}=1$,

г) для любых $\varepsilon>0$, $\delta>0$ найдется $\theta(\varepsilon,\delta)>0$ такое, что $\mu\Big(\bigcap_{E\in\mathfrak{D},\ \nu(E)<\theta(\varepsilon,\delta)}\{\varphi:\varphi\in F, \varphi(E)<\varepsilon\}\Big)\geqslant 1-\delta$ для любой конечной системы $\mathfrak{D}$ множеств из $\mathfrak{S}$.

Пусть $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ абсолютно непрерывна почти всюду относительно ν. Обозначим через $W\cap\mathfrak{F}$ σ-алгебру множеств вида $A\cap W$, $A\in\mathfrak{F}$ и пусть $\lambda(A\cap W)=\mu(A)$. По теореме Радона—Никодима существует определенная в $W\times X$ неотрицательная функция $f(.,.)$, для которой $\varphi(A)=\int_A f(\varphi,.)\,d\nu$ для всех $\varphi\in W$ и $A\in\mathfrak{S}$.

Автор показывает, что если X — сепарабельное метрическое пространство и $\mathfrak{S}$—σ-алгебра борелевских множеств, то $f(.,x)$ есть случайная величина в $(W, W\cap\mathfrak{F}, \lambda)$ для всех x.

В. Г. Винокуров

5749. **О распределении некоторых функционалов от марковских цепей и процессов. Дарлинг, Зигерт** (On the distribution of certain functionals of Markoff chains and processes. Darling D. A., Siegert A. J. F.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 8, 525—529 (англ.)

Для однородных цепей Маркова $\{x_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, и для марковских процессов $x(t)$ с непрерывным временем рассматриваются функционалы вида $U_n=\sum_{j=0}^{n} V(x_j)$ соответственно $U(t)=\int_0^t V(x,\tau)\,d\tau$, где k_n и $x(t)$ принимают значения из пространства Ω, $V(x)$ — измеримая по Борелю действительнозначная функция на этом пространстве. Эти функционалы характеризуются функциями

$$R_{z;\xi}(x, E)=\sum_{n=0}^{\infty} M\{e^{i\xi U_n}\,|\,x_0=x,\ x_n\in E\}\,P_n(x, E)\,z^n$$

и

$$R_{g,\xi}(x, E) = \int_0^\infty e^{-st} M\{e^{i\xi U(t)} \mid x(0) = x,\ x(t) \in E\} P(t, x, E)\, dt,$$

где $P_g(x, E)$ и $P(t, x, E)$ — переходные вероятности. Для функций R выводятся интегральные уравнения — прямое и обратное. Для диффузионного процесса выводятся для R известные дифференциальные уравнения. Уравнения, аналогичные обратному дифференциальному и обратному интегральному для непрерывного времени, получены ранее Е. В. Дынкиным в общем случае неоднородного марковского процесса (РЖМат, 1956, 8165).

В качестве примера вычисляется $R(0, Q)$ для марковского стационарного процесса (процесс Уленбека) при $V(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sign} x$. В. А. Волконский

5750. Об одной характеризации броуновского движения. Скитович В. П., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 3, 361—364 (рез. англ.)

Пусть $X(t)$ — однородный случайный процесс с независимыми приращениями; $a(t)$ и $b(t)$ — функции, непрерывные в сегменте $[a, b]$. Тогда имеет место теорема: если $\int_a^b [a(t)\, b(t)]^2\, dt \neq 0$, интегралы $Y = \int_a^b a(t)\, dX(t)$ и $Z = \int_a^b b(t)\, dX(t)$ независимы между собой и, по крайней мере, один из интегралов $\int_a^b [a^2(t)\, b^2(t)]\, dt$, $\int_a^b [b^2(t)/a^2(t)]\, dt$ существует, то процесс $X(t)$ представляет броуновское движение. Подобная же теорема доказывается для бесконечных линейных форм $\sum_{k=1}^\infty a_k X_k$, $\sum_{k=1}^\infty b_k X_k$.

По резюме автора

5751. Об одном уравнении, встречающемся в теории случайных процессов. Теодореску (Asupra unei ecuații întîlnită în teoria proceselor stochastice. Theodorescu Radu), An. Univ. «C. I. Parhon», Ser. științ. natur., 1956, № 11, 39—40 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается, что если функция $Q(t, z, X \mid P(t, Y))$ удовлетворяет некоторым условиям, то решение системы

$$\frac{dP(t, X)}{dt} = \int_E P(t, dz)\, Q(t, z, X \mid P(t, Y)),\ s < t,$$

$$P(s, X) = \begin{cases} 1, & x \in X, \\ 0, & x \notin X \end{cases}$$

(встречающейся в теории непрерывных процессов с полными связями) существует, единственно и является вероятностью. По резюме автора

5752. Что такое теория вероятностей. Чуку (Ce este calculul probabilităților. Ciucu G.), Gaz. mat. si fiz., 1956, B7, № 6, 294—305 (рум.)

5753. Исследование ряда зависимых случайных величин. Уэно (従属確率變數列の研究における一方法について. 上野正) ; 數學 ; Сугаку, 1956, 8, № 1, 16—24 (японск.)

5754 К. Стохастические процессы. Дуб (Stochastic processes. Doob J. L. New York, John Wiley and Sons, 1953, p. 654) (англ.)

Впервые в мировой литературе дается полное и строгое изложение теории стохастических процессов. В книге собран очень богатый материал, до этого остававшийся разбросанным по многочисленным публикациям. По сравнению с оригинальными работами делается много усовершенствований формулировок и доказательств. Некоторые из рассматриваемых вопросов до сих пор вообще не излагались на уровне современной математической строгости. Все рассмотрения ведутся в чисто теоретическом плане. Примеры приложений почти отсутствуют. В конце книги содержится приложение, в котором собраны литературные ссылки и исторические замечания и проводится дополнительное обсуждение некоторых из вопросов, затрагиваемых в основном тексте. Книга предполагает у читателя знание основ теории вероятностей и знание теории меры примерно в объеме первых 9 глав книги Халмоша (РЖМат, 1954, 3653 К).

Выбор рассматриваемых вопросов несколько субъективен. Так, интересный раздел о мартингалах занимает почти столько же места (одна шестая книги), как и раздел о марковских процессах, хотя, конечно, значение марковских процессов неизмеримо больше. В то же время автор не рассматривает, например таких тем, как устойчивые законы распределения и счетные марковские цепи, а дифференциальные уравнения марковских процессов диффузионного типа приведены без вывода.

Второй существенный недостаток книги состоит в том, что во многих разделах (например, при изложении теории условных распределений вероятностей, эргодических свойств цепей Маркова и др.) изложение проводится с максимальной общностью, хотя разумное ограничение общности позволило бы обойтись без громоздких абстрактных рассуждений и лучше донести до читателя основные идеи.

В §§ 1—6 гл. I на основе общепринятой теперь аксиоматики Колмогорова излагаются начальные понятия теории вероятностей. В §§ 7, 8 и 10 автор развивает, также следуя Колмогорову, общую теорию условных вероятностей и условных математических ожиданий. В § 9 содержатся важные новые результаты автора об условных распределениях вероятностей. Однако этот параграф перегружен деталями, более уместными в журнальной литературе. Обсуждение продолжено в Приложении, где приведен интересный патологический пример распределения вероятностей. В § 10, посвященном характеристическим функциям, устанавливаются новые неравенства, позволяющие автору несколько упростить доказательства предельных теорем для сумм независимых случайных величин.

В § 1 гл. II дается общее определение стохастического процесса и обсуждается вопрос о задании процесса конечномерными распределениями вероятностей. Основным содержанием § 2 является изложение принадлежащей автору важной теоремы о сепарабельных процессах. Эта теорема позволяет трактовать строго и без дальнейших вспомогательных рассуждений такие понятия, как непрерывность, ограниченность и т. п. траекторий стохастического процесса (случайных функций). По сравнению с предыдущими работами автора в изложение внесены существенные усовершенствования, сближающие концепции автора с подходом, основанном на понятии стохастической эквивалентности, введенным Слуцким. Далее даются достаточные условия для того, чтобы стохастический процесс был измеримым, т. е. чтобы функция $x(t, \omega)$, где t — временный параметр процесса, а ω — элемент пространства элементарных событий, была измеримой функцией от пары переменных (t, ω). Изучается возможность определения интеграла $\int x(t, \omega)\, dt$ как предела римановых сумм. В остальных параграфах этой главы содержатся определения специальных типов процессов, изучаемых в книге. В § 3, посвященном гауссовским процессам, дается общее определение соответствия между свойствами процессов в узком и широком смыс-

лах. Так, по этому определению, понятию в узком смысле — независимость случайных величин — соответствует понятие в широком смысле — ортогональность случайных величин и т. п. Во всей книге автор систематически проводит изучение взаимосвязи понятий в узком и широком смыслах, в частности, в соответствующих местах, рассматриваются марковские процессы и мартингалы в широком смысле.

В гл. III изучаются суммы независимых случайных величин. В § 1 содержится доказательство закона нуль-единица Колмогорова и леммы Бореля—Кантелли. В обширном § 2 изучается сходимость рядов из независимых случайных слагаемых. Устанавливаются условия сходимости этих рядов в среднем и по вероятности, условия их «абсолютной» сходимости и условия для того, чтобы ряды сходились после вычитания из слагаемых подходящих центрирующих констант. В § 3 доказываются обычный и усиленный законы больших чисел. В § 4 безгранично делимые законы распределения определяются как законы распределения случайных величин, являющихся суммами сколь угодно малых независимых (но не обязательно одинаково распределенных) слагаемых. Из этого определения выводится формула Леви—Хинчина для их характеристических функций. Предельные теоремы формулируются явно лишь для случая сходимости к нормальному закону. В отличие от того, как это делается обычно, автор не использует схему серий независимых случайных слагаемых, а формулирует предельные теоремы для схемы последовательности, указывая при этом область, где они действуют равномерно. Однако при таком, конечно вполне законном, толковании формулировки теорем становятся более громоздкими и теряют свою отчетливость. В § 5 доказывается усиленный закон больших чисел для одинаково распределенных слагаемых. Там же доказывается следующая теорема автора: Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин и целочисленные случайные величины v_n таковы, что событие $\{v_n = m\}$ не зависит от величин $\xi_m, \xi_{m+1}, \ldots$, то последовательность $\xi_{v_1}, \xi_{v_2}, \ldots$ совпадает по распределению с первоначальной последовательностью.

Гл. IV посвящена ортогональным случайным величинам. Исходя из формальных оснований, автор настаивает на том, что теория ортогональных функций (даже если пространство, на котором они определены, имеет бесконечную меру) является частью теории вероятностей. На этом основании в главу включены некоторые аналитические теоремы о степенных рядах, используемые затем в гл. XII. Кроме того, доказываются теоремы о сходимости сумм из взаимно ортогональных слагаемых и законы больших чисел для таких сумм. В частности, показывается, что если $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots$ — попарно ортогональные величины и $\sum n^{-2} M \mid \tau_{in} \mid^2 \ln^2 n < \infty$, то с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty} n^{-1} (\tau_{i1} + \ldots + \tau_{in}) = 0$.

В гл. V рассматриваются однородные марковские процессы с дискретным временным параметром. В § 2 разбирается исчерпывающим образом эргодическая теория однородных конечных цепей Маркова. В § 3 рассматриваются сложные цепи Маркова. В § 4 развитая теория иллюстрируется задачей о тасовании карт. В § 5 результаты § 2 обобщаются на цепи с любым множеством состояний. Здесь принимается лишь следующее существенное ограничение (гипотеза Деблина): существует конечная ненулевая мера $\varphi(A)$, целое число $\nu \geqslant 1$ и положительное $\varepsilon > 0$ такие, что при $\varphi(A) < \varepsilon$ имеет место неравенство $p^{(\nu)}(\xi, A) \leqslant 1 - \varepsilon$ ($p^{(\nu)}(\xi, A)$ — вероятность перехода за ν ходов из состояния ξ в множество состояний A). Эта гипотеза выделяет случай в «некотором смысле компактного» множества состояний. Результаты исследования оказываются совершенно аналогичными конечному случаю. В оригинальной работе Деблина (1937) предполагалось, что множеством состояний является евклидово пространство, а мерой $\varphi(A)$ — мера Лебега. В § 6 устанавливаются законы больших чисел для цепи Маркова. В § 7 доказывается центральная предельная теорема для случайных величин, связанных в цепь Маркова. Здесь предполагается, что выполнена гипотеза Деблина и что состояния образуют один эргодический класс с одним подклассом. Эта теорема была доказана Деблиным (1937) в предположении, что рассматриваемые случайные величины ограничены. Автор предполагает лишь конечность моментов порядка $2 + \delta$.

В гл. VI изучаются однородные марковские процессы с непрерывным временем. Как и в предыдущей главе, сначала (§ 1) рассматривается случай конечного числа состояний. Доказывается эргодическая теорема, выводятся дифференциальные уравнения процесса, показывается, что из предположения непрерывности переходных вероятностей следует их дифференцируемость и что соответствующие случайные функции имеют лишь разрывы первого рода. В § 2 все результаты предыдущего параграфа обобщаются на процессы с произвольным множеством состояний, в которых положение системы может меняться лишь скачками. Изучается также обнаруженный автором (1945) случай нерегулярных процессов, в которых система может за конечное время сделать бесконечное число скачков, прямое интегро-дифференциальное уравнение процесса обращается в неравенство, а обратное имеет бесконечно много решений при заданных начальных условиях. Кратко затрагиваются неоднородные процессы, для которых выводятся их интегро-дифференциальные уравнения. В § 3 рассматриваются марковские процессы диффузионного типа. Изложение базируется на стохастическом интегральном уравнении Ито (1946):

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} m(\xi(s), s)\, ds + \int_{t_0}^{t} b(s, \xi(s))\, d\eta(s),$$

где $\xi(s)$ — исследуемый марковский процесс, $m(x, s)$ и $b^2(x, s)$ — мгновенные среднее и дисперсия в момент времени t в состоянии x и $\eta(s)$ — винеровский процесс с параметрами (0, 1). При некоторых условиях типа регулярности доказываются существование и единственность решения этого уравнения, являющегося непрерывной марковской случайной функцией. Важнейшие с прикладной точки зрения дифференциальные уравнения для переходных вероятностей лишь выписываются без вывода.

В гл. VII, богатой, хотя и несколько специальным материалом, и содержащей много новых результатов, изучаются мартингалы и полумартингалы. Мартингалом называется последовательность случайных величин $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$ такая, что при любых $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ с вероятностью 1 $M\{\xi_{i_n} \mid \xi_{i_1} = x_1, \ldots, \xi_{i_{n-1}} = x_{n-1}\} = x_{n-1}$ определение полумартингала получается заменой в последней формуле знака $=$ на знак $\leqslant$. Понятие мартингала было введено Леви (1935) и усиленно разрабатывается в последние годы автором и его школой. Отметим, что интересная работа С. Н. Бернштейна, посвященная мартингалам (Докл. АН СССР, 1937, 17, 275), осталась неизвестной автору. На мартингалы переносятся большинство свойств процессов с независимыми приращениями. Полумартингалы вводятся здесь автором впервые. В § 1 устанавливается, что полумартингал является суммой мартингала и ряда из положительных случайных величин. В § 2 дается новое обобщение на мартингалы и полумартингалы теоремы автора, дока-

занной для сумм независимых случайных величин в § 5 гл. III и его разнообразные приложения. В § 3 устанавливается основное неравенство для мартингалов, являющееся обобщением известного неравенства Колмогорова для сумм независимых случайных величин. В § 4 доказываются различные предельные теоремы для мартингалов и полумартингалов. Например, для полумартингала существует с вероятностью 1 $\lim_{n\to-\infty}\xi_n$, а если $\overline{\lim}_{n\to\infty} M|\xi_n|<\infty$, то существует с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty}\xi_n<\infty$ и т. п. В §§ 5—10 эти результаты прилагаются к рядам из независимых случайных величин, к условным вероятностям, к доказательству состоятельности оценки по методу наибольшего правдоподобия, к последовательному анализу и др. В § 11 содержится много новых результатов о мартингалах и полумартингалах ξ_t с непрерывным множеством параметров t. В частности, показывается что выборочные функции полумартингала имеют с вероятностью 1 в каждой точке пределы слева и справа. Выводится принадлежащая Леви теорема о том, что если мартингал ξ_t имеет непрерывные выборочные функции и процесс ξ_t^2-t также является мартингалом, то ξ_t должно быть винеровским процессом.

В гл. VIII рассматриваются процессы с независимыми приращениями. В § 2 доказывается непрерывность траекторий винеровского процесса $\xi(t)$, а также теорема Леви о том, что если $t^1<\ldots<t^n$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, то $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[\xi(t^i)-\xi(t^{i+1})]^2=\sigma^2$, где предел берется по фиксированной последовательности бесконечно измельчающихся разбиений и $\sigma^2=D[\xi(1)-\xi(0)]$. В §§ 4—5 изучается пуассоновский процесс. Здесь выводится новая теорема о том, что если имеется «пуассоновская система частиц» $\{x_j(0)\}$ на бесконечной прямой и если эти частицы перемещаются, причем перемещения $\Delta x_j=x_j(t)-x_j(0)$ имеют не зависящее от j распределение, и все случайные величины Δx_j, $x_j(0)$ независимы, то частицы $\{x_j(t)\}$ при любом t также образуют «пуассоновскую систему». В §§ 6—7 устанавливается принадлежащее Леви представление процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ в виде $\xi(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)+\xi_3(t)$, где $\xi_1(t)$ — детерминированная функция, $\xi_2(t)$ — случайная функция, имеющая счетное фиксированное множество точек роста и $\xi_3(t)$ — безгранично делимый неоднородный процесс. Изучаются свойства выборочных функций процесса $\xi_3(t)$. Показывается, что если эти выборочные функции непрерывны, то процесс гауссовский.

Гл. IX посвящена процессам с ортогональными приращениями $\xi(t)$. В § 2 стохастический интеграл вида $\int_0^s\Phi(t)\,d\xi(t)$ определяется (Винер) как предел в среднем соответствующих сумм Римана. Этот интеграл прилагается (§ 3) к пуассоновскому процессу. В § 5 вводится более общий интеграл $\int_0^s\Phi(t,\omega)\,d\xi(t,\omega)$, где ω — элементарные события. Здесь предполагается, что $\Phi(t,\omega)$ не зависит от значений $\xi(t)$ при $t>s$ и что процесс $\xi(t)$ имеет ортогональные приращения и является мартингалом. (В частности, $\xi(t)$ может быть винеровским процессом). Оказывается, что интеграл $\int_0^t\Phi(s,\omega)\,d\xi(s)=\eta(t)$ является мартингалом и что любой мартингал $\eta(t)$ с $M\{|\xi(t)|^2<\infty$ и непрерывными выборочными функциями представим при некотором $\Phi(s,\omega)$ в виде $\eta(t)=\eta(a)+\int_0^t\Phi(s,\omega)\,d\zeta$, где $\zeta(s)$ — винеровский процесс.

В гл. IX изучаются стационарные процессы $\{\xi_n\}$, $n=\ldots-1, 0, 1, \ldots$ с дискретным временем. В § 1 и 2 рассматриваются в основном, стационарные процессы в узком смысле. С таким процессом связывается сохраняющее меру (вероятность) преобразование множеств T, определяемое на множествах вида $\{\xi_0\in A_0, \ldots, \xi_m\in A_m\}$, где A_i — одномерные борелевские множества, как $T\{\xi_0\in A_0, \ldots, \xi_m\in A_m\}=\{\xi_i\in A_0, \ldots, \xi_{m+i}\in A_m\}$, и затем продолжаемое на борелевское тело, порождаемое этими множествами. Показывается, что если величины ξ_i независимы, то T метрически транзитивно. Если ξ_i образуют стационарную цепь Маркова с конечным числом состояний, то T метрически транзитивно, если и только если цепь состоит из одного эргодического класса. Устанавливается эргодическая теорема Биркгофа, сводящаяся, на вероятностном языке, к усиленному закону больших чисел для стационарных процессов. В отличие от того, как это делается обычно, автор называет стационарным процессом в широком смысле процесс, для которого $R(m)=M\xi_n\xi_{n+m}<\infty$ не зависит от m и не накладывает никаких условий на $M\xi_n$. В § 3 дается спектральное представление для корреляционной функции стационарного процесса в широком смысле, а в § 4 — спектральное представление для самого процесса. В § 5 устанавливается разложение процесса $\xi_n=\xi_n^{(1)}+\xi_n^{(2)}+\xi_n^{(3)}$ на сумму взаимно ортогональных процессов $\xi_n^{(i)}$, соответствующее разложению спектральной функции $F(t)=F_1(t)+F_2(t)+F_3(t)$ на дискретную, сингулярную и абсолютно непрерывную компоненты. В § 6 доказывается закон больших чисел в смысле сходимости в среднем для стационарных процессов в широком смысле. При дополнительных условиях на $R(m)$ (выполненных, например, при $|R(m)|<cn^{-\alpha}$, $\alpha>0$) доказывается усиленный закон больших чисел (Лёве, 1945). В § 7 на основе результатов § 6 обсуждается возможность оценки по выборочным функциям процесса его корреляционной и спектральной функциями. В § 8 доказывается, что процесс $\{\xi_n\}$, стационарный в широком смысле, представим в виде $\xi_n=\sum_{-\infty}^{\infty}c_jx_{n+j}$, где $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_j|^2<$ и ∞ где $E\{x_ix_j\}=\delta_{ij}$, если и только если его спектральная функция абсолютно непрерывна. В § 10 обсуждается вид процессов, для которых их спектральная функция абсолютно непрерывна и ее производная является рациональной функцией от $\exp 2\pi i\lambda$.

В гл. X рассматриваются стационарные процессы ξ_t $t\in(-\infty, \infty)$ с непрерывным временем. Содержание §§ 1—10 совершенно аналогично содержанию соответствующих параграфов гл. IX. Отметим лишь, что в § 9 изучается «дифференцирование» и «интегрирование» процесса в смысле сходимости в среднем и соответствующие операции над спектральной функцией. В § 11 развивается спектральная теория процессов со стационарными приращениями первого порядка.

В гл. XI изучается задача о линейном экстраполировании стационарных процессов. В § 1 эта задача ставится как задача о нахождении линейного функционала f от ξ_t, $t\leqslant 0$ такого, что $M|f(\xi_t)\xi_\tau|^2$ минимально. Здесь $\tau>0$. В § 2 эта задача сводится к некоторой задаче о приближениях многочленами. В § 4 дается ее решение для случая дискретного времени. Особо (§ 3) разбирается случай, когда спектральная функция процесса абсолютно непрерывна и ее производная является рациональной функцией с числителем 1. В § 5 результаты § 4 обобщаются на случай непрерывного времени t. В § 6 рассматривается более общая задача о наилучшей аппроксимации по ξ_t, $t\leqslant 0$, произвольной случайной величины X с $MX^2<\infty$. Наконец в § 7 кратко обсуждается случай стационарных процессов с многомерными случайными величинами.

Относительно Приложения, где очень конспективно излагаются глубокие вопросы теории меры и интеграла, можно лишь присоединиться к замечанию Кендалла (Math. Revs., 1954, 15, 445) о том, что «оно является не подготовительным курсом для желающих приступить к чтению гл. I, а скорее экзаменом на право ее чтения».

Опечаток и ошибок в книге немного. Отметим лишь, что ошибочно доказательство утверждения (*ii*), теоремы 2.2 гл. II. Р. Л. Добрушин

5755 К. **Вероятностные процессы. Дуб Дж. Л.** Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1956, 605 стр., 35 р. 90 к.

5756 К. **Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Гнеденко, Колмогоров** (Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnysh. Gniedenko B. W., Kołmogorow A. N. Warszawa, Tłum. z ros., Państw. Wydawn. Nauk., 1957, 263 s., il., 31 zł), Przew. bibliogr., 1957, 13, № 6, 73 (польск.)

5757 К. **Теория вероятностей. Онический** (Calculul probabilităţilor. Onicescu O. Bucureşti, Ed. tehn., 1956, 392 p.), Bul. bibliogr., 1956, А, № 13, 488 (рум.)

5758 К. **Теория вероятностей и ее применение. Онический, Михок, Ионеску-Тулча** (Calculul probabilităţilor şi aplicaţii. Onicescu O., Mihoc G., Ionescu-Tulcea C. T. Bucureşti, Acad. R. P. R., 1956, 788 p., 26, 30 lei), Bul. bibliogr., 1956, А, № 13, 488 (рум.)

5759 К. **Введение в теорию вероятностей. Учебн. пособие по курсу высш. матем. для студ.-заочн. ВЗЭИ. Вып. I. Изд. 2-е. Карасев А. И.** М., 1956, 72 стр., илл.

5760 К. **Основные элементы теории вероятностей. Учебн. пособие. Маркович Э. С.,** Всес. заочн. финанс. ин-т, М., 1956, 60 стр., илл., беспл.

5761 К. **Основы теории вероятностей. (Учебн. пособие). Баруздин В. И., Гончарова М. К.** М., Оборонгиз, 1957, 56 стр., илл., 1 р. 10 к.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

5762. **Распределение отношения двух квадратичных форм. Уотсон** (The distribution of the ratio of two quadratic forms. Watson G. S.), Austral. J. Phys., 1955, 8, № 3, 402—407 (англ.)

Рассматривается отношение квадратичных форм $r = l/m$, $l = X'AX$, $m = X'BX$, где $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — нормально распределенный вектор с параметрами (0, 1) для каждой компоненты x_i, A и B — коммутативные матрицы порядка n, относительно характеристических корней которых сделаны некоторые дополнительные предположения. Выводится точное выражение для функции распределения отношения r в двух различных формах. Первая получается из предварительно выведенного распределения двумерной величины (l, m), а вторая, содержащая как частный случай результат Андерсона (Anderson R. L., Ann. Math. Statistics, 1942, 13, 1—13), выводится при помощи метода Бокса (РЖМат, 1956, 649). Н. А. Сапогов

5763. **Асимптотическая эффективность одной последовательности тестов. Гаек Ярослав,** Чехосл. матем. ж., 1956, 6, № 1, 26—30 (рез. англ.)

Гипотеза H_μ состоит в том, что n независимых случайных величин $D_1, D_2, \ldots, D_n$ распределены нормально $(\mu\sigma, \sigma^2)$. Определяется статистика

$$a_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \varphi(D_{i_1}, \ldots, D_{i_k}),$$

где

$$\varphi(d_1, \ldots, d_k) = \begin{cases} 1, \text{ если } d_1 + \ldots + d_k > 0 \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Далее вычисляются значения $E(a_k \mid H_\mu)$ и $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mu_n \to 0}} D^2(a_k \mid H_{\mu_n})(k-1)!\,2^{n-(2k-1)}$ и устанавливается асимптотическая нормальность (0, 1) распределения случайной величины $(a_k - E(a_k))/D(a_k)$ при гипотезе H_{μ_n}, когда $n \to \infty$ и $\mu_n \to 0$. T-тест гипотезы H_0, основанный на статистике $T = T(D_1, \ldots, D_n)$ таков, что H_0 отвергается при $T \leqslant T_1$ (соответственно $T \geqslant T_2$), где T_1 (соответственно T_2) критическое значение с данным уровнем значимости. Специально для рассматриваемого случая вводится понятие асимптотической эффективности T-теста как предел (если он существует)

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\mu} E(T \mid H_\mu)\mid_{\mu=0}\right]^2}{nD^2(T \mid H_{\mu_n})} \quad (\mu_n \to 0),$$

когда распределение статистики $T = T(D_1, \ldots, D_n)$ при гипотезе H_{μ_n} асимптотически нормально. Смысл такого вида e состоит в том, что T-тест имеет при n наблюдениях приблизительно ту же мощность, что и t-тест Стьюдента при ne наблюдениях, если n достаточно велико, а $|\mu|$ достаточно мало. Асимптотическая эффективность α_k-теста оказывается равной $e_k = 1/k \arcsin(1/k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ она растет с k и $\lim_{k\to\infty} e_k = 1$. Как частный случай α_k-теста получается известный «знаковый» α_1-тест при $k = 1$ с $e_1 = \pi/2 \doteq 0{,}637$ и значительно более эффективный α_2-тест с $e_2 = \pi/3 \doteq 0{,}955$, а также практически важный α-тест, основанный на статистике $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

В. С. Флейшман

5764. **Критерий для проверки изменения параметра, происшедшего в неизвестный момент. Пейдж** (A test for a change in a parameter occurringat an unknown point. Page E. S.), Biometrika, 1955, 42, № 3—4, 523—527 (англ.)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины. Проверяется гипотеза о том, что каждое x_i распределено согласно функции распределения $F(x \mid \theta)$ (θ известно) против конкурирующей гипотезы: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ имеют распределение $F(x \mid \theta)$, а $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — распределение $F(x \mid \theta')$. В случае, если θ — параметр сдвига, а $\theta' > \theta$, предлагается следующий критерий:

$$m = \max_{0 \leqslant r \leqslant n} \{S_r - \min_{0 \leqslant i \leqslant r} S_i\}, \text{ где } S_r = \sum_{j=1}^{r} (x_j - \theta),$$

$S_0 = 0$;

гипотеза отвергается, если $m \geqslant h$. Для некоторых частных случаев приведены таблицы ошибок первого рода в зависимости от n и h, а также мощность критерия при некоторых предположениях относительно конкурирующей гипотезы. Б. А. Севастьянов

5765. **Асимптотическое преобразование некоторых распределений в нормальное распределение. Вазов** (On the asymptotic transformation of certain distributions into the normal distribution. Wasow Wolfgang), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York — Toronto—London, 1956, 251—259 (англ.)

Пусть $g(t, \lambda)$ — плотность случайной величины T, зависящая от параметра λ таким образом, что $g(t, \lambda) \to f(t) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-t^2/2)$ $(\lambda \to \infty)$. Уравнение $\int_{-\infty}^{t} g(\tau, \lambda)\, d\tau = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi$ определяет функции $t = t(x, \lambda)$ и (обратную) $x = x(t, \lambda)$, позволяющие все вероятностные расчеты для T-распределения приводить к расчетам для нормального. В некоторых важ-

ных для практики частных случаях (закон Стьюдента — χ^2 — распределение) были получены асимптотические разложения вида:

$$x(t,\ \lambda)\sim t+\sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)\,\lambda^{-r} \text{ и } t\sim x+\sum_{r=1}^{\infty} k_r(x)\,\lambda^{-r}$$

с коэффициентами $f_r(t)$ и $k_r(x)$, представляющими многочлены.

Показывается, что существование подобных разложений с полиномиальными коэффициентами имеет место для целого класса распределений с плотностями $g(t,\ \lambda)$, удовлетворяющими некоторым условиям; важнейшее из них состоит в существовании асимптотического представления для логарифмической производной от $g(t,\ \lambda)$ вида:

$$-\frac{d}{dt}\ln g(t,\ \lambda)=t+\sum_{r=1}^{r=m} c_r(t)\,\lambda^{-r}+$$
$$+\lambda^{-m-1}R_1(t,\ \lambda,\ m),$$

где $m>0$ — произвольное целое число, $c_r(t)$ — многочлены и для некоторого $m_1>0$, не зависящего от m: $(1+|t|^{m_1})^{-1}|R_1(t,\ \lambda,\ m)|<C$ при всех m, $\lambda>\lambda_0$ и $\alpha(\lambda)<t<\beta(\lambda)$, где $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ достаточно быстро растут вместе с λ. Н. В. Смирнов

5766. Доверительные области для стандартного отклонения нормально распределенной величины, основывающиеся на среднем размахе некоторого числа выборок. Клерк-Гроббен, Сандберг (Betrouwbaarheidsintervallen voor de spreiding van een normale verdeling bepaald uit het gemiddelde van een aantal steekproefbreedtes. Klerk-Grobben Gerda, Sandberg H. D.), Statist. neerl., 1956, 10, № 2, 99—115 (гол.; рез. англ.)

Средний размах, определенный по некоторому числу малых выборок из нормальных совокупностей с одним и тем же стандартным отклонением σ, часто используется для получения точечных или интервальных оценок этого параметра. В работе приводятся таблицы, которые облегчают вычисление оценивающих интервалов, и рассматривается задача: какое число выборок объема $n=5$ или 7 должно быть использовано с целью получения данной точности оценки.

По резюме авторов

5767. Об одном распределении отношения правдоподобия. Хогг (On the distribution of the likelihood ratio. Hogg Robert V.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 529—532 (англ.)

Рассматриваются k взаимно независимых выборок объемов $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$ из генеральных совокупностей, заданных плотностями вероятностей $f(x;\ \theta_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$.

Выдвигаются две гипотезы относительно параметров θ_i плотностей вероятностей. Нулевая гипотеза выражается системой равенств $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_k=\theta_0$, где θ_0 — некоторое фиксированное число в противоположность альтернативной гипотезе о невыполнении этих равенств. Рассматривается плотность вероятностей вида

$$f(x;\ \theta)=\begin{cases} Q(\theta)\,P(x) \text{ при } a\leqslant x\leqslant b(\theta),\\ 0 \quad \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

где $P(x)$ — действительная, однозначная, положительная, непрерывная функция x и $b(\theta)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция θ, тогда функция правдоподобия имеет вид

$$\lambda=\frac{Q(\theta_0)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}}{\prod_{i=1}^{k} Q(t_i)^{n_i}},$$

где $t_i=b^{-1}(z_i)$, причем z_i — наибольшее из выборочных значений соответствующей выборки (t_i является оценкой максимального правдоподобия для θ_i). Доказывается, что при этом $-2\ln\lambda$ имеет (в точности) χ^2-распределение с $2k$ степенями свободы Если $k>1$ и нулевая гипотеза состоит в $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_k$, то $-2\ln\lambda$, где

$$\lambda=\frac{Q(t)^{\sum_1^k n_i}}{\prod_1^k Q(t_i)^{n_i}},$$

$t=b^{-1}(z)$ и $z=\max(z_1,\ \ldots,\ z_k)$, имеет распределение χ^2 с $2(k-1)$ степенями свободы. Этот же результат имеет место и для плотности вида

$$f(x;\ \theta)=\begin{cases} Q(\theta)\,P(x) \text{ при } \theta\leqslant x\leqslant b(x),\\ 0 \text{ в остальных случаях}\end{cases}$$

с той лишь разницей, что здесь $t_i=\min\{y_i,\ b^{-1}(z_i)\}$, где y_i — наименьшее из выборочных значений соответствующей выборки.

Выше были рассмотрены случаи, когда размерность пространства параметра при нулевой гипотезе равнялась 0 или 1.

Полученные результаты обобщаются на случай, когда это пространство m-мерно. Тогда $-2\ln\lambda$ имеет χ^2-распределение с $2(k-m)$ степенями свободы.

Б. С. Флейшман

5768. Геометрическое и логарифмическое распределения, дискретное распределение Парета. Мур (The geometric, logarithmic and discrete Pareto-forms of series. Moore P. G.), J. Inst. Actuaries, 1956, 82, № 1, 130—136 (англ.)

При помощи метода максимума правдоподобия проводится оценка параметра трех асимметричных распределений с одним параметром и выводится формула для дисперсии этих оценок.

Речь идет о геометрическом распределении (см. Феллер, «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», Изд-во ин. лит., М., 1952, стр. 177), логарифмическом распределении

$$p_r=-\frac{x}{\log(1-x)}\,\frac{x^{r-1}}{r},\quad 0<x<1,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

и дискретном распределении

$$p_r=\frac{r^{-\beta}}{\xi(\beta)},\quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ \beta>1.$$

Для оценок параметров последних двух распределений приложены таблицы. Приводятся свойства изучаемых распределений и примеры их использования.

J. Bílý

5769. Операционная характеристика одновыборочного контроля в случае одновременного контроля нескольких качественных признаков на одном образце. Горалек (Operativní charakteristika přejímky jednim výběrem při kontrole několika jakostních vlastností na jednom vyrobku. Horálek Vratislav). Apl. mat., 1956, 1, № 6, 431—444 (чешск.; рез. русск., англ.)

Пусть для контроля каждого из k контролируемых взаимно независимых качественных признаков (или групп этих признаков) установлена приемочная схема $(n,\ c_l)$ (для $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$), где n обозначает объем выборки и $c_l\geqslant 0$ — приемочное число (лимит) дефектных образцов в выборке.

Пусть, далее, p $(0\leqslant p\leqslant 1)$ — содержание брака в партии и $q=1-p$ — содержание удовлетворительных образцов там же. Аналогично, пусть p_l $(0\leqslant p_l\leqslant 1$ для $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ — доля брака по l-му контролируемому признаку образцов в партии и $q_l=1-p_l$ — со-

держание удовлетворительных по этому признаку образцов в партии.

Пусть ξ — случайная переменная, значение которой дает число дефектных образцов в выборке, и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ — взаимно независимые случайные переменные, значения которых дают числа дефектных образцов соответственно, по первому, второму, ..., k-му признаку в выборке.

Так как значения величин p_l (для $l=1, 2, \ldots, k$) надо считать неизвестными, то искомая, операционная характеристика $L^*(p)$ может быть определена лишь нижним и верхним пределами $L_D^*(p)$ и $L_H^*(p)$. Следовательно,

$$L_D^*(p) \leqslant L^*(p) \leqslant L_H^*(p).$$

Для $L_H^*(p)$ и $L_D^*(p)$ были получены следующие соотношения:

$$L_H^*(p) = P\{\xi \leqslant c_g \mid p, n\},$$

где

$$c_g = \prod_{l=1}^{k} c_l,$$

и

$$L_D^*(p) = \prod_{l=1}^{k} P\{\xi_l \leqslant c_l \mid {}_0p_l, n\},$$

где

$${}_0p_l = 1 - {}_0q_l \text{ для } (l=1, 2, \ldots, k), \quad {}_0p = 1 - {}_0q,$$

$${}_0q = \prod_{l=1}^{k} {}_0q_l,$$

причем числа ${}_0q_1, \ldots, {}_0q_k$ удовлетворяют системе равенств

$$q_g \frac{P\{\xi_g = c_g \mid p_g, n-1\}}{P\{\xi_g \leqslant c_g \mid p_g, n\}} = q_h \frac{P\{\xi_h = c_h \mid p_h, n-1\}}{P\{\xi_h \leqslant c_h \mid p_h, n\}}$$

для $g, h = 1, 2, \ldots, k$ и $g \neq h$.

Резюме автора

5770. О моментах размаха и продукт-моментах крайних членов в нормальной выборке. Рубен (On the moments of the range and product moments of extreme order statistics in normal samples. Ruben H.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 458—460 (англ.)

Доказывается, что математическое ожидание произведения крайних членов нормальной выборки при четном объеме выражается как линейная функция произведения объемов некоторых гиперсферических симплексов. Нечетные моменты размаха для нечетных объемов выборки и четные моменты при четных объемах имеют аналогичные выражения. Н. В. Смирнов

5771. Последовательное испытание случайности для событий, встречающихся во времени или в пространстве. Бартоломью (A sequential test of randomness for events occuring in time or space. Bartholomew D. J.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 64—78 (англ.)

Рассматривается класс случайных процессов, для которых вероятность наступления событий в промежутке времени $(T, T+dT)$ равна $\lambda(T)\,dT + o(dT)$, где $\lambda(T) \geqslant 0$ для $T \geqslant 0$ — монотонная функция. Проблема заключается в проверке гипотезы H_0: $\lambda(t) = \text{const}$. Альтернативной гипотезой служит гипотеза H_1, заключающаяся в том, что $\lambda(T)$ возрастает или убывает. Совместная функция плотности распределения моментов $T_1, \ldots, T_n$ наступления событий

$$p(T_1, \ldots, T_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(T_i) \exp\left[-\int_0^{T_n} \lambda(T)\,dT\right].$$

В целях упрощения исследования предполагается $\lambda(T) = \mu(\mu T)^a$ $(a > -1)$. В этом случае

$$p(T_k, \ldots, T_n) = \frac{\mu^{n-k+1}}{(k-1)!} \frac{(\mu T_k)^{(k-1)(a+1)}}{(1+a)^{k-1}} \prod_{i=k}^{n} (\mu T_i)^a \times$$

$$\times \exp\left[-(\mu T_n)^{a+1} \frac{1}{a+1}\right].$$

Для последовательного испытания гипотезы $a=0$ по отношению к альтернативной гипотезе $a=a_0$ вводится функция R,

$$\log R = (n-k)\log(1+a_0) - a_0 Q(n, k),$$

где

$$Q(n, k) = (n-1)\log T_n - (k-1)\log T_k - \sum_{i=k}^{n-1} \log T_i.$$

Для принятия или отклонения гипотезы используются 2 критических числа $A = (1-\beta)/\alpha$ и $B = \beta/(1-\alpha)$. Как обычно, числа α и β определяют соответственно вероятности ошибок 1-го рода — ошибочного отклонения гипотезы H_0 и 2-го рода — ошибочного принятия гипотезы H_0. Тогда гипотеза H_0 принимается, если $\log R \leqslant \log B$, и отклоняется, если $\log R \geqslant \log A$. Испытание продолжается до тех пор, пока выполнится одно из этих неравенств. С вероятностью 1 испытание заканчивается.

Дается способ определения оперативной функции $L(b)$, представляющей вероятность принять гипотезу $a=0$, если в действительности $a=b$. Исследуется также вопрос об экономии в объеме выборки, получающейся от применения последовательного испытания.

В работе содержится ряд вспомогательных таблиц. Приводится числовой пример. Б. В. Финкельштейн

5772. Сравнение эффективности выборки с возвращением и без возвращения, когда дисперсия генеральной совокупности неизвестна. Козневская (Porównanie efektywności losowania ze zwracaniem i bez zwracania przy nieznanej wariancji populacji generalnej. Kozniewska I.), Zastosow. mat., 1955, 2, № 3, 297—304 (польск.)

Рассматривается совокупность с конечным числом элементов N, средним μ и дисперсией σ^2. Цель статьи — сравнить эффективность оценок дисперсии в случае выборки без возвращения $\left[m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,\ M_2 = \frac{n}{n-1} m_2,\ a_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \right]$ с эффективностью соответствующих оценок в случае выборки с возвращением $\left[m_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,\ M_2^* = \frac{n}{n-1}\frac{N-1}{N} m_2^*,\ a_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \right]$. Находится, что в соответствии с индукцией (обозначая через $D(\xi)$ дисперсию ξ) $D(M_2^*) < D(M_2)$, $D(a_2^*) < D(a_2)$, $D(a_2) < D(M_2)$ и $D(a_2^*) < D(M_2^*)$. Интересно утверждение автора, что M_2^* является более эффективной оценкой дисперсии σ^2 генеральной совокупности, чем a_2, тогда и только

тогда, когда эксцесс γ_2 генеральной совокупности удовлетворяет неравенству

$$\gamma_2 \geqslant 1 + \frac{2(N-n)(N-n-1)(N-2)}{n^2(N-1)^2 - n(4N^2-5N-1) + N(5N-7)}.$$

W. Sadowski

5773. **Исправления к статье «О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах».** Петров В. В., Успехи матем. наук., 1956, 11, № 2, 250—251

См. РЖМат, 1955, 2327.

5774. **Многомерная регрессия с отсутствующими наблюдениями между независимыми случайными величинами.** Эджетт (Multiple regression with missing observations among the independent variables. Edgett George L.), J. Amer. Statist. Assoc.,1956, 51, № 273, 122—131 (англ.)

Пусть случайный вектор $X=(x_1, x_2, x_3)$ имеет трехмерное нормальное распределение. Методом максимума правдоподобия выводятся довольно сложные выражения для оценки девяти параметров этого распределения из случайной выборки, в которой у некоторых элементов производится наблюдение только двух координат x_1 и x_3 случайного вектора X.

В полной общности автор исследует случай неполных наблюдений, рассмотренный ранее (Matthai A., Sankhya, 1951, 9, ч. 2, 145—152). В этом общем случае не удалось найти явных выражений для оценки моментов второго порядка.

Получены оценки коэффициентов уравнения регрессии $x_1=\beta_0+\beta_2x_2+\beta_3x_3$ также в случае выборки с неполными наблюдениями. M. Josífko

5775. **Статистические таблицы и некоторые рекуррентные соотношения, связанные с p-статистиками.** Чаудхури (Statistical tables and certain recurrence relations connected with p-statistics. Chaudhuri S. B.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 24, 181—188 (англ.)

Для выяснения вопроса, разумно ли считать, что две p-мерные нормальные совокупности имеют одни и те же дисперсии и ковариации по данным выборок из них, вводятся p-статистики, являющиеся корнями $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$ детерминантного уравнения $\left|a'_{ij} - k^2 a''_{ij}\right| = 0$ (a'_{ij}, a''_{ij} — выборочные ковариации между i и j переменным) относительно неизвестного k^2. Автор рассматривает преобразование $\theta = \lambda k^2/(1+\lambda k^2)$ ($\lambda = (n_1-1)/(n_2-1)$, n_1, n_2 — объемы выборок). Для функции распределения статистики $\theta_1 = \max\theta$ даются небольшие таблицы 5% и 1% уровней значимости при $p=2, 3$ и различных комбинаций $m=(n_1-p-2)/2$ и $n=(n_2-p-2)/2$. В связи с этим устанавливаются рекуррентные формулы некоторых величин, связанных с m, n и p, входящих в распределение θ_1. М. К. Камалов

5776. **Простой метод выравнивания асимптотической кривой регрессии.** Паттерсон (A simple method for fitting an asymptotic regression curve. Patterson H. D.), Biometrics, 1956, 12, № 3, 323—329 (англ.)

Рассматривается задача оценки параметров в уравнении регрессии вида $y=\alpha-\beta\rho^x$ ($0<\rho<1$); для случая, когда переменное x принимает $n=4, 5, 6, 7$ равноотстоящих значений, дается оценка для ρ в виде отношения

$$r = a/b,$$ где $$a = y_{n-1} + (\mu_1 - 1)\, y_{n-2} + (\mu_2 - \mu_1)\, y_{n-3} + \ldots + (\mu_{n-3} - \mu_{n-4})\, y_2 - \mu_{n-3}\, y_1;$$
$$b = y_{n-2} + (\mu_1 - 1)\, y_{n-3} + (\mu_2 - \mu_1)\, y_{n-4} + \ldots + (\mu_{n-3} - \mu_{n-4})\, y_1 - \mu_{n-3}\, y_0$$

причем μ_i выбирается так, чтобы эффективность оценки была высока при всех значениях ρ. Приведена формула для определения эффективности оценки и пример для иллюстрации. М. К. Камалов

5777. **Оптимальная структура прямоугольных выборочных делянок.** Гхош (Optimum structure of rectangular sample units. Ghosh Birendranath), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 24, 176—180 (англ.)

Модель для «ошибок на периметре». Гхош (A model for perimeter errors. Ghosh Birendranath), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 24, 189—192 (англ.)

Обе статьи посвящены вопросу об оптимальной форме и расположении пробных прямоугольных делянок, по которым проводится выборочное определение урожайности (пример: агрономические полевые опыты).

Если длины сторон прямоугольной делянки A и B ($A \geqslant B$), то размер, форма и расположение делянки определяются заданием: 1) площади: $s=AB$, 2) показателя удлинения, характеризующего тип делянки $t=A/B$; 3) «показателя ориентации» (w), определяющего направление большей стороны. Автор, ссылаясь на работы Махаланобиса и др., а также на ряд своих ранее опубликованных статей и принимая, что корреляция в каждом данном направлении является неотрицательной убывающей функцией расстояния между делянками, приходит к ряду общих выводов.

Так, например, оказывается, что оптимальным будет такое расположение делянок, при котором их длинные стороны будут расположены вдоль направления максимальной разнородности участка. Для любых данных s и w оптимальным является максимальное растяжение, т. е. точность растет, если $t \to \infty$. Естественно, что практически есть верхний предел для t. Эти выводы относятся к ошибкам выборки, но они остаются в силе и при наличии ошибок учета, если последние носят случайный характер.

Если же «ошибки на периметре» (захват лишних растений и т. п.) носят систематический характер, то можно показать, что t не должно быть больше некоторого конечного t_0.

Вторая из вышеназванных заметок как раз и посвящена детальному анализу влияния «ошибок на периметре». Исходным является предположение о том, что если периметр разделен на N частей (N велико), то для каждой части ошибка будет $V=d+\alpha$, где $\alpha=\text{const}$ и d — случайная величина с математическим ожиданием равным нулю и постоянной (для всех элементарных частей периметра) дисперсией.

В этих предположениях и в предположении, что корреляция между значениями d является убывающей функцией расстояния, получена оценка систематической ошибки в определении урожайности и исследуется влияние на величину систематической ошибки изменений s и t. Основной вывод: для того чтобы систематическая ошибка в определении урожайности была достаточно мала, необходимо выполнение неравенств: $s \geqslant s_0$, $t \geqslant t_0$, где s_0 и t_0 — константы, но их величина для каждого отдельного поля меняется в зависимости от «многих условий». М. И. Эйдельнант

5778. **Нуль-распределение разности между двумя наибольшими членами выборки.** Сент-Пьер, Зингер (The null distribution of the difference between the two largest sample values. St-Pierre J., Zinger A.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 3, 849—851 (англ.)

Указывается процедура расчета для получения таблиц функции распределения $\Phi_n(u)$ статистики $u=x_{(0)}-x_{(1)}$, где $x_{(0)}$ и $x_{(1)}$ — наибольший и второй по величине члены в выборке из нормальной совокупности с центром в нуле и единичной дисперсией. При-

водится небольшая таблица $\Phi_n(u)$ при $n=2, 3, \ldots, 7$ и $u: 0, 0(0,2)2, 6$. Н. В. Смирнов

5779. **Оценка величины «расслоенных» (stratified) совокупностей животных. Чапман, Джанг** (The estimation of the size of a stratified animal population. Chapman D. G., Junge C. O., Jr), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 2, 375—389 (англ.)

Для определения численности животных (птиц, рыб и т. д.) кольцуют (отмечают) $t_{..}$ случайно отобранных индивидуумов. Затем, спустя некоторое время, проводят выборку объема $n_{..}$, и если в выборке будет $s_{..}$ закольцованных животных, то оценка общего числа животных $N_{..}$ будет:

$$\hat{N}_0 = n_{..}t_{..}/s_{..} \qquad (1)$$

или

$$\hat{N}_1 = (n_{..}+1)(t_{..}+1)/(s_{..}+1), \qquad (2)$$

если $s_{..}$ мало. Однако в большинстве случаев при кольцевании и последующей выборке совокупность фактически делится на r «слоев» (ареалов, групп, областей). В каждом слое кольцуется $t_{i.}$ животных и впоследствии отбирается $n_{.j}$ животных. Фактическое общее число индивидуумов в период кольцевания ($N_{i.}$) и выборки ($N_{.j}$) неизвестны. Поэтому нельзя обеспечить постоянство отношений $t_{i.}/N_{i.}$ и утверждать, что оценки (1) и (2) будут состоятельными. Авторы показывают, что если принять естественные условия:

I. $E(s_{ij} \mid n_{ij},\ t_{ij}) = n_{ij}t_{ij}/N_{ij}$.

II. $E(n_{ij}) = n_{.j}N_{ij}/N_{.j}$ или II′. $E(t_{ij}) = t_{i.}N_{ij}/N_{i.}$

и вытекающее из них условие

III. $E(s_{ij} \mid t_{ij}) = n_{.j}t_{ij}/N_{.j}$ или

III′. $E(s_{ij} \mid n_{ij}) = t_{i.}n_{ij}/N_{i.}$,

то r уравнений

$$\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\frac{\hat{N}_{.j}}{n_{.j}} = t_{i.}$$

дают оценки для $N_{.j}$ и другие r уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} s_{ij}\frac{\hat{N}_{i.}}{t_{i.}} = n_{.j}$$

дают оценки для $N_{i.}$. Оценкой же $N_{..}$ будет

$$\hat{N}_3 = \sum_{i=1}^{r} N_{i.} = \sum_{j=1}^{r} N_{.j}$$

и, наконец, оценкой числа индивидуумов, мигрировавших из слоя i в слой j, будет:

$$\hat{N}_{ij} = s_{ij}\hat{N}_{i.}\hat{N}_{.j}/t_{i.}n_{.j},$$

где N_{ij} — общее число животных, которые были в слое i в период кольцевания и в слое j в период выборки, t_{ij} — число закольцованных животных, которые находились в слое i в период кольцевания и в слое j в период выборки, n_{ij} — число животных, отобранных в слое j, находившихся в период кольцевания в слое i, s_{ij} — число животных, закольцованных в слое i и попавших впоследствии в выборку из слоя j, причем N_{ij}, $N_{i.} = \sum_{j=1}^{r} N_{ij}$, $N_{.j} = \sum_i N_{ij}$ и $N_{..} = \sum_{i,j} N_{ij}$ рассматриваются как неизвестные параметры, $t_{i.}$ и $n_{.j}$ — известные параметры. t_{ij} и n_{ij} — ненаблюдаемые случайные величины, s_{ij} — наблюденные случайные величины. Показано, что если при $t_{i.}$ и $N_{i.} \to \infty$ для всех i, j $t_{i.}/N_{i.} \to \mu_i$ и (s_{ij}/n_{ij}) стремится по вероятности к $E(s_{ij} \mid n_{ij})/n_{ij} = t_{i.}/N_{i.} = \mu_i$, то $\hat{N}_3$ будет состоятельной оценкой $N_{..}$.

Принимая, далее, что распределение t_{ij} и условие распределения s_{ij} для данных t_{ij} мультиномиальны (условие IV), авторы получают, что

$$\sigma^2(\hat{N}_3) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{N_{ij}N_{i.}N_{.j}}{t_{i.}n_{.j}}.$$

Дается также асимптотическая оценка дисперсий для

$$\hat{N}_{i.}/N_{i.},\ \hat{N}_{.j}/N_{.j} \text{ и } \hat{N}_{ij}/N_{ij}.$$

Кроме того, рассматриваются оценки при наличии смертности и при различном числе «слоев» в периоды кольцевания и отбора проб. М. И. Эйдельнант

5780. **О связи между сбалансированными неполными и частично сбалансированными неполными блоками. Рой** (On the relation between B. I. B. and P. B. I. B. designs. Roy Purnendu Mohon), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1954, 6, № 1, 30—47 (англ.)

Показано, что сложение (вычитание) частично сбалансированных неполных блоков со (от) сбалансированными неполными блоками с одним и тем же числом переменных и одним и тем же объемом в блоках приводит к частично сбалансированным неполным блокам. М. К. Камалов

5781. **Дисперсия средней систематических выборок. Вильямс** (The variance of the mean of systematic samples. Williams R. M.), Biometrica, 1956, 43, № 1, 137—148 (англ.)

Формула для дисперсии средней арифметической систематической выборки из конечной совокупности, полученная Мадоу (РЖМат, 1953, 1295), переносится, при некоторых добавочных предположениях, на случай выборки из непрерывной совокупности (т. е. на случайный процесс). Результаты применяются к проблемам оценки плотности вегетативного покрова при экологическом исследовании. Н. В. Смирнов

5782. **Функция правдоподобия для выборок с повторным отловом. Гилберт** (Likelihood function for capture-recapture samples. Gilbert N. E. G.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 488—489 (англ.)

Обычное допущение о применимости биномиального распределения вместо гипергеометрического, правильное при малых долях выборки, приводит к значительным ошибкам при определении численности популяции насекомых методом повторного отлова, охватывающего значительную долю популяции. Описывается простой метод корректуры, использующий информацию, доставляемую последовательными выборками. Н. В. Смирнов

5783. **Заметка о круговом многомерном распределении. Уотсон** (A note on the circular multivariate distribution. Watson G. S.), Biometrika, 1956, 43, № 3—4, 467 (англ.)

Указывается пример, в котором круговая модель серийной корреляции, выдвинутая в работе Андерсона (Anderson R. L., Ann. Math. Statistics, 1941, 13, 1), дает хорошее приближение. По резюме автора

5784. **Анализ $p \times (p-1)$ n-кратных латинских прямоугольных решеток и их множителей. Рой** (Analysis of $p \times (p-1)$ n-ple latinized rectangular lattices and their multiples. Roy Purnendu Mohon), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 23, 113—131 (англ.)

Дается полный анализ $p \times (p-1)$ n-кратных латинских прямоугольных решеток и их множителей для всех n и в связи с этим показывается полезность альтернативного ассоциирования схем, наиболее удобного в случаях с $n > p/2$ (предполагается существо-

вание $p \times p$ ортогональных латинских квадратов). Детально рассматриваются случаи $n = 3$ и $n = p - 2$.
М. К. Камалов

5785. **Об отношении дисперсии в схеме смешанного неполного блока. Томпсон** (On the ratio of variances in the mixed incomplete block model. Thompson W. A., Jr), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 4, 721—733 (англ.)

Даются доверительный интервал и правило испытания отношения двух компонент дисперсии для специальных моделей. Показано, что в случае схемы связанных неполных блоков формула для нахождения доверительного интервала принимает простейшую форму. Рассматриваются с этой точки зрения также двойственные, частично сбалансированные опыты с двумя ассоциированными классами. М. К. Камалов

5786. **О таблице значений основной нормальной функции распределения. Митропольский А. К.,** Тр. Всес. заочн. лесотехн. ин-та, 1956, № 2, 141—151

Приводятся шестизначные таблицы функции $f^*(x) = \exp(-x^2/2)$ для аргумента $x(0, (0{,}001)\ldots 4)$ и пример их статистического применения.
Н. В. Смирнов

5787. **О новом классе частично сбалансированных неполных блоков. Томпсон** (On a new class of partially balanced incomplete block designs. Thompson H. R.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, 6, № 24, 193—195 (англ.)

Дается новая планировка опыта для частично сбалансированных неполных блоков, когда известны параметры опыта. М. К. Камалов

5788. **О связях параметров в сбалансированных неполных блоках. Дас** (On parametric relations in a balanced incomplete block design. Das M. N.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1954, 6, № 2, 147—152 (англ.)

Устанавливаются некоторые связи между параметрами сбалансированных неполных блоков, которые должны выполняться для того, чтобы план эксперимента был реализуем. М. К. Камалов

5789. **Анализ регрессии и постоянные ошибки во временных экономических рядах. Абэ** (經濟時系列における回歸分析と變數誤差. 阿部統), 經濟論叢, Кэйдзай ронсо, Econ. Rev., 1956, 78, № 1, 55—69 (японск.)

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

5790. **Библиография по линейным неравенствам и связанным системам.** (A bibliography on linear inequalities and related systems.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 305—322 (англ.)

Библиография, составленная для сборника статей по линейному программированию. Содержит 289 названий. И. В. Романовский

5791. **Теорема Дильворта о частично упорядоченных множествах. Данциг, Гофман** (Dilworth's theorem on partially ordered sets. Dantzig G. B., Hoffman A. J.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 207—214 (англ.)

Наибольшее число несравнимых элементов частично упорядоченного множества равно наименьшему числу дизъюнктных цепей, объединение которых покрывает все множество. Это утверждение Дильворта (Dilworth R. P., Ann. Math., 1950, 51, № 1, 161—166) доказано для случая конечного множества путем решения некоторой задачи теории линейного программирования. И. В. Романовский

5792. **Граничные значения матричных игр и линейных программ. Милс** (Marginal values of matrix games and linear programs. Mills Harlan D.), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 183—193 (англ.)

Конечная игра двух лиц с нулевой суммой задается матрицей G. Пусть $\Delta(G)$ — значение игры, и матрица H имеет ту же форму, что и G. Граничное значение игры G относительно H определяется как

$$\frac{\partial \Delta(G)}{\partial H} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\Delta(G + \alpha G) - \Delta(G)}{\alpha}.$$

Теорема 1 утверждает, что граничное значение игры G относительно H является значением игры с ограничениями H, где для каждого игрока множеством стратегий служит множество его оптимальных стратегий в игре G.

Соответственно граничному значению матричной игры определяется граничное значение дуальных программ. Ставится 3 вопроса, связанные с существованием введенных в работе величин, и упоминается о связи между граничными значениями и лагранжевыми множителями. О. В. Шалаевский

5793. **Определение полиэдральных игр. Вулф** (Determinateness of polyhedral games. Wolfe Philip), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 195—198 (англ.)

Полиэдральной игрой называется тройка (A, X, Y), где A — прямоугольная матрица в n строк и m столбцов, а X и Y — непустые многогранники соответственно в E_m (пространство m-компонентных векторстолбцов) и E_n (пространство n-компонентных векторстрок). Векторы $x \in X$ ($y \in Y$) считаются стратегиями первого (второго) игрока. Пусть $v_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} yAx$ и $v_2 = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} yAx$. $x_0 \in X$ такое, что $\inf_{y \in Y} yAx_0 = v_1$, называется оптимальной стратегией первого игрока. Аналогично для второго игрока. Игра имеет значение или величину v, если $v_1 = v_2 = v$.

Теорема. Если полиэдральная игра обладает конечным значением, то существуют оптимальные стратегии для обоих игроков. Если игра значения не имеет, то $v_1 = -\infty$ и $v_2 = +\infty$. Существуют игры, имеющие конечное значение, имеющие значение, равное $+\infty$, $-\infty$, а также не имеющие значений вовсе.
О. В. Шалаевский

5794. **Замкнутая линейная модель производства. Гейл** (The closed linear model of production. Gale David), Ann. Math. Studies, 1956, № 38, 285—303 (англ.)

Процессом называется пара (x, y) векторов с неотрицательными компонентами: исходного вектора $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и заключительного вектора $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$. Нормой производства j-го продукта $\alpha_j(x, y)$ называется отношение η_j/ξ_j (для $\xi_j = 0$, $\eta_j > 0$ $\alpha_j(x, y) = \infty$, для $\xi_j = \eta_j = 0$ норма не определена). $\alpha(x, y) = \min_j \alpha_j(x, y)$ — технологическая норма производства процесса (x, y). $\alpha_M = \max_{(x, y)} \alpha(x, y)$ — технологическая норма производства модели M.

Если $p = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \geqslant 0$ — вектор цен, то экономической нормой производства процесса (x, y) при цене p называется $\beta(x, y; p) = yp/xp$ (для $xp = 0$, $yp > 0$ $\beta = \infty$, для $xp = yp = 0$ норма не определена).

Теорема 1. Существуют процесс $(\bar{x}, \bar{y})$ (именуемый оптимальным) и вектор цен p такие, что

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, p) = \alpha_M, \tag{1}$$

$$\beta(x, y, p) \leqslant \alpha_M \tag{2}$$

для всех процессов, для которых определена $\beta(x, y, p)$.

Модель называется регулярной, если для каждого оптимального процесса (x, y) $y > 0$. Для любой модели $\alpha_M \geqslant \beta_m = \min_p \max_{(x, y)} \beta(x, y; p)$, для регулярной модели $\alpha_M = \beta_m$. Если заданы m таких процессов

(a_i, b_i), $i = 1, \ldots, m$, что каждый процесс представим в виде

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i, b_i), \quad \lambda_i \geqslant 0,$$

то модель называется моделью Неймана.

Теорема 1 используется для доказательства теоремы Неймана (Neumann J., Ergebn. eines Math. Kolloq., № 8, Vienna, 1937). Даны критерии регулярности модели Неймана. В модели Неймана существует оптимальный процесс, составленный не более чем из n основных процессов (a_i, b_i). Модель Неймана, в которой $n = m$ и $b_i = (0, 0, \ldots, \beta_i, \ldots, 0)$, называется моделью Леонтьева. Пусть A — матрица, i я строка которой есть a_i, $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i, b_i)$ — оптимальный процесс, то

$$\alpha_M v A = v.$$

Вводится и исследуется понятие подмодели модели Неймана. И. В. Романовский

5795. **Несовместность некоторых требований, предъявляемых к функции общественного блага. Инада** (Alternative incompatible conditions for a social welfare function. Inada Kenichi), Econometrica, 1955, 23, № 4, 396—399 (англ.)

Под функцией общественного блага понимается правило построения по каждому набору n бинарных отношений (индивидуального) предпочтения на некотором множестве нового бинарного отношения (общественного) предпочтения на том же множестве. К. Эррроу (Arrow K., Social choice and individual values.) сформулировал ряд условий, которым, по его мнению, функция общественного блага должна удовлетворять. Доказывается, что как эти условия, так и более слабые, приводимые в статье, являются несовместными. Н. Н. Воробьев

5796. **Матрица промышленной игры. Дейвис** (The matrix for an industrial game. Davies Robert), Industr. Math., 1955, 6, 1—5 (англ.)

Приводится сопровожденное небольшими пояснениями построение матрицы игры, участниками которой являются конкурирующие компании. О. В. Шалаевский

5797. **Теория капитала и его временные меры. Блит** (The theory of capital and its time measures. Blyth Conrad Alexander), Econometrica, 1956, 24, № 4, 467—479 (англ.)

5798. **Замечание к статье м-ра Блита. Сарган** (A note on Mr. Blyth's article. Sargan John D.), Econometrica, 1956, 24, № 4, 480—481 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

5799. **Замечания о максимуме количества бактерий в популяции. Урбаник** (Uwagi o maksymalnej ilości bakterii w populacji. Urbanik K.), Zastosow. mat., 1956, 2, № 4, 341—348 (польск.; рез. русск., англ.)

Автор изучает развитие популяции бактерий, рассматривая ее как стохастический процесс рождения и смерти. Обозначим через η интенсивность деления одной бактерии на две и через γ интенсивность смерти, тогда функция распределения максимального числа бактерий в популяции $(S(\xi))$ выражается формулой

$$P\{S(\xi) < k \mid \xi_0 = r\} =$$

$$= \begin{cases} (\gamma/\eta)^r - (\gamma/\eta)^k (1 - (\gamma/\eta)^k)^{-1} & \text{для } \gamma/\eta \neq 1, \\ (k - r)\, k^{-1} & \text{для } \gamma/\eta = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где ξ_0 обозначает число бактерий в начальный момент. На основании (1) автор приходит к заключению (противоречащему интуиции), что среднее время, в которое объем (размер) популяции сравняется с максимальным (конечным) числом бактерий, не является неубывающей функцией интенсивности смерти. W. Sadowski

5800. **Применение теории вероятностей в тяжелой промышленности. Ари** (Ihtimâller hesabinin ağir sanayide tatbiki. Ari R. Ilyas), Demir ve çelik, 1956, 5, № 4, 74—78 (турец.)

5801. **Введение в теорию информации. Жгурич** (Uvod u teoriju informacija. Žgurić Stjepan), Tehnika, 1956, 11, № 1, 73—78 (серб.)

5802. **Применение математической статистики при обработке результатов пылевых исследований. Хорошев О. В., Духовный М. А.,** Сб. тр. Криворожск. горнорудн. ин-та, 1956, вып. 5, 201—210

Авторы излагают, как «на основании статистической обработки результатов пылевых исследований можно, помимо исключения грубых ошибок (промахов), определить интервал, в пределах которого находится истинная величина запыленности воздуха (так называемый доверительный интервал), оценить точность отдельных экспериментов и выяснить значимость установленных экспериментальным путем зависимостей». Начальные разделы статьи посвящены вопросу проверки нормальности распределения показателя запыленности.

Примечание референта. Авторы наивно полагают, что этот вопрос решается утвердительно путем надлежащей обработки совокупности из всего-навсего 12 проб (!) и вычисления критерия Колмогорова (с соответствующей доверительной вероятностью равной единице!). Хороший пример того, как не надо применять математическую статистику. Н. В. Смирнов

5803. **Исследование операций предпринимательской деятельности людей. Гопкинс** (Operations research in relation to the human-enterprise process. Hopkins Nigel J.), Operat. Res., 1956, 4, № 3, 357—360 (англ.)

5804. **Таблицы смертности, которые удовлетворяют принципу одинакового возраста. Гревилл** (Laws of mortality which satisfy a uniform seniority principle. Greville T. N. E.), J. Inst. Actuaries, 1956, 82, № 1, 114—122 (англ.)

5805. **Заметки об анализе кривых Тромпа. Хигути** (Tromp-Curve 解析に關する注意. 樋口伊佐夫), 統計數理研究所彙報, Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1956, 3, № 2, 1—4 (японск.; рез. англ.)

5806. **Теория информации. Паллари** (Teoria della informazioni. Pallari Raffaello,), Elettrotechnica, 1956, 43, № 6, 303—310 (итал.)

5807. **Степенной закон спектра случайных равнонаправленных величин. Цудзи** (等方性亂れのスペクトルの α法則についての覚え書. 辻廣), 日本航空學會誌, Нихон коку гаккайси, J. Japan Soc. Aeronaut. Engng, 1956, 4, № 31, 210—212 (японск.)

5808. **Замечания об одном методе расчета нагрузки неограниченного пучка с избыточным числом переговоров. Гилтай** (Opmerkingen bij een methode voor het berekenen van de bezetting van een door overloopverkeren belaste onbeperkte bundel. Giltay J.), Ingenieur (Nederl.), 1956, 68, № 36, 0.95—0.96 (гол.; рез. англ.)

5809. **Область приложения современной теории информации. Жгурич** (Područje primene savremene teorije informacija. Žgurić Stjepan), Tehnika, 1956, 11, № 11, 1669—1673 (сербо-хорв.; рез. франц.)

5810 К. **Стохастическая теория обучаемости. Буш, Мостеллер** (Stochastic models for learning.

Bush R. R., Mosteller F. New York, Wiley, 1955, 365 pp.) (англ.)

Монография посвящена актуальному вопросу о статистическом исследовании обучаемости. Рассматривается формализованная и упрощенная модель процесса обучаемости. Затем развивается математический аппарат, описывающий принятую авторами схему обучаемости, который применяется к исследованию конкретных физиологических экспериментов. Так как непосредственное вычисление вероятностей для тех или иных случаев применения модели обучаемости является практически невозможным, используется метод Монте-Карло.

Смысл предложенной схемы состоит в том, что ее можно смоделировать при помощи, например, электронной вычислительной машины. Это позволяет приблизиться к решению одной из основных задач кибернетики — созданию управляющих устройств, обладающих свойствами накапливания опыта и адаптации к меняющимся внешним условиям.

Мысль о возможности применения математических методов к анализу высшей нервной деятельности была высказана еще И. П. Павловым.

Данная книга обобщает первые шаги в этом направлении. Изучаемая модель отражает внешние характеристики процесса вырабатывания навыка, не касаясь еще механики внутренних связей, возникающих в коре головного мозга. Тем не менее сама возможность построения такой модели привлекательна и для изучения физиологии высшей нервной системы, и для теории «обучаемых» устройств.

Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена разработке математического аппарата, описывающего принятую авторами общую модель обучаемой системы, заключающейся в следующем. Имеется система, допускающая при каждом испытании один из возможных ответов. Состояние системы характеризуется вектором $\mathbf{p}(p_1, \ldots, p_n)$, координаты которого суть вероятности отдельных возможных ответов. Система может реагировать на N возможных событий $A_1, A_2, \ldots, A_N$. После того как произошло событие A_i, вектор $\mathbf{p}$ подвергается действию соответствующего линейного оператора T_i. Изучаются различные типы последовательностей событий, когда порядок их чередования определяется экспериментатором, самим объектом исследования или зависит от последнего и от произвола экспериментатора одновременно. Для всех трех случаев подробно рассматриваются задача о частотах появления данного ответа и другие аналогичного типа задачи.

Вторая часть посвящена обсуждению целого ряда проведенных физиологических экспериментов, к описанию и истолкованию которых применяется общая модель. Оцениваются параметры соответствующих операторов. В книге использованы: опыты Брунера, Миллера и Циммермана по запоминанию односложных слов со слуха; опыты Соломона и Винна по вырабатыванию у собак защитного рефлекса на электрический разряд (условным раздражителем являлось выключение света, после чего собака во избежание удара электрическим током должна была прыгать через барьер); опыты Шварца, Миллера и Долларда по изучению имитации поведения; опыты Брунсвика и Стэнли по изучению образования у крыс навыка находить нужный путь в T-образном лабиринте; опыты Грэхэма и Ганье, в которых изучалось время, затрачиваемое голодной крысой на достижение пищи, помещенной в конце прямого коридора.

Реферируемая книга представляет большой интерес для разнообразного круга читателей.

Ю. А. Шрейдер

См. также: 5316

ГЕОМЕТРИЯ

5811. Конференция по вещественной геометрии. Годо (Le colloque sur les «Questions de réalité en géométrie». Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 3, 238—239 (франц.)

В мае 1955 г. «Бельгийский центр математических исследований» (Centre Belge de recherches mathématiques) организовал конференцию по вопросам «вещественной геометрии». Этим термином объединяется ряд направлений. Одно из них развивает идеи датского геометра Юеля. Последний рассматривает действительные плоские кривые, подчиненные только требованию непрерывности касательной. Кривые, образованные соединением таких дуг, классифицируются по максимальному числу точек пересечения с прямой. Для таких кривых сохраняют силу некоторые свойства алгебраических линий. Аналогично исследуются поверхности, в частности поверхности 3-го порядка. Этим вопросам посвящены доклады Монтеля, опубликованные в 1924 г. и воспроизводимые на первом месте в трудах конференции. Далее следуют работы Маршо, Гаупта, Фенхеля и Винченсини в том же круге идей. Другое направление «вещественной геометрии» — построение вещественных частей алгебраических кривых и поверхностей — представлено работами Брузотти и Галафасси.

Совершенно иной характер носит доклад, сделанный на конференции Б. Сегре. Последний излагает свои исследования о соответствиях между топологическими многообразиями. Последний из докладов, помещенных в трудах конференции, сделанный Сантало, посвящен интегральной геометрии.

М. Я. Выгодский

5812. Геометрические работы Гаусса. Норден А. П. В сб.: Карл Фридрих Гаусс, М., АН СССР, 1956, 113—114

Дается обзор геометрических исследований Гаусса. Кратко, но весьма обстоятельно, со ссылками на первоисточники, обрисованы работы Гаусса по теории поверхностей и по теории параллельных. Далее говорится о геометрическом истолковании комплексных чисел и о создании Гауссом геометрической теории кватернионов (за четверть века до Гамильтона). Этой теории Гаусс не опубликовал. В заключение говорится о замыслах Гаусса в области геометрии положения, которых сам Гаусс не осуществил.

М. Я. Выгодский

5813. О допустимости дифференциально-геометрических рассмотрений. Финслер (Ueber die Berechtigung Infinitesimalgeometrischer Betrachtungen. Finsler Paul), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 8—12 (нем.)

Указывается, что так называемые инфинитезимальные соображения (оперирование со «смежными» точками, определение касательной, как прямой, соединяющей «смежные» точки линии, и т. п.) по существу предполагают предельный переход. Тем самым, существенно предположение, что множество точек беско-

нечно. В статье содержатся рассуждения о понятии натуральных чисел и бесконечных множеств.
Н. В. Ефимов

5814. **Некоторые геометрические свойства моторных диадиков. Чернова М. Л.,** Уч. зап. Ульяновского гос. пед. ин-та, 1956, вып. 9, 227—250

Алгебра моторов пополняется двумя новыми операциями: смешанным произведением шести моторов и моторным произведением пяти моторов. Эти операции определяются на основе формальной аналогии с представлениями в виде определителей смешанного и векторного произведений векторов. Затем доказывается инвариантность вводимых произведений относительно выбора координатных систем. Моторными диадиками именуются линейные операторы, преобразующие мотор в мотор. При умножении на диадик соосных моторов, обладающих разными параметрами, получаются моторы, оси которых являются образующими одного и того же цилиндроида. Рассмотрены диадики некоторых частных видов и линейчатые образы, инвариантные относительно преобразований осей моторов, осуществляемых с помощью умножения этих моторов на диадики. С. Г. Кислицын

5815 **К. Факты о фигурах. Морони** (Facts from figures. 3rd. and rev. ed. Moroney Michael Joseph. London Penguin Books, 1956, 8, 472 pp., ill., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 343, 10 (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

5816. **Применение метода проекций с числовыми отметками к изучению физико-химического анализа. (Обзорная статья). Радов Е. А.,** Тр. Киевск. технол. ин-та легкой пром-сти, 1955, вып. 7, 177—190

В статье показана связь геометрии с химией. Дано приложение начертательной геометрии к физико-химическому анализу и подчеркивается целесообразность применения метода проекций с числовыми отметками для построения диаграмм. На основании работы акад. Н. С. Курнакова (Соединение и пространство, Введение в физико-химический анализ, изд. АН УССР, 1940) описана аналогия между химическими диаграммами и топографическими поверхностями. В работе приведены примеры построения тройных и четверных химических диаграмм состав—свойство. Диаграммы четверной системы даны на проекции правильного тетраэдра. Автор считает, что для подготовки инженеров-химиков необходимо составить особую учебную программу по начертательной геометрии, в которой было бы предусмотрено широкое использование метода проекций при последующем изучении физико-химического анализа. А. Р. Зенгин

5817. **Исследования в области теории сферических механизмов. Калицин** (Изследования из теорията на сферичните механизми. Калицин Георги Ст.), Изв. Техн. ин-т Българ. АН, 1956, кн. 4, 31—50 (болг.; рез. русск., нем.)

Исследуется кинематика сферических механизмов с помощью изоморфных групп и матричного исчисления. Выводится, как результат двух последовательных вращений, основное для теории сферических механизмов матричное уравнение движения постоянных и моментных осей вращения, образующих конус с круглым поперечным сечением.

Матричное исследование применяется к одному сферическому четырехзвенному механизму (муфта Кардана) и к пространственному дифференциальному механизму с коническими зубчатыми колесами. В. С. Люкшин

5818. **Связь между равновесием и совместностью и ее физическое значение I. II. Финци** (Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. I. II. Finzi Leo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956, 20, № 2, 205—211; № 3, 338—342 (итал.)

Уравнения равновесия упругого тела в случае плоской задачи и отсутствия массовых сил можно записать в виде

$$F^i \equiv p^{ik}_{|k} = 0,$$

где p^{ik} $(i,\ k = 1,\ 2)$ — компоненты тензора напряжений.

Общий интеграл этих уравнений будет

$$p^{ik} = \varepsilon^{ir}\varepsilon^{ks}\chi_{|rs} \qquad (i,\ k = 1,\ 2), \tag{1}$$

где в случае декартовой системы координат $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$, а χ — функция Эйри.

Условие совместности деформаций имеет вид

$$\Omega \equiv \varepsilon^{ir}\varepsilon^{ks}\xi_{ik|rs} = 0. \tag{2}$$

Автор замечает аналогию между уравнениями (2) и (1), выражающуюся в том, что переход от (1) к (2) можно осуществить, подставляя в (2) вместо ξ_{ik} функцию χ. Из этого факта он делает некоторые заключения и выводы. О. С. Парасюк

5819. **О делительных поверхностях. Соэда** (Abhandlung über die Teilfläche. Soeda Takashi), 徳島大學工學部研究報告, Токусима дайгаку когакубу кэнкю хококу, Scient. Papers Fac. Engng Tokushima Univ., 1955, № 6, 8—11 (нем.)

Выводятся уравнения делительных поверхностей в вопросе зубонарезания в общем случае, когда оси вращений скрещиваются. Вместо обычных условий зацепления и нахождения точек касания поверхностей зубьев, автор, используя идею огибания, находит уравнения делительных поверхностей. Формула перехода от одной системы координат к другой и уравнения семейства поверхностей зубьев записаны в матричной форме. При исследовании предполагается, что угловые скорости не постоянны.

В заметке имеются опечатки. В. С. Люкшин

5820. **Взаимные фигуры. Кремона** (Le figure reciproche. Cremona Luigi), Civiltá macchine, 1956, 55—62, 83 (итал.; рез. англ.)

Статья известного итальянского геометра Луиджи Кремона от 1872 г. публикуется вновь в итальянском техническом журнале ввиду ее большого прикладного значения. Предложенный Кремона метод получил широкое распространение в графической статике и основанных на ней других технических науках. Разработанные автором приемы применения проективной геометрии к решению ряда практических задач оказались весьма полезными в инженерной практике. Кремона на небольшом числе страниц дает обильный материал, сопровождая его большим числом конкретных примеров. Тщательно выполненные диаграммы с подробными пояснениями увеличивают значимость опубликованной статьи. В резюме на английском языке сообщаются некоторые биографические данные об Л. Кремона и приводятся сведения о других работах автора.
М. П. Черняев

5821. **Заметка о правиле деления тензоров. Пан** (A remark on the quotient law of tensors. Pan T. K.), Math. Mag., 1955, 28, № 4, 197—198 (англ.)

Методическая заметка, имеющая цель предостеречь учащегося от возможных, встречающихся в практике обучения ошибок при использовании этого правила.
А. М. Лопшиц

5822. **Теорема Гюльдена. Моссу** (Le théorème de Guldin. Mossoux R.), Allinace industr., 1956, mai, 133—136 (франц.)

Излагается элементарный вывод известных формул Гюльдена для поверхности и объема тела вращения и применение этих формул для определения боковой поверхности и объема конуса, центра тяжести однородного полукруга и объема тора. Новых результатов нет. А. Я. Лусис

5823 К. **Математическая геодезия. 2. изд. Христов Владимир К.** София, Наука и изкуство, 1956, 524 стр., ил., 12.65 лв. — Литогр.) Българ. книгоп., 1956, 60, № 9, 5 (болг.)

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5824. **Треугольник, вписанный в треугольник. Гурматай** (Triangle inscrit à un triangle. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 428—429 (франц.)

Рассматриваются три треугольника: ABC, DEF и XYZ, причем D лежит на BC, E — на CA и F — на BA, а X есть пересечение BE и CF, Y — пересечение CF и AD и Z — пересечение AD и BE. Для элементов и площадей этих треугольников выводятся ряд соотношений, обобщающих результаты Саттерли (РЖМат, 1957, 4280). В. И. Ведерников

5825. **Прямое геометрическое доказательство теоремы Штейнера. Джентиле** (Una dimostrazione geometrica diretta del teorema di Steiner. Gentile Giovanni), Archimede, 1956, 8, № 3, 139—140 (итал.)

Приводится прямое доказательство теоремы: Если в треугольнике ABC биссектрисы BD и CE равны ($D \subset AC$; $E \subset AB$), то $AB = AC$. В. А. Маневич

5826. **Теоремы Чевы и Менелая в n-мерном пространстве. Бескин Н. М.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2, М., АН СССР, 1956, 138—139

Без доказательства дается формулировка аналога теорем Чевы и Менелая для невырожденного симплекса n-мерного проективного пространства. В. Д. Измайлов

5827. **О равенстве отношений между длинами окружностей и между соответствующими радиусами. Ла Барбера** (Sull'eguaglianza dei rapporti tra le lunghezze delle circonferenze e quelle dei rispettivi raggi. La Barbera Alberto), Archimede, 1956, 8, № 4—5, 168—171 (итал.)

В предыдущих работах (Circolo mat. Catania, 10, fasc. 9—10, «Geometria per Licei classici», Palermo, U. T. E. S.) автор уже рассмотрел, как можно уточнить вопрос о вычислении длин окружностей и смежных задач. В реферируемой статье он вносит ряд уточнений и упрощений в результаты своих предыдущих работ. М. П. Черняев

5828. **Сферы, ассоциированные с тетраэдром. Тебо** (Sphères associées à un tétraèdre. Thébault V.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 426—428 (франц.)

Для тетраэдра $T = (ABCD)$ рассматривают четыре четверки сфер с центрами в вершинах тетраэдра T, а также четыре сферы с центрами в точках P, Q, R, S, ортогональных к четверке сфер, с центрами соответственно в точках A, B, C, D. G и g — центры тяжести тетраэдров $ABCD$ и $PQRS$. Выводится ряд соотношений между радиусами сфер и расстояниями между указанными выше точками. Формулируются два следствия:

1. Если суммы квадратов радиусов четверки сфер, с общим центром в каждой из вершин, одинаковы, то центр тяжести тетраэдра $PQRS$ совпадает с центром сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, и алгебраическая сумма расстояний точек $PQRS$ до грани тетраэдра $ABCD$ равна учетверенному расстоянию точки g до той же грани.

2. Если $g = G$, то сумма квадратов радиусов четырех сфер, соответствующих какой-либо из вершин, увеличенная на сумму квадратов ребер грани T, противоположной данной вершине, есть величина постоянная, не зависящая от выбора вершины. В. И. Ведерников

5829. **О шестиугольнике, отнесенном к треугольнику. Тебо** (Sur un hexagone associé à un triangle. Thébault Victor), Mathesis, 1956, 65, № 1—3, 70—77 (франц.)

В остроугольном треугольнике ABC точки $A'B'C'$ — основания высот, $A_2B_2C_2$ — середины высот.

Доказано, что треугольники $A'B_2C_2$, $B'C_2A_2$, $C'A_2B_2$ подобны данному треугольнику ABC; дан ряд новых теорем геометрии треугольника. Точки M_1 и M_2; N_1 и N_2; P_1 и P_2 — середины высот $B_2B'_2$ и $C_2C'_2$, $C_2C'_3$ и $A_2A'_1$, $A_2A'_2$ и $B_2B'_3$ треугольников $A'B_2C_2$, $B'C_2A_2$ и $C'A_2B_2$.

Шесть перечисленных точек — вершины шестиугольника, вписанного в круг, являющийся одним из кругов Тюкера для данного треугольника ABC.

Примечание референта. Центры кругов Тюкера лежат на прямой OK, где O — центр круга, описанного около треугольника, а K — точка Лемуана. С. И. Зетель

5830. **О параболе четвертой степени. Андерссон** (Om fjärdegradsparabeln. Andefsson Josef), Elementa, 1955, 38, № 4, 241—244 (швед.)

Рассматриваются некоторые аффинные свойства кривой $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ для $n = 4$ и в общем случае. Пример: при $n \geqslant 3$ центр тяжести всех точек кривой с данным направлением касательных не зависит от этого направления. Г. К. Энгелис

5831. **К геометрии параболы. Дюрьё** (Sur la parabole. Durieu M.), Mathesis, 1956, 65, № 1—3, 77—83 (франц.)

Приводится ряд свойств описанных около параболы треугольников и многоугольников. Например, 4 касательных p_1, p_2, p_3, p_4 образуют 4 треугольника (трехсторонника); описанные около них окружности проходят все через фокус F параболы, а центры их O_i лежат на окружности Микеля, тоже проходящей через F, и т. д.

Эти результаты обобщаются на описанный многосторонник и получаются некоторые проективные свойства связанных с ним построений. Больше, чем результаты, привлекает метод изображения точек на плоскости комплексными числами $z = x + iy$ (Бюшгенс С. С., Дифференциальная геометрия, М., 1940, 101—119). Имеются опечатки. А. С. Лейбин

5832. **О кривых, параллельных эпи- и гипоциклоидам. Гурматай** (Sur les courbes parallèles aux épi-et hypocycloides. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1956, 65, № 7—9, 429—430 (франц.)

На плоскости в комплексных координатах записываются уравнения эпи- и гипоциклоид, а также уравнения кривых, им параллельных. Доказывается, что огибающая прямых Симсона переменной точки окружности, относительно вписанного четырехугольника, есть кривая, параллельная астроиде. В. И. Ведерников

5833. **Нитяные конструкции поверхностей второго порядка. Бём** (Die Fadenkonstruktionen der Flächen zweiter Ordnung. Böhm Wolfgang), Math. Nachr., 1955, 13, № 3—4, 151—156 (нем.)

Рассматриваются геометрические свойства нитяных конструкций поверхностей второго порядка для случая евклидова пространства трех измерений. Автор приводит чисто геометрическое исследование, широко используя теорему Иври относительно диагоналей

квадрики, образованной конфокальными поверхностями некоторого семейства. Г. В. Кирсанова

5834. О постулате непрерывности прямой и о некоторых его применениях в элементарной геометрии. Ш е (Sul postulato della continuità della retta e su alcune sue applicazioni nella geometria elementare. S c e M.), Period. mat., 1955, 33, № 4, 215—225 (итал.)

5835 К. Геометрия плоскости. С м и т, У л р и к (Plane geometry. S m i t h R o l l a n d R y t h e r, U l r i c h J a m e s F. New York, World Book Co.; London, Harrap, 1956, viii, 536 pp., ill., 27 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 339, 10 (англ.)

5836 К. Геометрия пространства. С м и т, У л р и к (Solid geometry. S m i t h R o l l a n d R y t h e r, U l r i c h J a m e s F r a n c i s. New York, World Book Co.; London, Harrap, 1957, v. 266 pp., ill., 20 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 374, 11 (англ.)

5837 К. Лекции по геометрии. Часть III. М о р и н (Lezioni di geometria. Parte III: Elementi di geometria proiettiva. 2 ed. rif. M o r i n U g o. Padova, Casa ed. dott. A. Milani, 1955, xii, 333 p., 2300 l.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 70 (итал.)

5838 К. Курс теоретической геометрии. III. IV (Cours de géométrie théorique. Livres III et IV. Paris, École génie civil, 1956, 132 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 28, 657 (франц.)

5839 К. Элементы тригонометрии. Шапю (Elementos de trigonometria. C h a p u t I g n a c e. Trad. del franc. 8. ed. Rev. correta e atual. Rio de Janeiro, F. Briguiet, 1956, 246 p. il. cart. 120 crus.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 1, № 4, 31 (порт.)

5840 К. Тригонометрия плоскости. Хейнеман (Plane trigonometry. 2nd ed. H e i n e m a n E l l i s R i c h a r d. New York — London, McGraw—Hill, 1956, xii, 167 pp., 24 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 339, 10 (англ.)

5841 К. Типовые задачи по тригонометрии. Агинага-Морено (Problemas tipo de trigonometria. A g u i n a g a M o r e n o E d u a r d o. Madrid, Dossat, 1956, 378 p. 200 ptas), Bibliogr. hispánica, 1956, 15, № 5, 139 (исп.)

5842 К. Тригонометрия. Пинту (Trigonometria. P i n t o H é b e r t F e l i c i a n o. Rio de Janeiro, Ed. Científica, 1956, 255 p., il. 100 crus.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 2, 81 (порт.)

5843 К. Курс тригонометрии (Cours de trigonométrie. 21e éd. Paris. Eyrolles, 1955, 156 p., ill., 660 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 23, 534 (франц.)

5844 К. Современная тригонометрия. Ратледж, Понд (Modern trigonometry. R u t l e d g e W i l l i a m A., P o n d J o h n A. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice—Hall; London, Bailey and Swinfen, 1956, xi, 243 pp., ill., 42 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 331, 7 (англ.)

5845 К. Тригонометрия плоскости и сферы. Педру (Trigonometria plana e esférica. Para o cíclo colegial e admissão às escolas superiores. P e d r o I s i d o r o. Rio de Janeiro, Liv. Francisco Alves, 1955, 402 p., il. cart. 55 crus.), Bol. bibliogr. brasil, 1956, 4, № 2, 81 (порт.)

5846 К. Краткий курс высшей математики. Вып. 1. Аналитическая геометрия на плоскости. Митькин А. М. Моск. финанс. ин-т, М., 1956, 82 стр., илл.

5847 К. Геометрия Декарта. Итар (La géométrie de Descartes. I t a r d J e a n. Alençon, impr. de Poulet—Malassis, 1956, 16 p., 70 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 23, 535 (франц.)

5848 К. Основания аналитической геометрии. Смарт (Foundations of analytical geometry. S m a r t W i l l i a m M a r s h a l l. London, Longmans, Green, [1956, ix, 249 pp., ill., 14 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 340, 9 (англ.)

5849 К. Аналитическая геометрия. (Учебник для втузов). Изд. 22-е, стереотип. Привалов И. И., М., Гостехиздат, 1957, 299 стр., илл., 6 р. 90 к.

5850 К. Сборник задач по курсу высшей математики. Вып. 8. Определители, векторная алгебра и аналитическая геометрия в пространстве. Сулейманова Х. Р., Всес. заоч. энерг. ин-т, М., 1956, 103 стр., илл., беспл.

5851 К. Векторный анализ. Учебн. пособие для студ. III курса. Никитин Б. Д., Родионов С. В., Всес. заоч. энерг. ин-т, М., 1957, 72 стр. илл., беспл.

5852 К. Лекции по векторному исчислению. Лагалли (Vorlesungen über Vektorrechnung. 5. Aufl. L a g a l l y M a x. Leipzig. Akad. Verl. Ges., 1956. XX. 462 S., 22.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 45, 3175 (нем.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5853. Применение [3,3]-значного и [6,6]-значного точечных соответствий к обобщению теорем Бурместера. Солнцева Т. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1956, 39, 103—114

Пусть пучки прямых (A), (B), (C) плоскости α проективны соответственно пучкам прямых (A'), (B'), (C') плоскости α' (прямолинейным рядам точек (a), (b) (c) плоскости β), причем общая прямая каждой пары пучков (A), (B), (C) не отвечает общей прямой соответствующей пары пучков (A'), (B'), (C') (общей точке соответствующей пары рядов (a), (b), (c)).

Поставим в соответствие точке M плоскости α точки пересечения тех прямых плоскости α', которые отвечают прямым MA, MB, MC, и точке M' плоскости α' точки пересечения тех прямых плоскости α, которые отвечают прямым $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$. Это [3,3]-значное соответствие между точками плоскостей α и α' обозначим через ω.

Аналогично устанавливается [3,3]-значное соответствие λ между точками плоскости α и прямыми плоскости β.

Если ввести еще два проективных пучка прямых: (D) в α и (D') в α', то, поступая как выше, установим [6,6]-значное соответствие σ между точками плоскостей α и α'. Если плоскости α и β совмещены и ряд (c) не рассматривается, то, сопоставляя точке $P \subset \alpha$ точку $O = CP \times XY \subset 3$, где X и Y — точки рядов (a) и (b), отвечающие прямым AP и BP, получим [1,2]-значное соответствие τ между точками плоскостей α и β.

В статье доказаны теоремы:

1) Геометрическое место точки плоскости α (α'), для которой сливаются в одну три соответствующие в ω точки плоскости α' (α), есть кривая C_3 (C_3') 3-го порядка. C_3 и C_3' соответствуют в ω друг другу.

Аналогичные теоремы, для соответствия λ.

2) Геометрическое место точки плоскости α (α'), для которой сливаются в одну шесть соответствующих в σ точек плоскости α' (α), есть совокупность $\sum (\sum')$ шести точек; $\sum$ и $\sum'$ соответствуют в σ друг другу.

Дано новое доказательство т е о р е м ы К э л и. Совокупность прямых плоскости α, обладающих тем свойством, что три произвольно взятые в α конические сечения, не принадлежащие одному пучку, пересекают каждую из них в трех парах точек, принадлежащих одной инволюции, огибают кривую 3-го класса.

Кривой порядка n соответствует в τ кривая порядка $3n$. Показано, что из 1) и 2) соответственно вытекают теоремы Бурместера: 1′) Если в неподвижной плоскости α' заданы четыре положения α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ подвижной плоскости α, то геометрическое место точки $M \subset \alpha$, четыре положения которой M_i лежат на одной окружности, есть кривая 3-го порядка, а геометрическое место центра этой окружности — другая кривая 3-го порядка. 2′) Если в α' задано пять положений плоскости α, то в α имеются четыре точки, пять положений каждой из которых лежат на одной окружности.

В статье и особенно в перечне иностранной литературы много опечаток. А. С. Смогоржевский

5854. **Об одном геометрическом месте точек в проективном пространстве S_5. Ивницкий Т. Г.,** Уч. зап. Харьковск. гос. пед. ин-та, 1956, 18, 83—86

Даются два варианта синтетического решения задачи: в пятимерном пространстве S_5 даны четыре трехмерных пространства $S_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ общего расположения, т. е. попарно пересекающееся лишь по прямым. Если взять какую-либо точку X в S_5 и построить четыре четырехмерных пространства $S_4^{(i)} = (X, S_3^{(i)})$, то последние вообще пересекаются по прямой, проходящей через точку X. Каково геометрическое место таких точек X, для каждой из которых соответствующие $S_4^{(i)}$ пересекаются по плоскости?

Искомое геометрическое место представляет многообразие, состоящее из ∞^1 попарно непересекающихся плоскостей, пересекаемых ∞^2 непересекающихся попарно лучей, т. е. является аналогом гиперболоида в пространстве S_5. В. Ф. Рогаченко

5855. **К вопросу о наглядности изображений четырехмерного пространства. Арвесен** (Zur Frage der Anschaulichkeit der Bilder aus einem vierdimensionalen Raume. Arvesen Ole Peder), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1955, 28, № 30, 166—170 (нем.)

Для наглядного изображения фигур четырехмерного пространства применяется проектирование из четырехмерного пространства в трехмерное. Пусть x, y, z, u — координаты точки P в R_4 и a, b, c, d — координаты центра проектирования O. Координаты точки P_0 — проекции точки P из центра O в трехмерном пространстве $y_0 = 0$ — задаются уравнениями

$$x_0 = \frac{ay - bx}{y - b}, \quad z_0 = \frac{cy - bz}{y - b}, \quad u_0 = \frac{dy - bu}{y - b}$$

Рассматриваются изображения четырехмерного единичного изотопа, а также четырехмерного симплекса. Изображение на чертеже трехмерного образа дается в аксонометрической проекции.

А. Г. Школьник

5856. **О некоторых вопросах абсолютной тригонометрии. Демаховская Р. И.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 337—344

Даются два улучшенных варианта предложенного Гауссом вывода основных метрических соотношений геометрии поверхности, евклидовой в бесконечно малом и подчиняющейся постулату свободной подвижности. В первом варианте используются обе функции Гаусса, т. е. $f(x)$ — отношение длины окружности радиуса x к 2π и $g(x)$ — предел отношения верхнего основания четырехугольника Саккери с боковой стороной x к нижнему основанию при бесконечном уменьшении последнего, но предполагается лишь однократная, а не двукратная, как у Гаусса, дифференцируемость $g(x)$. Во втором варианте используется только функция $f(x)$, предполагаемая однократно дифференцируемой. Е. Г. Гонин

5857. **О сферических конгруэнциях идеальной области гиперболического пространства. Бухараев Р. Г.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1956, 116, № 5, 3—6

Установлена связь между тензорами основных квадратичных форм обеих полостей огибающей конгруэнции сфер идеальной области гиперболического пространства и поверхности центров этих сфер. Изучены различные соответствия между полостями огибающей, охарактеризованы конгруэнции Рибокура. А. П. Широков

5858 К. **Курс начертательной геометрии. (Для втузов). Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М., Федотов Г. И.,** М., Гостехиздат, 1956, 435 стр., илл., 9 р. 55 к.

5859 К. **Начертательная геометрия. Лекции с метод. указаниями, задачами и контрольн. заданиями для студ. заочн. (втузов, кроме строит.). Пшеничный Н. Н., Марченко Л. И., Репина М. И.,** М., «Сов. наука», 1956, 243 стр., илл., 5 р. 75 к.

5860 К. **Сборник задач по начертательной геометрии. (Учебн. пособие для высш. техн. учеб. завед.). Посвянский А. Д., Рыжов Н. Н.** М., Гостехиздат, 1956, 280 стр., илл., 5 р. 35 к.

5861 К. **Пространственные кривые линии в ортогональных проекциях. Громов М. Я.,** Всес. заоч. политехн. ин-т, М., 1956, 114 стр., илл., беспл.

5862 К. **Аналитическая и проективная геометрия. Цаппа** (Geometria analitica e proietttiva. Zappa Guido. Roma, Ed. Studium, 1956, 358 p., 3000 L.), Bibliogr. ital., 1956, 90, № 666, 436 (итал.)

5863 Д. **Инвариантные элементы коллинеаций семейства. Киотина Г. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. обл. пед. ин-т, М., 1956

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5864. **О тензорном результанте. Гаэта** (Sul risultante tensoriale. Gaeta Federico), Rend. mat. e applic., 1955, 13, № 3—4, 472—494 (итал.)

Дано явное выражение результанта $n+1$ форм $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ произвольных порядков $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$, каждая из которых $(n+1)$-арная. Это выражение представляет собой многочлен, любое слагаемое которого есть произведение нескольких коэффициентов форм f_i и числа ε_j равного 1, или —1, или 0; указано простое правило для разыскания чисел ε_j.

Результат получен с помощью видоизменения классической символики Аронгольда; символы, отвечающие одному и тому же индексу тензора, считаются некоммутативными; это позволяет значительно сократить число вводимых символов.

В конце статьи даются применения к теории формы Кэли алгебраического многообразия (Ходж и Пидо, «Методы алгебраической геометрии», М., Изд-во ин. лит., 1954, т. II, гл. X, § 6) и к развитию результатов работы автора (Ann. mat. pura ed appl., 1948, 27, IV). Г. Б. Гуревич

5865. **Прямые Киркмана и кривые 3-го порядка. Колобов П. Г.,** Уч. зап. Ростовск. н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 45—51

К. А. Андреев (Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 1888, 277—280) доказал теорему: Если около конического сечения описать семиугольник и соединить прямыми каждую вершину со следующей за ней после двух пропущенных, то точки пересечения каждой из этих прямых со следующей в том же круговом порядке

лежат на другом коническом сечении. В конце этой статьи К. А. Андреев предлагает исследовать конфигурацию, состоящую из 360 описанных семиугольников, образованных данными семью касательными. Автор получает некоторые из свойств, полученных при исследовании конфигурации Андреева—Шретера. В 1953 г. (РЖМат, 1954, 3806) автором было доказано существование 420 точек S, которые по 10 расположены на 252 конических сечениях, и каждая точка S принадлежит шести таким коническим сечениям. В конфигурации Андреева содержится 420 прямых Киркмана. В реферируемой заметке доказывается, что на каждом из рассмотренных выше коническом сечении лежат, кроме уже указанных 10 точек S, еще 10 точек пересечения прямых Киркмана. Обозначая буквой h прямые, попарно пересекающие эти конические сечения, автор доказывает: «Существует 504 кривых третьего порядка, на каждой из которых лежит 15 точек попарного пересечения прямых h». М. П. Черняев

5866. **Дальнейшие рассмотрения обобщенного конического сечения. Розина** (Ulteriori osservazioni sulle coniche generalizzate. Rosina B. A.), Ann. Univ. Ferrara, 1952—1953, Sez. VII, 2, 117—127 (итал.)

Изучаются плоские алгебраические кривые порядка $2n$ с двумя простыми точками на бесконечности, имеющие в каждой из них касание n-го порядка с несобственной прямой плоскости и диаметральной кривой, которой является коническое сечение.

Автор показывает, что такими кривыми будут плоские алгебраические кривые с двумя взаимноперпендикулярными главными направлениями, данные бесконечноудаленные точки являются специальными фокусами сопряженных диаметров. Метод, которым он пользуется — общеизвестный метод классической алгебраической геометрии, требующий значительных вычислений, с которыми автор успешно справляется. М. П. Черняев

5867. **Структура точек дирамации кратных поверхностей. Годо** (Structure des points de diramation des surfaces multiples. Godeaux Lucien), Publs scient. Univ. Alger, 1954, A1, № 2, 223—238 (франц.)

В предыдущих работах (Mém. in-8° Acad. roy. Belgique, 1952, 1—80; Bull. Acad. roy. Belgique, 1953, 1009—1019, 1083—1089; 1954, 81—86, 200—208, 355—370; Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, Actualités scient., № 270, Paris, 1935) автор рассмотрел на алгебраической поверхности F циклическую инволюцию и показал как можно построить такую поверхность при условии, что Φ — нормальная поверхность, изображающая эту инволюцию, с изолированными точками дирамации. В точке дирамации поверхность Φ имеет общую кратную точку порядка p с соприкасающимся конусом. Здесь автор рассматривает случай, когда соприкасающийся в точке дирамации с поверхностью Φ конус распадается на четыре плоскости, и другие специальные вопросы. М. П. Черняев

5868. **Конфигурация Милна, Диксона и Мортона в геометрии с характеристикой 3 или 2. Меньё** (Configuration de Milne, Dixon et Morton en géométrie de caractéristique 3 ou 2. Meynieux R.), Publs scient. Univ. Alger, 1954, A1, № 2, 295—302 (франц.)

При установлении результатов первой части работы (РЖМат, 1956, 9036) существенную роль играло предположение, что характеристика p поля K, над которым построено проективное пространство, отлична от 2 и 3. В реферируемой второй части те же результаты распространяются на случаи, когда $p=3$ и $p=2$. Г. Б. Гуревич

5869. **Инвариантность родов комплексных поверхностей. Гуггенхеймер** (L'invariance des genres des surfaces complexes. Guggenheimer H.), Bull. Res. Council Israel, 1955, A5, № 1, 26—27 (франц.; рез. англ.)

Геометрический и арифметический роды определяются для любых комплексных аналитических поверхностей. Доказывается их инвариантность при модификациях. Из резюме автора

5870. **Группы проективных преобразований в проективно связном многообразии. Исихара** (Groups of projective transformations on a projectively connected manifold. Ishihara Shigeru), Japan. J. Math., 1955, 25, 37—80 (англ.)

В гл. 1, следуя Картану (Cartan E., Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris, 1937), автор вводит основные понятия проективной связности. В частности, доказывается, что задание пространства проективной связности M равносильно заданию в дифференцируемом многообразии пары (Π^0, Π), где Π^0 — поле дважды ковариантного тензора Π^0_{ij}, а Π — объект аффинной связности Π^i_{jk}. Отображение пространства M в себя, сохраняющее проективную связность, называется проективным преобразованием. Оно характеризуется тем, что пара (Π^0, Π) переходит в (Π'^0, Π'), где

$$\Pi'^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j,$$

$$\Pi'^0_{jk} = \Pi^0_{jk} + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^k} - \Pi^a_{jk}\varphi_a\right) - \varphi_j\varphi_k$$

при некотором векторном поле φ_i.

В гл. 2 изучаются непрерывные группы проективных преобразований в проективно связных пространствах. Размерность такой группы $\leqslant n^2+2n$. Для транзитивной группы G_r проективных преобразований в непроективно плоском пространстве $r \leqslant n^2$.

В гл. 3 указываются все группы проективных преобразований G_r размерности $r \geqslant n^2+5$. Основные результаты:

1) Если G_r — связная транзитивная группа, то пространство проективно плоское и $r=n^2+2n$, n^2+n или n^2+n-1.

2) Если G_r нетранзитивна и M_p — поверхность транзитивности некоторой точки p, причем $M_p \neq p$, то размерность $M_p = n-1$, $r=n^2+n$ или n^2+n-1 и тензор кривизны обращается в нуль в точке p.

3) Если G_r оставляет на месте точку p, то n^2+n или n^2+n-1 для $n \geqslant 6$ и $r=n^2+n$ для $n=5$. Тензор кривизны уничтожается в точке p.

4) Как следствие, получается, что пространство проективной связности не допускает группу проективных преобразований, для которой $n^2+4 < r < n^2+n-1$, $n^2+n < r < n^2+2n$.

В гл. 4 исследуются проективные преобразования в пространстве аффинной связности A_n без кручения путем превращения его в пространство проективной связности добавлением к объекту аффинной связности Π^i_{jk} тензора

$$\Pi^0_{jk} = -\frac{n}{n^2-1}\Pi_{jk} - \frac{1}{n^2-1}\Pi_{kj},$$

где Π_{jk} — тензор Риччи пространства A_n. Устанавливается, что при $r \geqslant n^2+5$ A_n проективно плоское. Этот результат был ранее с усилением получен

И. П. Егоровым (Докл. АН СССР, 1951, 80, 709—712), согласно которому уже при $r > n^2 - 2n + 5A_n$ будет проективно плоским. Автор показывает, что результат Егорова на все пространства проективной связности не переносится; приводится пример такого пространства с группой проективных преобразований порядка $r = n^2$.

Гл. 5 посвящена квазипроективным преобразованиям в пространстве A_n, т. е. преобразованиям, которые переводят объект аффинной связности L^i_{jk} в

$$\tilde{L}^i_{jk} = L^i_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \psi_j,$$

где φ_i и ψ_i — ковариантные векторные поля. Если группа квазипроективных преобразований в A_n размерности $r \geqslant n^2 + 5$, то A_n квазипроективно плоско (т. е. отображается квазипроективно на плоское A_n). Библ. 54 назв. Г. И. Кручкович

5871. **Дифференциальная топология кремоновых преобразований и риманианов функций многих комплексных переменных. Гуггенхеймер** (Topologia differenziale delle trasformazioni cremoniae e delle riemanniane di funzioni di più variabili complesse. Guggenheimer Heinrich), Convegno internazionale di geometria differenziale, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 222—228 (итал.)

Пусть C ($C^2 = E$) — дифференциальный оператор, определяющий комплексную структуру на многообразии M, d — оператор внешнего дифференцирования, $\bar{d} = CdC$. Тогда $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$, и оператор $D = d\bar{d}$ удовлетворяет условию $DD = 0$. Группы вещественных когомологий, определяемых при помощи D, изоморфны обычным когомологическим группам той же размерности.

Пусть M — риманово псевдомногообразие функции нескольких комплексных переменных (Behnke H., Steink., Math. Ann., 1951, 124, 1—16), N — аналитически вложенное в него псевдомногообразие, $H^p(M, N)$ — группа D-когомологий p-форм на M, тангенциальное значение (Duff. G. F. D., Ann. Math., 1952, 56, (2), 115—127) которых на N равно нулю. Вложения, высечения и граничная операция обычным образом определяют точную последовательность гомоморфизмов

$$\ldots \to H^{p-2}(N) \to H^p(M, N) \to H^p(M) \to H^p(N) \to \ldots$$

Эта последовательность для D-когомологий проще, чем для обычных, так как размерность изменяется сразу на две единицы.

Если M — алгебраическая поверхность, бирационально эквивалентная некоторой другой, N — множество точек, для которых отображение не взаимно однозначно, то имеем две последовательности, одну из 6 членов, другую из 4. Рассмотрение их позволяет найти зависимость между числами Бетти M и ее бирационального образа. Приведены примеры.

А. М. Васильев

5872. **Дополнения к теории базы. Северн** (Complementi alla teoria della base. Severi Francesco), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 1—14 (итал.)

Для двух гиперповерхностей V, W на неприводимом неособенном многообразии M_r устанавливается новый критерий алгебраической эквивалентности ($V \equiv W$, если $VF \equiv WF$, где $|F|$ — общий линейный пучок гиперповерхностей) и некоторые арифметические критерии алгебраической псевдоэквивалентности (V и W называются алгебраически псевдоэквивалентными, если их разность — делитель нуля, т. е. для некоторого целого a, $aV \equiv aW$). Из этих критериев вытекает, что для виртуальных гиперповерхностей на M_r отношения алгебраической, арифметической и топологической зависимости следуют одно из другого; в частности, $2r$ — 2-мерные делители нуля на M_r все алгебраичны. Далее, с помощью этих критериев, решается проблема базы для виртуальных гиперповерхностей на M_r относительно алгебраической эквивалентности; базисное число для алгебраической эквивалентности совпадает с базисным числом для эквивалентности арифметической.

В заключение приводятся некоторые соображения о возможности решения проблемы базы для k-мерных подмногообразий (намечается возможный ход доказательства предположения об алгебраической эквивалентности арифметически эквивалентных чистых многообразий). В. В. Морозов

5873. **Плюрижанры комплексных многообразий. Гуггенхеймер** (Plurigenera of complex manifolds. Guggenheimer H.), Bull. Res. Council Israel, 1955, A5, № 1, 20—22 (англ.)

Плюрижанры определяются (как ранги некоторых групп когомологий) для любых комплексных многообразий. Доказывается их инвариантность при модификациях (относительных аналитических гомеоморфизмах). М. М. Постников

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

5874. **Об одном новом тригонометрическом ряде для радиуса кривизны нормального сечения произвольного азимута, проведенного на земном эллипсоиде на произвольной широте. Лянин Н. М.,** Уч. зап. Ростовск.-н/Д. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 3, 89—94

Выводится ряд для радиуса кривизны R нормального сечения с азимутом α, проведенного на эллипсоиде вращения, в точке с широтой φ:

$$R = \sqrt{\rho p}\left\{1 - \frac{1}{2}\cos^2\varphi \sum_{k=1}^{k=n} e^{2k}\left[\cos 2\alpha + \sin^4\alpha\,(1 - \sin^{2k-2}\varphi)\right]\right\},$$

где e и ρ — эксцентриситет и радиус кривизны меридиана соответственно, p — радиус кривизны параллели, проведенной на широте φ. Отсюда, как частные случаи при $e = 0$ или $k = 1$, получаются формулы Грунерта и Гельмерта. В. Ф. Рогаченко

5875. **Конформная наложимость поверхностей. Ведерников В. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 144—145

Конформная наложимость поверхностей V_m конформного пространства M_n определяется как совпадение внутренних связностей Вейля, индуцированных нормализацией в смысле Нордена (Норден А. П., Пространства аффинной связности, М., 1950). Если две поверхности наложимы в смысле Картана, то каждой нормализации одной соответствует нормализация другой, при которой внутренние связности обеих поверхностей совпадают. А. П. Норден

5876. **О последовательностях Лапласа. Розе** (Sur les suites de Laplace. Rozet O.), Bull. Soc. math. Belgique, 1954 (1955), 7, № 1, 35—45 (франц.)

С помощью последовательностей Лапласа в пространстве трех измерений исследуется конгруэнция прямых с различными фокальными поверхностями. Рассмотрен случай, когда последовательность Лапласа имеет период, равный шести.

В проективном P_3 устанавливается существование и произвол поверхностей, имеющих последовательности Лапласа заданного четного периода.

Г. В. Кирсанова

5877. Об однопараметрическом семействе расслояемых ортогональных пар. Алексеев Н. И., Тр. Моск. авиац. ин-та, 1956, вып, 61, 20—29

Рассматриваются некоторые частные случаи метрической теории расслояемых ортогональных пар, не получившие достаточного освещения в кандидатской диссертации автора. Используется отнесение конфигурации к ортогональному триэдру единичных векторов с вершиной в центре луча L_3 конгруэнции общих перпендикуляров расслояемой пары конгруэнций (L_1) и (L_2) и координатными векторами, направленными по главным направлениям луча L_3 и по самому лучу L_3. Исследуется случай, когда направляющие векторы лучей L_1 и L_2 совпадают с главными направлениями луча L_3 конгруэнции (L_3). Показано, что 1) с нормальной конгруэнцией, зависящей от восьми произвольных постоянных, можно связать, перпендикулярно к ней, однопараметрическое семейство расслояемых пар конгруэнций, параллельных главным направлениям нормальной конгруэнции, расстояние между которыми равно расстоянию между границами нормальной конгруэнции, 2) с конгруэнцией общих перпендикуляров, зависящей от четырех произвольных функций одного аргумента, можно связать однопараметрическое семейство расслояемых пар, симметричных относительно центра конгруэнции общих перпендикуляров и параллельных главным направлениям последней. К. И. Дуничев

5878. Система конгруэнций W с функциональным произволом. Фиников С. П., Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1955, 35, 17—32

Ранее (РЖМат, 1956, 4825) автор обобщил систему Бианки — двупараметрическое семейство конгруэнций W, фокальными поверхностями которых служат два однопараметрических семейства поверхностей, присоединенных к расслояемой паре конгруэнций.

В этой статье автор исследует систему W, обладающую функциональным произволом в две функции одного аргумента для многообразия конгруэнций и в одну функцию одного аргумента для каждого из многообразий фокальных поверхностей.

На фокальных поверхностях системы W асимптотические одного из семейств твердо соответствуют друг другу (соответствие не зависит от выбора конгруэнции). Те же асимптотические принадлежат линейным комплексам. Последнее имело место и у четырехпараметрических систем W с твердым соответствием асимптотических одного семейства. В специальном случае существует пара поверхностей, у которых касательные плоскости содержат центры двух систем плоскостных элементов из фокусов и фокальных плоскостей системы W. Такую пару поверхностей можно назвать расслояемой парой. К. Н. Тихоцкий

5879. Свойство линий Сегре и Дарбу. Пикассо (Una proprietà delle linee di Segre e di Darboux. Picasso Ettore), Rend. Seminar. Fac. sci. Univ. Caglieri, 1956, 26, № 1—2, 79—82 (итал.)

Поверхность $x(u, v)$ трехмерного проективного пространства отнесена к каноническому реперу Фубини $\{x, x_u, x_v, X = x_{uv}/a_{12}\}$, а локальные координаты точки относительно этого репера обозначены $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Доказаны следующие предложения. Характеристики плоскостей $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, взятые вдоль нуль-линий квадратичной формы Фубини $\Pi = \pi_{rs} du^r du^s$, высекают на проективной нормали точки, гармонически делящие x и X. Те же характеристики, взятые вдоль линий, гармонически делящих предыдущие, компланарны. Аналогичная связь имеет место между характеристиками плоскостей $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_0 = 0$ и формой Фубини $P = p_{rs} du^r du^s$. Прямая, соединяющая точки пересечения характеристик плоскостей $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_0 = 0$ с асимптотическими касательными, высекает на прямой $x_u x_v$ точку A, которая совпадает с точкой B пересечения прямой $x_u x_v$ с характеристикой плоскости $\lambda_3 = 0$, если все характеристики взяты вдоль линии Дарбу.

Точки A и B гармонически делят точки x_u и x_v, если характеристики взяты вдоль линий Сегре.

Если точку X заменить другой точкой C пространства, то последние предложения не имеют места, а компланарность характеристик плоскостей $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$ имеет место лишь для линий, вдоль которых прямая xC описывает торс. Р. Н. Щербаков

5880. Классификация точечных преобразований 3-го рода между плоскостями. Вилла (Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3ª specie fra piani. Villa Mario), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 2, 141—149 (итал.)

Между точками двух плоскостей π и $\bar{\pi}$ устанавливается соответствие (преобразование) T заданием проективных координат аналитическими функциями параметров u_1, u_2. Пусть Γ и $\bar{\Gamma}$ — произвольная пара соответственных кривых, проходящих через эти точки. Тогда, как известно, в каждой паре соответствующих точек (A_0, B_0) можно найти ∞^2 касательных гомографий K, каждая из которых переводит любую кривую Γ в кривую $K\Gamma$, касающуюся кривой $\bar{\Gamma}$.

Выбирая на плоскостях реперы $(A_0A_1A_2)$ и $(B_0B_1B_2)$, соответствующие в касательной гомографии, получают

$$dA_i = \omega_{ij}A_j,\ dB_i = \bar{\omega}_{ij}B_j,\ (i, j = 0, 1, 2) \text{ и}$$

$$\omega_{01} = \bar{\omega}_{01},\ \omega_{02} = \bar{\omega}_{02}. \qquad (1)$$

Дифференцируя равенства (1) внешним образом и пользуясь леммой Картана, для $\tau_{ik} = \bar{\omega}_{ik} - \omega_{ik}$ получим

$$\tau_{11} - \tau_{00} = C^1_{12}\omega_1 + C^1_{12}\omega_2,\ \tau_{22} - \tau_{00} = C^2_{22}\omega_2 + C^2_{21}\omega_1,$$
$$\tau_{21} = C^1_{21}\omega_1 + C^1_{22}\omega_2,\ \tau_{21} = C^2_{12}\omega_2 + C^2_{11}\omega_1,$$
$$\omega_i = \omega_{0i}.$$

Полагая $\Omega_k = \sum_{i,j} C^k_{ij}\omega_i\omega_j$, для характеристических направлений соответствия T имеет место уравнение

$$\omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1 = 0.$$

В преобразованиях третьего рода все три характеристические направления в каждой точке совпадают между собой. Тогда при подходящем выборе репера

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0,\ \tau_{21} = 0,\ \tau_{12} = -\omega_1,\ \tau_{22} - \tau_{00} = 0 \text{ и}$$

$$2\tau_{10} + \omega_{21} = \alpha_{30}\omega_1 + \alpha_{21}\omega_2,\ \omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22} = \beta_{30}\omega_1 + \beta_{21}\omega_2,$$
$$\tau_{10} - \omega_{12} = \beta_{21}\omega_1 + 2\alpha_{21}\omega_2,\ \tau_{20} = \alpha_{21}\omega_1.$$

Строя квадратичное преобразование, соприкасающееся с преобразованием T в паре (A_0, B_0), получаем для преобразования прямых $(p, q) \to (p', q')$ в пучках (A_0), (B_0) соответствие

$$p' = (\alpha_{30} - 3\lambda)\,p^3 + 3\alpha_{21}p^2q,$$
$$q' = \left(\beta_{30} + \frac{3}{2}\,\mu\right)p^3 + 3\beta_{21}p^2q + 6\alpha_{21}pq^2. \qquad (2)$$

Основываясь на свойствах соответствия (2), автор различает при этом три типа преобразований T:

1) соответствие (2) имеет индекс (1.2), если результант двух полиномов p'/p и q'/p отличен от нуля. В этом случае $\alpha_{21} \neq 0$;

2) соответствие (2) сводится к проективитету; $\alpha_{21} = 0$, $\beta_{21} \neq 0$;

3) соответствие (2) вырождается; $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$. Всем прямым пучка (A_0) будет соответствовать одна и та же прямая пучка (B_0).

Автор находит для каждого случая разложения в ряды. Эти разложения иным путем были получены Мураккини (Muracchini, Mem. Accad. Sci. Torino, 1953, ser. 3, 1, 25). Н. И. Кованцов

5881. **Кинематические вопросы в проективной геометрии линейчатых поверхностей. Барнер** (Kinematische Fragen in der Projektivgeometrie der Regelflächen. Barner Martin), Monatsh. Math., 1956, 60, № 1, 21—56 (нем.)

Методами проективной кинематики изучаются свойства проективного изгибания (Abwicklung) произвольной линейчатой поверхности, с фиксированными на ней двумя асимптотическими линиями, на линейчатую поверхность, принадлежащую линейному комплексу.

На абсолютной квадрике Q пятимерного проективного пространства R_5 выбираются две кривые $r_1(t)$ и $r_2(t)$ с заданным соответствием их точек. Касательные к этим кривым принадлежат Q и пересекаются на ней в точке $r(t)$. Пять точек $r_1, r_2, r, r', y = r'' - ar$ определяют гиперплоскость E. При этом коэффициент a определяется равенством $-2a\lambda = \langle r'', r'' \rangle$, где $\lambda = \text{const}$, а символ $\langle\ \rangle$ означает оператор, стоящий в левой части уравнения Q. Пусть r_0 — точка, полярно сопряженная с E относительно Q. При изменении t гиперплоскость E перемещается, а каждая точка ее испытывает «кинематическое движение» так, что касательная к ее траектории всегда проходит через точку r_0. Эти пространственные траектории в каждом положении движущейся гиперплоскости определяют на ней две плоские линии $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, которые с исходными кривыми r_1 и r_2 в соответствующих точках имеют касание третьего порядка. Подобным же образом получают кривую $\bar{r}$.

В трехмерном пространстве R_3 линиям r_1 и r_2 соответствуют два торса, а их касательным — плоские пучки прямых, касательных к торсу и имеющих вершины в фокальных точках. Точке r соответствует общий элемент двух пучков. Эта линия описывает некоторую линейчатую поверхность l, на которой ребра возврата торсов являются асимптотическими. Плоским кривым $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ соответствует линейчатая поверхность l, принадлежащая линейному комплексу. Полученная геометрическая конструкция обратима, тем самым произвольная линейчатая поверхность l с заданными на ней двумя асимптотическими инвариантно отображается на однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей $\bar{l}$, принадлежащих линейным комплексам.

Однопараметрическое семейство поверхностей $\bar{l}$ образует конгруэнцию W, фокальные поверхности которой F_1 и F_2 образованы кинематическим движением тех асимптотических линий поверхности $\bar{l}$, которые соответствуют фиксированным асимптотическим линиям поверхности l. Второе семейство асимптотических на поверхностях F_1 и F_2 составляют траектории движения.

Исходная поверхность l является огибающей поверхностей $\bar{l}$ и имеет с поверхностями F_1 и F_2 касание второго порядка. Изгибание сохраняет не только фиксированные асимптотические, но и все асимптотические поверхности l. Исходные асимптотические являются огибающими своих образов на фокальных поверхностях и имеют с ними касание третьего порядка. Н. И. Кованцов

5882 К. **Проективные изгибания в смысле Фубини и их обобщения. Чех** (Deformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni. Cech Eduard. Bari, G. Laterza e F., 1955, 12 p., 500 L.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 68 (итал.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

5883. **Асимптотическое преобразование P-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве. Григорьев И. Н.,** Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. 181, 91—106

Более подробное изложение и доказательства результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1955, 4672). Р. Н. Щербаков

5884. **О порядке наложимости поверхностей с соответствующей на них сопряженной системой. Рыжков В. В.,** Докл. АН СССР, 1956, **110**, № 3, 338—340

Автор отмечает тесную связь между метрическим изгибанием двух поверхностей и отображением этих поверхностей друг на друга с сохранением некоторой сопряженной сети. Доказывается следующее предложение: для того, чтобы две поверхности $\bar{x} = \bar{x}(u^i, v^s)$, $\bar{y} = \bar{y}(u^i, v^s)$ $(i = 1, 2, \ldots, p, s = 1', 2', \ldots, q', p + q' = n)$ в R_N допускали в точечном соответствии, установленном общей системой параметризации (u^i, v^s) класса C^{k+1} и сохраняющем на них сопряженные системы u- и v-подповерхностей, метрическое наложение порядка k, достаточно, чтобы они допускали в том же соответствии наложение первого порядка и чтобы при этом две подповерхности $u^i = u_0^i$ и $v^s = v_0^s$, проходящие через некоторую точку M_0 поверхности $\{\bar{x}\}$, допускали наложение порядка k на соответствующие две подповерхности $\{\bar{y}\}$.

Автор показывает, что поверхности $(n > 2)$, обладающие соприкасающейся плоскостью максимальной размерности, к которым может быть приложено это предложение, могут быть только лишь или поверхностями переноса, или поверхностями с конической сопряженной системой, или поверхностями, обладающими системой кривых, сопряженных $(n-1)$-мерным подповерхностям. Причина этого заключается в том, что лишь на этих поверхностях может существовать сопряженная система p- и q'-мерных подповерхностей $(p + q' = n)$. Н. И. Кованцов

5885. **Об одном обобщении уравнений Киллинга и импримитивных n-тканях. Шуликовский В. И.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 176

Семейство интегральных кривых уравнения

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} du^{i_1} du^{i_2} \ldots du^{i_n} = 0;\ i_k = 1, 2$$

(n-ткань) называется импримитивной по отношению к некоторой одночленной группе непрерывных преобразований, если все ее линии являются системами импримитивности этой группы. Устанавливаются соотношения между вектором бесконечно малого преобразования группы и ковариантной производной тензора ткани. Общие результаты применяются к рассмотрению сетей (2-тканей) и тритканей. Отмечается связь с теорией потенциальных сетей Д. Ф. Егорова. А. П. Норден

5886. **О римановой метрике поверхностей проективного пространства. Тевзадзе Г. Н.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 172

Рассматриваются такие сети на поверхности трехмерного проективного пространства, оси и ребра которых, принятые за нормали первого и второго рода, индуцируют на поверхности пару римановых

геометрий. Дается инвариантный признак таких сетей и рассматриваются примеры. А. П. Норден

5887. Проективная интерпретация конформно евклидовых симметрических пространств. Широков А. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 176

Доказывается, что связность любого конформно-евклидова симметрического пространства Римана может быть осуществлена как внутренняя связность гиперквадрики, которая переходит в себя при некоторой проективной инволюции и нормализована инвариантными прямыми этой инволюции и их полярами (РЖМат, 1957, 3472). А. П. Норден

5888. Исправление к статье «Проективно-евклидовы симметрические пространства». Широков А. П., Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу Н.-и. ин-та матем. при МГУ, 1956, вып. 10, 309—310

Исправленное доказательство одного соотношения, приведенного в статье П. А. Широкова, напечатанной в Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу Н.-и ин-та матем. при МГУ, 1950, вып. 8, 73—81. А. П. Норден

5889. О геометрии m-поверхностей в аффинных и проективных пространствах. Либер А. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 157—158

Предлагаются различные инвариантные по отношению к соответствующей группе преобразований способы оснащения m-поверхностей в n-мерных проективных и аффинных пространствах. А. П. Норден

5890. К теории геометрических объектов. Либер А. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АН СССР, 1956, 158

Резюме доклада на 3-м Всес. матем. съезде. Указывается, что в докладе характеризуются функции компонент геометрических объектов пространства Клейна, определяющие снова геометрический объект данного типа, и определяются так называемые псевдогеометрические объекты и линеары. Указанная характеристика и определения в резюме не приводятся. А. П. Норден

5891. О точечном преобразовании между совпавшими проективными пространствами. Сперанца (Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti. Speranza Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 1, 61—68 (итал.)

Пусть в преобразовании T между двумя проективными пространствами точки A, $\bar{A}$ — соответствующие. К каждой из них присоединим свою проективную систему координат $\{A_k\}$ и $\{\bar{A}_i\}$ и пусть X_k $(k=1, \ldots, r)$ — неоднородные координаты точек относительно первой системы, а $\bar{X}_i$ $(i=2, \ldots, r+1)$ — относительно второй. Тогда преобразование T можно записать в виде $\bar{X}_i = F_i(X_k)$. Разлагая в ряд Маклорена и беря главную часть

$$\bar{X}_i = a^k_{i-1} X_k, \qquad (1)$$

получим проективное соответствие (гомографию) Ω между двумя связками $\sum_{r-1}$ и $\overline{\sum}_{r-1}$ с центрами в точках A и $\bar{A}$, где X, $\bar{X}$ можно считать однородными координатами прямых этих связок.

1. Далее производится канонизация проективной системы координат. Если прямую $S_1 = A\bar{A}$ отнести к первой связке $\sum$, то прямая ΩS_1, соответствующая ей в Ω, в связке $\overline{\sum}$ вместе с S_1 даст двумерную плоскость $\bar{S}_2$; $\bar{S}_2$ отнесем к $\sum$, ей соответствующая $\Omega\bar{S}_2$ и $\bar{S}_2$ имеют общую ΩS_1 и, следовательно, вместе определяют $\bar{S}_3$; $\bar{S}_3$ относится к $\sum$ и т. д. Аналогично в связке $\overline{\sum}$ получаются $S_2, S_3, \ldots, S_k$. В качестве граней $S^{(i)}_{r-1}$ тетраэдра берем гиперплоскости

$$S^{(1)}_{r-1} = \Omega^{-1} S_{r-1},\ S^{(2)}_{r-1} = \{\Omega^{-1} S_{r-2} \bar{A}\},\ S^{(k)}_{r-1} = \{\Omega^{-1} S_{r-1}, \Omega \bar{S}_{k-2}\}$$

$$(2 < k < r);\ S^{(r)}_{r-1} = \{A, \Omega \bar{S}_{r-2}\},\ S^{(r+1)}_{r-1} = \Omega \bar{S}_{r-1}.$$

Полученный тетраэдр в качестве первой системы координат в точке A, а в качестве второй тот же тетраэдр с переименованием вершин $A_1 = A$ и $A_2 = \bar{A}$. Тогда проективные однородные координаты x^i, $\bar{x}^k$ относительно тетраэдра $\{A_k\}$ будут связаны с неоднородными координатами X_k, $\bar{X}_i$ соотношениями $X_k = \frac{x_k}{\bar{x}_{r+1}}$, $\bar{X}_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_1}$. В силу выбора тетраэдра уравнения (1) имеют вид $\bar{X}_{k+1} = a_k X_k$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Чтобы определить единичную точку рассмотрим ∞^r касательных гомографий $\rho\bar{x}_1 = \sum_1^r \lambda_i x_i + x_{r+1}$, $\rho\bar{x}_{k-1} = a_{k-1} x_{k-1}$ $(2 \leqslant k \leqslant r+1)$, среди них существует $r+1$ параболических. Возьмем одну из них и поместим единичную точку в единственную ее двойную точку, тогда $a_k = (-1)^r$ и получаем каноническое уравнение T $\bar{X}_k = (-1)^r X_k + [2]$.

2. В случае, когда Ω — перспективное соответствие, система координат выбирается так: $A_{r+1}(0, 0, \ldots, 1)$ в точке A, $A_1(1, 0, \ldots, 0)$ в точке $\bar{A}$ и остальные A_i в гиперплоскости перспективы S_{r-1}. Тогда уравнения Ω будут:

$$\bar{X}_k = \alpha X_k,\ \bar{X}_{r+1} = a_{r+1} X_1,\ (2 \leqslant k \leqslant r); \qquad (2)$$

∞^r касательных гомографий будут вида

$$\rho\bar{x}_1 = \sum_1^r \lambda_i x_i + x_{r+1};\ \rho\bar{x}_k = \alpha x_k\ (2 \leqslant k \leqslant r);$$
$$\rho\bar{x}_{r+1} = a_{r+1} x_1.$$

На прямой $A\bar{A}$ они наведут ∞^1 гомографий $\rho\bar{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_{r+1}$, $\rho\bar{x}_{r+1} = a_{r+1} x_1$, из них выделяются две параболические $\lambda_1 = \pm 2\sqrt{-a_{r+1}}$. Помещая в единственную двойную точку U_j $(j=1, 2)$ одной из них точку $(1, 0, \ldots, 1)$, будем иметь $a_{r+1} = -1$. Уравнение гиперплоскости перспективы S_{r-1} будет $X_1 = -\alpha$. $(A\bar{A}KU_j) = \mp\alpha$, где $K = A\bar{A} \times S_{r-1}$. Касательные гомографии имеют $(r-2)$-мерное пространство S_{r-2} двойных точек $S_{r-2} \subset S_{r-1}$, уравнения которого $x_1 = -\alpha x_{r+1}$, $\sum_2^r \lambda_i x_i + (\lambda_1 - \alpha) x_{r+1} = 0$. Таким образом уравнения (2) примут вид

$$\bar{X}_k = \alpha X_k + \sum_{ij} a^{ij}_{(k)} X_i X_j + \ldots,$$
$$\bar{X}_{r+1} = -X_1 + \sum_{ij} a^{ij}_{(r+1)} X_i X_j + \ldots \qquad (3)$$

где записаны лишь члены до 3-го порядка.

Прямая связки $\sum$ будет называться характеристической, если ей в преобразовании (3) соответствует кривая, имеющая точку A точкой распрямления

(соприкасающаяся плоскость неопределенна). Пусть через точку A проходит по крайней мере r характеристических прямых различных между собой и от $A\bar{A}$. Возьмем их из ребра $A_{r+1}A_i$ $(2 \leqslant i \leqslant r)$ и за прямую $x_1 = \ldots = x_r$. Тогда $a^{kk}_{(h)} = b^k_h a_k$ $(2 \leqslant k, \quad h \leqslant r+1)$ и $\sum a^{ij}_{(2)} = \ldots = \sum a^{ij}_{(r)} = -\alpha \sum a^{ij}_{(r+1)}$ и уравнения (3) принимают вид

$$\bar{X}_k = \alpha X_k + b_k X_1^2 + a_k X_k^2 + \sum_{(ij)} a^{ij}_{(k)} X_i X_j + \ldots$$

$$\bar{X}_{r+1} = -X_1 + b_{r+1} X_1^2 + \sum_{(ij)} a^{ij}_{(r+1)} X_i X_j + \ldots$$

где $i \neq j$.

Рассмотрен пример, когда $r = 3$ и T — проективное преобразование. М. В. Васильева

5892. **Канонические уравнения и симплектическая геометрия. Сурьо** (Equations canoniques et géométrie symplectique. Souriau Jean-Marie), Publs scient. Univ. Alger, 1954, A1, № 2, 239—265 (франц.)

Автор называет симплектическим такое векторное пространство $2n$ измерений, в котором скалярное произведение задано кососимметричной билинейной формой полного ранга. Подпространство n измерений симплектического пространства он называет изотропным насыщенным, если оно содержит n независимых векторов, попарно сопряженных относительно основной формы.

Автор получает модель симплектического пространства, сопоставляя вектору этого пространства пару векторов n-мерного линейного пространства, из которых один ковариантный, а другой контравариантный, и определяя скалярное произведение следующим образом:

$$AB = \underset{1\ 2}{a_i b^i} - \underset{2\ 1}{a^i b_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пользуясь этой интерпретацией, автор излагает основные результаты теории уравнений в частных производных первого порядка и вариационного исчисления в терминах симплектической геометрии.

А. П. Норден

5893. **Употребление форм в вариационном исчислении. Аусленде р** (The use of forms in variational calculation. Auslander Louis), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 853—859 (англ.)

Автор рассматривает однопараметрическое семейство отображений сегмента $I = [0, 1]$ в n-мерное C^∞ многообразие M^n, которое будем обозначать через $f(\xi_1, \xi_2)$, где ξ_2 взято как параметр на сегменте I, а ξ_1 параметризует семейство отображений и определяет отображение η топологического произведения отрезков $I \times I \to M^n$ посредством уравнения

$$\eta(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1 \xi_2).$$

Пусть η_* обозначает индуцированное посредством η отображение касательного пространства к $I \times I$ в касательное пространство к M^n. Пусть η^* означает дуальное отображение, индуцированное на дуальных касательных пространствах (cotangent spaces). Тогда определяются два векторных поля X_1 и X_2 над $\eta(I \times I)$ посредством

$$X_1 = \eta_* (\partial/\partial\xi_1) \text{ и } X_2 = \eta_* \partial/\partial\xi_2).$$

Для любой формы w в M^n можно написать

$$\eta^*(w) = w_\xi d\xi_1 + w_\delta d\xi_2.$$

После вывода нескольких формул для форм относительно w_δ и w_δ автор применяет свой метод к вычислению первой вариации интеграла

$$I = \int_a^b F(q_1, \ldots, q_n; q_1', \ldots, q_n'; t)\, dt$$

в $(2n+1)$-мерном пространстве M. В дуальном касательном пространстве к многообразию M определяется форма

$$w = \sum \frac{\partial F}{\partial q_i'}\, dq_i - \left(\sum q_i' \frac{\partial F}{\partial q_i'} - F \right) dt. \qquad (1)$$

Этот метод приводит к уравнению Эйлера. Следующее приложение имеет место в финслеровом пространстве для вычисления первой и второй вариации вдоль геодезической в терминах дифференциальных инвариантов финслеровой метрики. Су Бу-цин

5894. **Замечание о применении форм в вариационном исчислении. Аусленде р** (Remark on the use of forms in variational calculations. Auslander Louis), Pacif. J. Math., 1956, 6, № 2, 209—210 (англ.)

Уточняется смысл введения формы w (реф. 5893) посредством теоремы: существует только одна форма ω, которая вдоль всякой кривой порождает формы пространства $(q_1, \ldots, q_n, t)$. М. К. Керимов

5895. **Приводимость полных римановых многообразий в евклидовом пространстве. Лемуан** (Réductibilité de variétés riemanniennes complètes dans l'espace euclidien. Lemoine Simone), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 20, 1962—1964 (франц.)

По определению V_{n-1} приводимо, если его группа голономии Ψ_x оставляет инвариантным подпространство векторов, касающееся V_{n-1} в x (Борель и Лихнерович). Доказываются две теоремы: I (локальная), если риманово многообразие V_{n-1}, погруженное в евклидово R_n, локально приводимо, его метрика раскладывается на сумму одной неприводимой метрики и метрики локально евклидовой. II (в целом). В евклидовом пространстве R_n всякое связное, класса C^4, $(n-1)$-мерное многообразие, приводимое и полное для индуцированной метрики, есть произведение связного, неприводимого и полного $(p-1)$-мерного многообразия, погруженного в евклидово пространство p измерений на $n-p$ прямых. К. М. Белов

5896. **О непроективно евклидовых пространствах A_n без кручения с максимальной группой. Вр э н ч а н у** (Auspra spaţiilor neproiectiv euclidiene A_n, fără torsiune, cu grup maxim. Vrănceanu G.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1954, № 4—5, 87—100 (рум.; рез. русск., франц.)

Максимальный порядок групп движений непроективно евклидовых пространств равен точно $n^2 - 2n + 5$ (Vrănceanu G., C. r. Acad. sci., 1949, 229, 543; Егоров И. П., Докл. АН СССР, 1951, 80, № 5, 711). Пространство A_n, определенное коэффициентами связности

$$\Gamma'_{22} = x^3, \ \Gamma^i_{jk} = 0 \quad (i \neq 1, \ j \neq 2, \ k \neq 2), \qquad (1)$$

обладает группой движений G_r порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Показывается, что всякое непроективно евклидово пространство, обладающее группой движений максимального порядка, подобно пространству (1).

И. П. Егоров

5897. **Проективные преобразования римановых пространств. Солодовников А. С.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 4, 45—116

Изучается вопрос о проективных преобразованиях риманова пространства V_4, т. е. о таких преобразова-

ниях V_4 в себя, при которых геодезические линии переходят снова в геодезические. Определяются все пространства, допускающие проективную группу, более широкую, чем группа движений, и для каждого из них — полная проективная группа, в предположении $n \geqslant 3$ и положительно определенной метрики V_4. Рассмотрения носят локальный характер (по отношению к пространству и к группе). В первой части работы с необходимыми дополнениями излагаются результаты Фубини (Mem. Accad. Torino, 1903, 53, (2), 261—313), разобравшего случай $n=3$ и давшего метод для определения одной части таких пространств в n-мерном случае. Исследования Фубини основаны на теоремах Леви—Чивита о метриках с общими геодезическими. В реферируемой работе решение поставленной задачи доводится до конца. Именно: находятся и изучаются исключительные пространства, выпавшие из рассмотрения Фубини как особые случаи. Они характеризуются постоянством кривизны метрики, присоединенной к метрике Леви—Чивита.

Определяются так называемые пространства $V(K)$, пространства с метрикой

$$ds^2 = ds_0^2 + \sum_{\alpha=1}^{m} a^\alpha ds_\alpha^2,$$

присоединенная метрика которых имеет постоянную кривизну K. (Здесь ds_0^2, ds_α^2 — самостоятельные неодномерные метрики, зависящие каждая от своих переменных, a^α — положительные функции переменных из ds_0^2). Исключительные пространства являются пространствами $V(K)$. Замечание, что от умножения метрики постоянной кривизны K на постоянное число $C>0$, кривизна становится равной K/C, позволяет задачу об отыскании всех $V(K)$ свести к отысканию $V(0)$, $V(1)$ и $V(-1)$. Эта задача полностью решается. Таким образом, совокупность всех пространств V_n ($n \geqslant 3$), допускающих группы проективных преобразований более широкие, чем группа движений, можно разделить на пространства основного типа (Фубини), пространства $V(K)$ (пространства, допускающие неаффинные проективные преобразования) и пространства с метрикой $ds^2 = \sum_1^p ds_\alpha^2$ ($p \geqslant 1$), являющиеся прямым произведением неприводимых и неодномерных ds_α^2, из которых ни одно не является $V(0)$ и по крайней мере одно, например ds_1^2, допускает представление в виде $ds_1^2 = e^{Cx} d\sigma^2$, где коэффициенты метрики $d\sigma^2$ от x уже не зависят. Эти пространства допускают только аффинные проективные преобразования, причем вся аффинная группа состоит из преобразований, действующих отдельно в каждом ds_i^2. (Аффинными преобразованиями называются преобразования, не меняющие связности.) Библ. 10 назв. К. М. Белов

5898. Финслерово-римановы системы. Фриман (Finsler-Riemann systems. Freeman J. G.), Quart. J. Math., 1956, 7, № 26, 100—109 (англ.)

В римановом пространстве S_ν размерности $\nu = 2n-1$ задается семейство поверхностей S_n, зависящее от $n-1$ параметра t^a:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^i, t^a), \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, 2n-1;$$
$$i, j = 1, \ldots, n; \quad a, b = n+1, \ldots, 2n-1.$$

Траектории $x^i = \text{const}$ называются траекториями деформации поверхностей S_n. В каждом S_n берется $n-1$ параметрическое семейство линий $x^i = x^i(\mu, \lambda^a, t^b)$, так чтобы эти уравнения можно было разрешить относительно $\mu, \lambda^1, \ldots, \lambda^{n-1}$. Пусть u^i — вектор, касательный к траектории семейства в данной точке S_n, тогда отношение $u^i/u^n = \frac{\partial x^i}{\partial \mu} \Big/ \frac{\partial x^n}{\partial \mu}$ является функцией от μ, λ^a, t^b, т. е. от x^i, t^b. Отсюда определяются функции $t^b = t^b(x^i, u^j)$, однородные по u нулевого порядка. Эти функции вносятся в выражение метрического тензора g_{ij} на S_n. Следовательно, при фиксированных значениях t^a $ds^2 = g_{ij}(x, u)\, dx^i dx^j$, т. е. является финслеровой метрикой. Указанная конструкция в S_ν называется финслерово-римановой системой.

Устанавливается, что ковариантное дифференцирование в такой системе задается формулами, аналогичными формулам финслеровой геометрии. В частности, для контравариантного вектора X^i

$$DX^i = dX^i + \Gamma^i_{jk} X^j dx^k + C^i_{jk} X^j du^k,$$

где Γ^i_{jk} и C^i_{jk} — однородные функции по u нулевого и (-1)-го порядка соответственно. Сами величины Γ^i_{jk}, C^i_{jk} определяются через $\partial t^a/\partial x^i$, $\partial t^a/\partial u^i$ и символы Кристоффеля в S_ν. В отличие от финслеровой геометрии не всегда соблюдаются равенства $g_{ij} = (1/2)\,\partial^2 L/\partial u^i \partial u^j$, где $L = g_{ij}(x, u)\, u^i u^j$. Если эти соотношения выполняются, то финслерово-риманова система называется нормальной. Доказывается, что для любой функции $F(x, u)$, однородной по u 2-порядка, существует нормальная финслерово-риманова система, для которой $g_{ij} = (1/2)\,\partial^2 F/\partial u^i \partial u^j$. Г. И. Кручкович

5899. Инвариантные признаки пространств V_3 с группой движения G_4. Кручкович Г. И., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 129—136

Выясняются инвариантные признаки трехмерных римановых пространств V_3 с полной четырехчленной группой движений G_4. Эти пространства были получены автором в классификации V_3 по группам движения (РЖМат, 1955, 3395; 1956, 1642).

1. Для того чтобы V_3, имеющее ортогональный репер главных направлений Риччи, допускало группу движений G_4, необходимо и достаточно, чтобы: а) характеристические корни тензора Риччи R_{ij} были постоянными и $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$; б) коэффициенты вращения репера главных направлений удовлетворяли условиям; $\gamma_{321} + \gamma_{312} = 0$, $\gamma_{311} = \gamma_{322} = \gamma_{313} = \gamma_{323} = 0$, т. е. простому корню отвечала геодезическая конгруэнция путей движения пространства V_3; или (см. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., Изд-во ин. лит., 1949, 291) простому корню отвечала геодезическая конгруэнция, а любые две ортогональные конгруэнции, отвечающие кратному корню, были каноническими относительно первой и либо геодезическими, либо такими, что их главные нормали в каждой точке ортогональны первой конгруэнции.

2. Пространство V_3, не имеющее ортогонального репера главных направлений, тогда и только тогда допускает полную группу движений G_4, если выполняется одно из следующих двух условий:

$$R_{ij} = Kf_{,i}f_{,j}\left(f_{,ij} = Lf_{,i}f_{,j},\ f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\right),$$

$$R_{ij} + \rho g_{ij} = e_1 \mu_i \mu_j \quad (\rho \neq 0,\ \mu_{i,j} + \mu_{j,i} = 0,\ e_1 = \pm 1),$$

где ρ, K, L — постоянные и $K \neq 0$, вектор μ_i коллинеарен некоторому градиенту. И. П. Егоров

5900. Новое в геометрии обобщенных пространств. Су Бу-цин (一般空間幾何學的新發展. 蘇步青), 數學進達, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 4, 615—637 (кит.)

Статья представляет суммарное изложение работ автора за последние пять лет. Под обобщенными пространствами он подразумевает так называемые про-

странства k-протяженностей, т. е. совокупности таких многообразий измерения k в N-мерном пространстве, что одно и только одно многообразие, проходит через любые $k+1$ точек. Частными случаями (при $k=1$) являются пространства Финслера, пространства путей и пространства аффинной связности.

§ 1 посвящен проблеме Киллинга и производным Ли. Доказана теорема: Для того чтобы при отображении f пространства k-протяженностей в себя дескриптивные производные любого геометрического объема были перестановочны с производными Ли, необходимо и достаточно, чтобы f представляло собой обобщенное проективное преобразование.

В § 2 обобщаются аксиомы плоскости Картана на пространства k-протяженностей. Если аксиомы плоскости имеют место, то пространство k-протяженностей необходимо проективно плоское.

§ 3 посвящен кратным интегралам в пространстве с мерой n-мерного объема, аффинной и эквиаффинной геометриям в таком пространстве. Введена для многообразий k-измерения ($1 \leqslant k < N$) в пространстве S_N мера, введена аффинная связность в S_N. Рассматриваются первая и вторая вариации кратного интеграла.

В § 4 рассматривается теория минимальных поверхностей в пространстве Картана и в расслоенном пространстве Финслера. Доказано, что если при малом преобразовании минимальная гиперповерхность переходит в минимальную гиперповерхность, то производящие функции, осуществляющие данное преобразование, удовлетворяют обобщенным уравнениям Якоби, в которые, кроме кривизны и кручения, входят и инварианты Кошмидера и другие новые инварианты.

Чень Чин-и

5901. Новое в геометрии обобщенных пространств. Су Бу-цин (一般空間幾何學的新發展. 蘇步青), 科學通報, Кэсюэ тунбао, 1955, № 8, 29—32 (кит.)

Краткое изложение содержания предыдущей статьи (реф. 5900).

Чэн Чин-и

5902. Интерпретация теории Тири через конформную метрику. Эннекен (Interprétation de la théorie de Y. Thiry dans une métrique conforme. Hennequin Françoise), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 25, 2378—2380 (франц.)

Предлагается новая физическая интерпретация пятимерной теории Тири, основанной на метрике $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4$), допускающей группу изометрии в целом. В таком V_5 траектории заряженных частиц совпадают с геодезическими, для которых $\gamma_{00}\frac{dx^0}{d\sigma} + \gamma_{0i}\frac{dx^i}{d\sigma} = C$ (при $C = ai$, где a — вещественная постоянная, получим случай электрона), а многообразия V_4 с метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ ($i, j = 1, \ldots, 4$), где $g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{i0}\gamma_{j0}}{\gamma_{00}}$, будут инварианты относительно группы.

В V_4, отвечающем пространству — времени, автором была рассмотрена аппроксимация

$$g_{AB} = -\delta_A^B\left(1 + \frac{2u}{c^2} - \frac{2\alpha_{00}}{c^2}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right),\ g_{44} = c^2 - 2u - 2\alpha_{00} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\ (A, B = 1, 2, 3),$$

где $\alpha_{00} = {}^1/_3 u + {}^1/_6 Q$ и u — ньютонов потенциал, а $\Delta Q = 4\pi(\mu^2/\rho)$. В реферируемой статье рассматриваются $\overset{*}{V}_4$ конформные к V_4: $\overset{*}{g}_{ij} = \xi g_{ij}$, где ξ^3 можно интерпретировать как диэлектрик. Записывая в V_5 уравнения поля $S_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta}$, где $S_{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна, а $\theta_{\alpha\beta}$ — обобщение тензора энергии-импульса, автор определяет тензор Эйнштейна $\overset{*}{S}_{ij}$ для подпространства $\overset{*}{V}_4$ и экстремали этого многообразия и показывает, что $\overset{*}{V}_4$ можно рассматривать как проекции семейства изотермических многообразий V_5.

А. З. Петров

5903. Стационарное пространство-время в общей теории относительности. Бохнер (Stationary space-time in general relativity. Bochner S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 7, 485—490 (англ.)

Рассматриваются такие V_4, которые всюду имеют стационарный линейный элемент $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ локально регулярный, гиперболического типа. V_4 может быть представлено как топологическое произведение V_3 и R ($-\infty < t < \infty$), где V_3 имеет положительно определенную метрику, а R определяется соотношением $\Delta\xi = -\xi R + \frac{1}{4}\xi^3 H^2$, где ξ — скалярная функция, $\Delta\xi = g^{ij}\xi_{,ij}$, R — некоторый скаляр, $H^2 = H_{ij}H^{ij} \geqslant 0$, H_{ij} — некоторый кососимметрический тензор (РЖФиз, 1956, 9524).

V_4 называется пустым, если $H = \xi = 0$, и полупустым, если только $H = 0$. Предполагается, что ξ и V_3 класса C^2, g_{ij} — класса C^1, R и H — класса C^0. Доказывается теорема: Пусть V_3 компактно; если предположить, что $-\int_{V_3}\xi dv \geqslant 0$, то V_4 полупустое или, как уточнение, если $-R \geqslant 0$, то $R = 0$. Для некомпактных V_3 к этой теореме можно придти, пользуясь леммой: если функция $\xi(P)$ класса C^2, в окрестности V, удовлетворяет неравенству $\Delta\xi \geqslant 0$ и если есть в V такая точка P^0, что в $V\xi(P) \leqslant \xi(P^0)$, то всюду в $V\xi(P) = \xi(P^0)$.

Далее вводится предположение, что над V_3 задана группа $\Gamma(\gamma_n)$ одно-однозначных непрерывных преобразований (может быть с неподвижными точками), обладающих тем свойством, что в V_3 существует такое компактное множество S^0, отвечающее P^0, что преобразованная точка $\gamma_0 P^0$ находится на S^0. По определению, скаляр (или тензорная плотность) $f(P)$ называется «почти периодической» (почти автоморфной) относительно Γ, если каждый бесконечный ряд элементов $\{\gamma_n\}$ в Γ содержит бесконечные подпоследовательности $\{\gamma_{n_p}\}$, $p = 1, 2, \ldots$, обладающие свойством: для каждой точки P найдется координатная окрестность, в которой ряд функций $f(\gamma_{n_p}P)$ стремится равномерно к $\overset{*}{f}(P)$, и, обратно, $\overset{*}{f}(\gamma_{n_p}^{-1}P)$ стремится равномерно к $f(P)$. При указанном предположении, доказывается теорема: Если функции g_{ij}; g^{ij}; ξ; $\xi_{,i}$; $\xi_{,i,j}$; R; H_{ij} будут почти периодическими относительно Γ и $R \leqslant 0$, то V_4 пустое. В частности (теорема 3) если V_3 есть E_3 и функции g_{ij}, g^{ij}, $\partial_k g_{ij}$, $\partial_{kl}g_{ij}$, ξ, $\partial_k\xi$, $\partial_{kl}\xi$, R, H_{ij} — почти периодические в смысле Бора (Bohr H., Math. Ann., 1926, 96, 383—409) и $R \leqslant 0$, то V_4 — пустое пространство; если же вместо условия $R \leqslant 0$ предположить, что $-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^3}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\xi R dx^1 dx^2 dx^3 \equiv -M(\xi R) \geqslant 0$, то V_3 полупустое. Кроме того, доказывается, что если $M_\gamma\left\{\int_{V_0}\Delta\xi dv\right\} = 0$, то предположение $M_\gamma\left\{\int_{V_0}\xi R dv\right\} \leqslant 0$ означает, что V_4 полупустое.

А. З. Петров

5904. Новая форма уравнений поля общей теории относительности. Эйнштейн, Кауфман (A new form of the general relativistic field equations. Einstein A., Kaufman B.), Ann. Math., 1955, 62, № 1, 128—138 (англ.)

По мнению авторов, основной характеристикой общей теории относительности является то, что она избегает введения инерциальных систем, которые, вообще, устанавливают связь между векторами в двух точках, находящихся на конечном расстоянии, и вводит вместо этого идею перенесения Леви-Чивита при помощи Γ^l_{ik}, которое в инвариантной форме определяет связь между тензорами в бесконечно близких точках. Поле $\Gamma^l_{ik}(x)$, таким образом, позволяет ввести понятие кривизны пространства (R_{ijkl}) и тензор Риччи R_{ij}.

Для вывода уравнения поля можно использовать вариационный принцип. Для этого необходимо предположить существование инвариантного пространственного интеграла или, иными словами, плотности Q. Самый простой путь для получения такой плотности заключается в введении, кроме поля Γ-перемещения, поля контравариантного тензора $\mathfrak{g}^{kl}$. Тогда этим полям отвечает плотность $Q \equiv \mathfrak{g}^{kl}R_{kl}$, которая выбирается как составная часть пространственного интеграла; кроме того, необходимо предположить, что поля $\mathfrak{g}$ и Γ должны рассматриваться при варьировании как независимые. Такое построение теории возникает из попыток построения общей теории поля, обобщающей теорию гравитации, для которой характерна симметрия Γ^l_{ik}, $\mathfrak{g}^{ik}$, по индексам ik. Для реализации этого плана авторы полагают $\Gamma^l_{ik} \equiv \overset{*}{\Gamma}{}^l_{ik} + \delta^l_i \Lambda_k$ и тем самым вводят четыре переменных Λ_k, которые в окончательных уравнениях поля необходимо исключить. Уравнения поля имеют вид

$$-\mathfrak{g}^{ik},_s - \mathfrak{g}^{tk}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{ts} - \mathfrak{g}^{it}\overset{*}{\Gamma}{}^k_{st} + \delta^k_s(\mathfrak{g}^{it},_t + \mathfrak{g}^{mt}\overset{*}{\Gamma}{}^i_{mt}) = 0,\ \overset{*}{\Gamma}{}^k = 0$$

$$R_{\underline{ik}}\left(\overset{*}{\Gamma}\right) = 0,\quad R_{ik},_l\left(\overset{*}{\Gamma}\right) + R_{kl},_i\left(\overset{*}{\Gamma}\right) + R_{li},_k\left(\overset{*}{\Gamma}\right) = 0.$$

Этот обходный путь вызван тем, что необходимо получить уравнения, инвариантные при перенесении, а исследуемая функция не обладает этим свойством. Ставится вопрос об отыскании функции, которая была бы инвариантной при перенесении, что позволило бы избежать введения Λ_k. Доказывается, что такая функция Q существует, она может быть выражена при помощи «псевдотензора» U^l_{ik}, который связан с Γ^l_{ik} соотношением $U^l_{ik} = \Gamma^l_{ik} - \Gamma^t_{it}\delta^l_k$, откуда следует $\Gamma^l_{ik} = U^l_{ik} - \frac{1}{3}U^t_{it}\delta^l_k$, $R_{ik} = U^s_{ik,\,s} - U^t_{it}U^s_{tk} + \frac{1}{3}U^t_{it}U^s_{sk}$, $Q = \mathfrak{g}^{tk}R_{ik}$. Доказывается, что уравнения поля, исходя из вариационного принципа $\delta\int Qd\tau = 0$, могут быть записаны в виде $K^{ik}_s = 0$, $R_{ik} = 0$, где $K^{ik}_s = -\mathfrak{g}^{ik},_s - \mathfrak{g}^{tk}\left(U^i_{s} - \frac{1}{3}\delta^i_s U^m_{im}\right) - \mathfrak{g}^{it}\left(U^k_{st} - \frac{1}{3}\delta^k_s U^m_{mt}\right)$. Рассматривается вариация при бесконечно малых преобразованиях. В приложении выводится формула преобразования U^l_{ik} при преобразовании координат и бесконечно малых преобразованиях. А. З. Петров

5905. Обобщенные римановы пространства и общая теория относительности. II. Эйзенхарт (Generalized Riemann spaces and general relativity. II. Eisenhart Luther P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 6, 463—466 (англ.)

Продолжение работы автора под тем же названием (РЖМат, 1955, 6087). Рассматривая n-мерные многообразия аффинной связности Γ^h_{ij} и несимметрический тензор g_{ij}, определенный условиями (α): $g_{ij,k} = g_{hj}\Gamma^h_{ik} + g_{ih}\Gamma^h_{kj}$ (запятая означает частную производную), в первой части автор ввел тензор кривизны Γ^h_{ijk} такого пространства, тензор Эйнштейна Γ_{ij}, тензор Риччи R_{ij}, выражающиеся через g_{ij}, и т. д. В реферируемой работе автор исследует вопрос о совместности основной системы (α). Уравнения $g_{ij,k} = g_{hj}\left\{{h \atop ik}\right\} + g_{ni}\left\{{h \atop jn}\right\}$ дают тождества, если $\left\{{h \atop ij}\right\}$ — символы Кристофеля второго рода для g_{ij}. Полагая $\Gamma^h_{ik} = a^h_{ik} + \left\{{h \atop ik}\right\}$, можно показать, что a^h_{ik} — тензор и притом может быть выражен через кососимметрическую часть связности: $a^h_{ij} = g^{\underline{hm}}\left(g_{\underset{\vee}{j}}\Gamma^l_{\underset{\vee}{im}} + g_{\underset{\vee}{li}}\Gamma^l_{\underset{\vee}{jm}}\right)$. Устанавливаются зависимости между обобщенным символом Кристофеля $\Delta_{\underset{\vee}{ikj}} = (1/2)(g_{\underset{\vee}{ij}};_k + g_{\underset{\vee}{jn}};_i + g_{\underset{\vee}{ki}},_j)$ (; — ковариантная производная относительно $g_{\underset{\vee}{ij}}$) и $\Gamma_{\underset{\vee}{ijk}}$ и между обобщенным тензором кривизны и $\Gamma^h_{\underset{\vee}{jk}}$: $g_{hj}\Gamma^h_{\underset{\vee}{ikl}} + g_{ih}\Gamma^h_{\underset{\vee}{jkl}} - 2g_{ih} \times (\Gamma^h_{\underset{\vee}{jk/l}} - \Gamma^h_{\underset{\vee}{jl,k}}) = 0$, где $\Gamma^h_{\underset{\vee}{jk/l}} = \Gamma^h_{\underset{\vee}{jk},l} + \Gamma^r_{\underset{\vee}{jk}}\Gamma^h_{\underset{\vee}{rl}} - \Gamma^h_{\underset{\vee}{jr}}\Gamma^r_{\underset{\vee}{kl}}$, т. е. представляет из себя ковариантную производную $\Gamma^h_{\underset{\vee}{jk}}$ относительно связности без кручения $\Gamma^h_{\underset{\vee}{ij}}$. Отсюда, свертывая, определяется тензор Эйнштейна в виде

$$\Gamma_{jk} = g_{hj}g^{il}\Gamma^h_{\underset{\vee}{ilk}} + 2\Gamma^h_{\underset{\vee}{jk'h}}$$

А. З. Петров

5906. О решениях уравнений поля общей теорией относительности с электромагнитным полем. Такено (On solutions of field equations in general relativity with an electromagnetic field. Takeno Hyôitirô), Tensor, 1955, 5, № 2, 71—76 (англ.)

Ставится вопрос об отыскании решений уравнений $G_{ij} = -8\pi E_{ij}$ в некоторой области пространства — времени при наличии электромагнитного поля. Здесь G_{ij} — тензор Риччи, E_{ij} — тензор электромагнитной энергии, определяемый тензором F_{ij} электромагнитного поля ($E^i_j = \frac{1}{4}\delta^i_j F_{ab}F^{ab} - F^{ia}F_{aj}$; $a, b, i, j = 1, \ldots, 4$), который в области удовлетворяет обобщенным уравнениям Максвелла: $F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0$, $F^{ia},_a = 0$. Предварительно даказываются леммы: 1) необходимое и достаточное условие для $E_{ij} = 0$ выражается $F_{ij} = \pm\tilde{F}_{ij}$, где $\tilde{F}_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijab}F^{ab}$, а ε_{ijkl} — дискриминантный тензор пространства ($\varepsilon_{1234} = \sqrt{g}$), 2) если метрике g_{ij} отвечают два тензора электромагнитной энергии E_{ij} и $\bar{E}_{ij}$, равные между собой, то общий вид $\bar{F}_{ij}$ выражается формулой: $\bar{F}_{ij} = pF_{ij} + q\tilde{F}_{ij}$, где p и q — некоторые скаляры, связанные между собой условием $p^2 - q^2 = 1$, 3) если, кроме того, $F_{ab}F^{ab} = \bar{F}_{ab}\bar{F}^{ab} = 0$, то p и q — постоянные. Отсюда, как следствие, получается, что если заданы метрика пространства (g_{ij}) с сигнатурой $(---+)$ и некоторый тензор F_{ij}, удовлетворяющий уравнениям поля, то общий вид тензора электромагнитного поля определяется уравнением $\bar{F}_{ij} = \alpha F_{ij} + \beta\overset{*}{F}_{ij}$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $F_{ij} \neq 0$ и $\overset{*}{F}_{ij} = i\tilde{F}_{ij}$; скаляры α и β при условиях леммы 3) будут постоянными. Отсюда следуют результаты, полученные ранее Папапетру (Papapetrou A., Proc. Roy. Irish Acad., 1947, 51, 191—204), Боннором (РЖФиз, 1956, 105) и др. для случая электростатического или магнитостатического поля. А. З. Петров

5907. Случай симметрического сферического и статического электрогравитационного поля в неголономной унитарной теории. Теодореску (Cazul cîmpului electrogravitațional simetric sferic și static în teoria unitară neolonomă. Teodorescu Ion), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser științ. natur., 1956, № 9, 9—24 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор изучает вопрос о выводе коэффициентов g_{ij} метрики физического пространства V_4 и компонент электромагнитного поля, рассматривая гравитационные уравнения и электромагнитные уравнения неголономной унитарной теории как единую систему уравнений.

Для решения задачи рассматривается частный случай симметрического, сферического и статического электрогравитационного поля, порожденного частицей массы m_0 и электрического заряда e_0, и показывается, что неголономная теория приводит к электростатическому полю классического вида с точкообразным представлением заряда частицы. Получается пространство V_5^4 с метрикой Рейсснера $ds^2 = -c^2dr^2/g_4 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + g_4dt^2$, где $g_4 = c^2(1 - 2r_3/r)$, r_3 — гравитационная энергия, или с более общей метрикой Хёнл-Папапетру $ds^2 = -dr^2/f_4 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + f_4c^2dt^2$, где $f_4 = 1 - \alpha/r + \varkappa e_0^2/8\pi r^2$, $\alpha = \varkappa m_0c^2/4\pi$.

В последнем случае, а также в случае V_5^4 со второй метрикой Рейсснера или с метрикой конформной теории взаимности, получающиеся при добавочных предположениях, неголономная унитарная теория дает результаты, аналогичные результатам нелинейной электродинамики Борна—Инфельда. В. С. Люкшин

5908. О пространстве новой единой теории Эйнштейна. Пастори (Sullo spazio della recente teoria unitaria di Einstein. Pastori Maria), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 107—113 (итал.)

Из того, что единая теория Эйнштейна основывается на пространствах аффинной связности Γ_{jk}^i с кручением, с присоединенным тензором второй валентности g_{ik}, удовлетворяющим основному уравнению $g_{ik;\,j} = g_{ik,\,j} - g_{sk}\Gamma_{ij}^s - g_{is}\Gamma_{ik}^s$ $(i, j, \ldots = 1, \ldots, 4)$, где g_{ij} не связывается условиями симметрии или косой симметрии, можно видеть, что в таком пространстве, которому посвящен ряд работ (РЖМат, 1955, 1466, 1467, 1942 и т. д.), ковариантная производная поляризуется в смысле появления двух типов дифференцирований. Автор ставит вопрос о двух типах параллельных переносов, отвечающих поляризованной ковариантной производной. Формально эти два типа производных отличаются тем, с каким нижним индексом коэффициента связности Γ_{jk}^i производится свертывание при написании ковариантной производной. Так, для векторов, если обозначать запятой частные производные, а точкой с запятой — ковариантные, индекс дифференцирования со свертыванием с первым индексом снабдить знаком плюс, а со вторым знаком минус, то можно записать

$$A^i_{\overset{+}{;}k} = A^i_{,k} + A^j\Gamma^i_{jk}, \quad A^i_{\underset{-}{;}k} = A^i_{,k} - A^j\Gamma^i_{kj}.$$

При параллельном перенесении получим две возможности, описываемые соответственно условиями $DA^i_{\overset{+}{;}k} \equiv A^i_{\overset{+}{;}k}\,dx^k = 0$; $DA^i_{\underset{-}{;}k} \equiv A^i_{\underset{-}{;}k}\,dx^k = 0$. Аналогичная картина будет иметь место в случае ковариантных векторов. Автор указывает некоторые проблемы, возникающие в связи с этим, не исследуя их. В случае тензоров более высокой валентности теория может быть продолжена. Так, для ковариантного тензора второй валентности получается формула $T_{ik;\,r}^{\overset{+}{\underset{-}{}}} = T_{ik,\,r} - T_{jk}\Gamma_{ir}^j - T_{ij}\Gamma_{rk}^j$, а если имеем диаду $(T_{ij} = A_iB_j)$, то $T_{ik;\,r}^{\overset{+}{\underset{-}{}}} = A_{i;\,r}^{\overset{+}{}}B_k + A_iB_{k;\,r}^{\underset{-}{}}$. Отсюда получаются формулы дифференцирования тензора, свернутого с основным тензором g_{jk}, и дифференцирования скаляра.

А. З. Петров

5909. Одна новая интерпретация принципа потенциального действия. Сторки (Su una nuova interpretazione del principio dell'azione potenziale. Storchi Edoardo), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 2, 161—165 (итал.)

Если T — кинетическая энергия, U — потенциальная, E — полная, t — время и λ — произвольный параметр, то, в случае консервативной системы, имеет место вариационный принцип $\delta_a[E^{\lambda-1}dt^\lambda] = 0$, который характеризуется стационарным действием $A = \int_{t_0}^{t}[(2-\lambda)T + \lambda U]\,dt$ (Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat e natur., 1955, ser VIII, 14, f. 6). При $\lambda = 0$ это дает принцип Гельдера, при $\lambda = 1$ — принцип Гамильтона, а при $\lambda = 2$ приходим к потенциальному действию $A = 2\int_{t_0}^{t} U\,dt$.

В случае, когда на материальную частицу P действуют консервативные силы $U(P) = L(P) + U(P_0)$, получим для полной энергии выражение $Edt^2 = (T - U)\,dt^2 = \left\{\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx}\right)^2\right] - U(x_1, x_2, x_3)\right\}dt^2 = -\frac{1}{2}m\left\{\left[\frac{2U_0}{m} + \frac{2L}{m}\right]dt^2 - \sum_1^3 dx_i^2\right\}$, где x_i — ортогональные декартовы координаты, что приводит к линейному элементу риманова пространства

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2L}{m}\right)dt^2 - dl^2,$$

где $c = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$ можно рассматривать как скорость света. Риманово пространство будет эйнштейновым, статического типа.

Если, как обычно, обозначить через q_i $(i = 1, \ldots, n)$ лагранжевы координаты системы, то $U = U(q_1, \ldots, q_n)$, $Tdt^2 = {}^1/_2\sum_1^n g_{nk}q_kq_k$ и, аналогично, придем к n-мерному пространству с метрикой

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - \sum_1^n g_{nk}dq_ndq_k,$$

отвечающему принципу потенциального действия. Это дает, для рассматриваемого случая, соответствие между принципом относительности и принципом действия.

А. З. Петров

5910. Закон инерции в единой теории поля. Главатый (The law of inertia in the unified field theory. Hlavatý Václav), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 153—167 (англ.)

Закон инерции в единой теории Эйнштейна с несимметрическим основным тензором $g_{\lambda\mu}$ сводится к утвер-

ждению, что свободная движущаяся частица в унифицированном поле $g_{\lambda\mu}$ описывает геодезические линии, определяемые связностью $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Предполагая, что $g_{\lambda\mu} = {}^0h_{\lambda\mu} + \varepsilon' g_{\lambda\mu} + \varepsilon^2 g_{\lambda\mu}$, где ${}^0h_{\lambda\mu} = {}^0h_{\mu\lambda}$ определяет метрику Минковского, а $\varepsilon < 1$ — достаточно малое положительное число, автор рассматривает первую и вторую аппроксимации, которые получаются, если отбрасывать соответственно члены с ε^2 и ε^3. Ставится вопрос, что дает закон инерции единого поля в первой и второй аппроксимациях. Записывая при соответствующей параметризации закон инерции в виде $\frac{d^2x^\nu}{dp^2} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{dx^\lambda}{dp}\frac{dx^\mu}{dp} = 0$, автор доказывает, что в первой аппроксимации в некоторой точке первые три уравнения этой системы приводятся к форме классического ньютонова закона гравитации, а последнее выполняется тождественно. Вторая аппроксимация приводит к выводу, что закон инерции в точке приводится к форме второго закона Ньютона, описывающего чисто гравитационную теорию, отвечающую симметрическому тензору $h_{\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=\!=} g_{(\lambda\mu)} = h^0_{\lambda\mu} + \varepsilon h'_{\lambda\mu}$ с заданным электромагнитным полем $M_{\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=\!=} -\frac{\sqrt{|\mathfrak{g}|}}{2} e_{\lambda\mu\alpha\beta} k^{\alpha\beta}$, где $\mathfrak{g} = |g_{\alpha\beta}|$, $e_{\lambda\mu\alpha\beta}$ — кососимметрическая тензорная плотность с компонентами, равными в любой системе координат ± 1 или 0 и $k_{\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=\!=} g_{[\lambda\mu]}$. Вектор силы, отвечающий этому закону во второй аппроксимации, есть вектор электромагнитной силы

$$F \overset{\text{def}}{=\!=} \nabla_\lambda \left(M^\nu_\alpha M^{\alpha\lambda} + \frac{1}{4} h^{\lambda\nu} M^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right).$$

А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

5911. Характеристические классы алгебраического косого произведения. I. Уошницер (The characteristic classes of an algebraic fiber bundle. I. Washnitzer G.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, 42, № 7, 433—436 (англ.)

Первая часть работы, целью которой является чисто алгебраико-геометрическое определение характеристических классов (Chern, S. S., Ann. Math., 1946, 47, 85—121, а также РЖМат, 1954, 3647) алгебраического косого произведения B с векторным пространством в качестве слоя. База косого произведения предполагается неприводимым (полным) алгебраическим многообразием V_n (относительно фиксированного алгебраически замкнутого поля Ω), не имеющим кратных точек и допускающим бирегулярное вложение в проективное пространство.

Автор рассматривает произведение $\hat{B}$, дуальное к B (с той же базой и дуальным слоем), затем соответствующее $\hat{B}$ произведение $\hat{\hat{B}}$, слоем которого является проективное пространство, и строит над $\hat{B}$ пучок линий $\theta(B)$ специального вида (базисный пучок), с базой $\hat{B}$ и одномерным слоем. Пусть θ_B — класс дивизоров $\hat{B}$, соответствующий $\theta(B)$ (см., например, РЖМат, 1954, 3274). Рассматриваются классы $(\theta_B)^{k-1+s}$ ($s = 0, 1, \ldots, n$), являющиеся степенями θ_B в кольце рациональной эквивалентности $\hat{B}$. Используя проекцию косого произведения, автор получает систему $Y_{n-s}(B)$ классов на V_n (классы Сегре). Классы Чженя $X_{n-s}(B)$ индуктивно определяются из условий $X_n(B) = Y_n(B)$ и $\sum_{j=0}^{s} (-1)^j X_{n-j}(B) \bigcirc Y_{n-s+j}(B) = 0 (s = 1, \ldots, n)$, где $\bigcirc$ обозначает операцию умножения классов.

И. З. Розенкноп

5912. Дифференциальная геометрия и теория алгебраических многообразий. Ходж (Differential geometry and the theory of algebraic varieties. Hodge W. V. D.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 13—20 (англ.)

Цель этого обзорного доклада — показать, каким образом теория пучков (faisceaux, stacks) на комплексных многообразиях позволяет решать задачи алгебраической геометрии и дифференциальной геометрии в целом. Пучок F на комплексном многообразии M есть множество элементов с заданным их отображением p на M, обладающее следующими свойствами: 1) если $z \in M$, $p^{-1}(z) = F_z$ есть C-модуль (C — поле комплексных чисел); 2) в F задана топология, такая, что: а) если $\xi \in F$, $C\xi$ — непрерывная функция от ξ, б) если $\xi, \eta \in F$ и $\xi + \eta$ определено, то $\xi + \eta$ есть непрерывная функция от ξ и η; в) F обладает локальными секущими поверхностями, образы которых покрывают M. Важнейший пример — пучок $v : v_z$ есть кольцо элементов (ростков, germs) ξ функций на M, аналитических в z. v состоит из пар (z, ξ), с естественной топологией. Обобщение — пучок v^q систем q элементов аналитических функций в каждой точке. Пучок называется аналитическим, если F_z есть v_z-модуль. Подпучок пучка v^q называется когерентным, если каждая точка z имеет окрестность E и конечное число r систем q функций $u^i = (u^i_1, \ldots, u^i_q)$, аналитических в E, такие, что для любой точки $z' \in E$, $F_{z'}$ порождается образами u^i в z^i.

Пучки можно брать в качестве локальных коэффициентов для групп гомологий на M. Если M — многообразие без особенностей в комплексном аффинном пространстве, и F когерентный пучок, то: 1) на M существует множество элементов $H^0(M, F)$, т. е. сечений F, образы которых в каждой точке z порождают F_z; 2) $H^p(M, F) = 0$ при $p \geqslant 1$. Эти результаты можно применить к любым (неособым) алгебраическим многообразиям. Важнейшие приложения основаны на том, что пучок $A^{p,q}$ элементов внешних форм типа (p, q) есть когерентный аналитический пучок. Пусть $C^{p,q}$ — подпучок элементов d''-замкнутых форм. Точная последовательность гомоморфизмов

$$0 \to C^{p,q} \to A^{p,q} \to C^{p,q+1}$$

порождает точную последовательность групп гомологий

$$\to H^s(M, C^{p,q}) \to H^s(M, A^{p,q}) \to H^s(M, C^{p,q+1}) \to$$
$$\to H^{s+1}(M, C^{p,q}),$$

что дает

$$H^s(M, C^{p,q}) = H^{s+1}(M, C^{p,q-1}) = \ldots$$
$$\ldots = H^{s+q}(M, C^{p,0}) \quad (s > 0).$$

При этом, как доказано автором, $H^s(M, C^{p,q})$ изоморфна пространству гармонических форм типа (p, q). Приводится еще ряд примеров доказательства методом пучков известных ранее результатов из алгебраической и дифференциальной геометрии. А. М. Васильев

5913. Теорема об однородных комплексных пространствах. Мацусима (Un théorème sur les

espaces homogènes complexes. Matsushima Yozô), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 13, 785—787 (франц.)

Пусть $V_{2n} = G/H$ — однородное комплексное многообразие, G связна, H компактна и линейная связная группа изотропии неприводима. V_{2n} будет симметрическим в смысле Картана эрмитовым пространством, если выполнено одно из условий: 1) G компактна, 2) второй класс Чженя пространства V_{2n} $C_2 \neq 0$.

А. М. Васильев

5914. Пространства со связностью в целом. X. Новый взгляд на отношение между «Эрлангенской программой» и линейными связностями. Такасу (Connection spaces in the large. X. A new view on the relation between the «Erlanger programm» and the linear connections. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1954, 2, № 1, 81—94 (англ.)

Связь между пространствами Клейна и пространствами линейной связности рассматривается с точки зрения геодезических фигур второго рода, введенных автором ранее, которые целиком лежат в рассматриваемом дифференцируемом многообразии и в вопросах пересечения и соединения ведут себя, как обычные прямые линии (РЖМат, 1957, 1765). Ю. Е. Пензов

5915. О связностях Картана и их кручениях. Такидзава (On Cartan connexions and their torsions. Takizawa Seizi), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, A. 29, № 3, 199—217 (англ.)

В тензорной форме изучается структура картановой связности в главном расслоенном пространстве. Вводится основная тензорная форма присоединенной структуры, которая используется затем в описании связности Картана. Подробно изучается форма кручения этой связности. К. М. Белов

5916. Об одной точной последовательности и о модификациях келеровых четырехмерных многообразий. Гуггенхеймер (Sopra una successione esatta e sulle modificazioni delle varietà kähleriane di dimensione quattro. Guggenheimer Heinrich), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 2, 153—160 (итал.)

В пространстве внешних форм на келеровом многообразии $\bar{V}$ операция внешнего дифференцирования однозначно разлагается на две инвариантных дифференциальных операции $d = d' + d''$. Это дало возможность Ходжу (Hodge W. V. D., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, 47 (3), 504—517) определить для V группы когомологий трех видов. Автор, используя аналогичное разложение двойственного оператора δ, добавляет к ним еще два вида:

$$H^p = \{\varphi^p / d'\varphi = \delta''\varphi = 0\} / \{\varphi^p / \varphi = d'\delta''\varphi\},$$

$$\overline{H}^p = \{\varphi^p / d''\varphi = \delta'\varphi = 0\} / \{\varphi^p / \varphi = d''\delta'\varphi\},$$

где φ^p — пространство внешних форм порядка p. Все пять видов групп изоморфны друг другу при каждом p, ранг их есть соответствующее число Бетти пространства V. По аналогии с пространством гармонических форм, каждая группа однозначно разлагается на «чистые» компоненты, причем компоненты одного типа во всех пяти группах изоморфны. Ранги этих компонент p_{ik} — числовые инварианты келерова многообразия.

Если задано аналитическое подмногообразие W, можно по обычным правилам ввести относительные когомологии и точные последовательности гомоморфизмов групп всех пяти видов. При этом чистые компоненты отображаются также в чистые.

Келеровой модификацией V в W называется преобразование V в келерово многообразие V' той же размерности, причем преобразование взаимно однозначно и голоморфно в $V \setminus W$ и отображает окрестность W в окрестность W', где $W' = V' \setminus$ (образ $V \setminus W$). Используя изоморфизм относительных когомологий пар (V, W) и (V', W') и соответствующие точные последовательности чистых компонент рассмотренных выше групп, автор находит пять видов линейных зависимостей между $p_{ik}(V)$, $p_{ik}(W)$, $p_{ik}(V')$, $p_{ik}(W')$. Подробно рассмотрены эти соотношения при $\dim V = 4$. Следствием их является равенство геометрических жанров V и V', а также W и W'. При $\dim W' = 3$ модификация является дилатацией.

При $\dim W' = 2$, $\dim W$ отлична от нуля. При $\dim W' = 2$, $\dim W = 1$ модификация не является дилатацией. А. М. Васильев

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

5917. Частично разностные системы. Хьюз (Partial difference sets. Hughes D. R.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 3, 650—674 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — подгруппа группы коллинеаций проективной плоскости π, содержащей $n+1$ точек на каждой прямой; $\pi(\mathfrak{G})$ — множество элементов (точек и прямых) $x \in \pi$, для которых $g(x) = x$ при любом $g \in \mathfrak{G}$. Точки (прямые), не принадлежащие $\pi(\mathfrak{G})$ и не инцидентные с прямой (точкой) из $\pi(\mathfrak{G})$, «обычные». Плоскость π частично транзитивна, если существует группа $\mathfrak{G}$, для любых двух обычных точек x и y которой существует единственный элемент $g \in \mathfrak{G}$ и $g(x) = y$. В этом случае, $\pi(\mathfrak{G})$ предоставляются такие возможности: $\pi(\mathfrak{G})$ пусто; 1а) $\pi(\mathfrak{G})$ состоит из одной точки Q_0 и одной прямой k_0, причем $Q_0 \in k_0$; 1б) то же, что и в 1а), но $Q_0 \notin k_0$; 2) $\pi(\mathfrak{G})$ содержит две точки Q_0 и Q_1 и две прямые k_0 и k_1, причем $k_0 \cap k_1 = Q_0$, $Q_0 Q_1 = k_0$; 3) $\pi(\mathfrak{G})$ состоит из точек Q_0, Q_1, Q_2 и прямых $k_0 = Q_1Q_2$, $k_1 = Q_0Q_2$, $k_2 = Q_0Q_1$; $4m$) $\pi(\mathfrak{G})$ состоит из точек Q_0, Q_1, ..., Q_m и прямых k_0, k_1 ..., k_m, причем $Q_0 \notin k_0$, а при $i \neq 0$ $Q_i = k_0 \cap k_i$ и $Q_0 \in k_i$; $5m$) $\pi(\mathfrak{G})$ состоит из точек Q_0, Q_1, ..., Q_m и прямых k_0, k_1, ..., k_m, причем $Q_i \in k_0$ и $Q_0 \in k_i$; $6m$) $\pi(\mathfrak{G})$ является невырожденной проективной плоскостью, содержащей $m^2 + m + 1$ точек (нумеруется числами $0, 1, \ldots m^2 + m$).

Случай (0) исследован Бруком (РЖМат, 1956, 4070). Пусть теперь зафиксированы обычные точка P и прямая p. Положим $R_i = p \cap k_i$ и $l_i = PQ_i$. Пусть

$$D = \{d : d \in \mathfrak{G},\ d(P) \in p\},$$

$$\mathfrak{R}_i = \{g : g \in \mathfrak{G},\ g(R_i) = R_i\},$$

$$\mathfrak{L}_i = \{g : g \in \mathfrak{G},\ g(l_i) = l_i\}.$$

Тогда порядок группы $\mathfrak{R}_i$ равен порядку группы $\mathfrak{L}_i$ для каждого i, а порядки групп $\mathfrak{R}_i$ при $i \neq 0$ совпадают между собой.

Случай	Порядок группы $\mathfrak{G}$	Порядок группы $\mathfrak{R}_0$	Порядок группы $\mathfrak{R}_i$, $i \neq 0$	Число элементов в D	Связь между m и n
1а	n^2	n			
1б	n^2-1	$n-1$			
2	n^2-n	n	$n-1$	$n-1$	
3	$(n-1)^2$	$n-1$	$n-1$	$n-2$	
$4m$	$(n-1)(n-m+1)$	$n-1$	$n-m+1$	$n-m$	$n=(m-1)^2$ при $m \neq 3$
$5m$	$n(n-m)$	n	$n-m$	$n-m$	$n=m^2$
$6m$	$(n-m)(n-m^2)$	$n-m^2$	$n-m^2$	$n-m^2-m$	$n=m^4$

Чтобы сформулировать основные результаты вышем ряд свойств: (a). Если $g\in\mathfrak{G}$, $g\notin\mathfrak{L}_i$ для всех i, то $g=d_1d_2^{-1}$ для однозначно определенной пары d_1, $d_2\in D$; если $g\in\mathfrak{L}_i$ для некоторого i, $g\neq 1$, то равенство $g=d_1d_2^{-1}$ не имеет места ни для каких d_1, $d_2\in D$.

(b). Если $g\in\mathfrak{G}$, $g\notin\mathfrak{R}_i$ для всех i, то $g=d_1^{-1}d_2$ для однозначно определенной пары d_1, $d_2\in D$; если $g\in\mathfrak{R}^i$ для некоторого i, $g\neq 1$, то равенство $g=d_1^{-1}d_2$ не имеет места ни для каких d_1, $d_2\in D$.

(c). $\mathfrak{R}_i\cap\mathfrak{R}_j=\mathfrak{L}_i\cap\mathfrak{L}_j=1$, если $i\neq j$.

(d). Если смежный класс $q_i\mathfrak{R}_i$ не представляется в форме $d\mathfrak{R}_i$, где $d\in D$, то $q_i\mathfrak{R}_i=\mathfrak{L}_iq_i$; все левые смежные классы $d\mathfrak{R}_i$, где $d\in D$, различны.

Пусть $\{I=1, 2, \ldots, m\}$.

(e). Для каждого $i\in I$ и для каждого $j\in I\setminus i$ существуют такие элементы $g_{ij}\in\mathfrak{G}$, что всякий левый смежный класс по $\mathfrak{R}_i$ представляется в точности в одной из следующих форм: $d\mathfrak{R}_i$, где $d\in D$, или $g_{ji}\mathfrak{R}_i$. При этом $g_{ji}\mathfrak{R}_i=\mathfrak{L}_ig_{ji}$.

(e'). Всякий левый смежный класс по $\mathfrak{R}_0$, кроме самого $\mathfrak{R}_0$, однозначно представляется в форме $d\mathfrak{R}_0$, где $d\in D$.

(e''). Всякий левый смежный класс по $\mathfrak{R}_0$ однозначно представляется в форме $d\mathfrak{R}_0$, где $d\in D$.

(f). Если i, $j\in I$, $i\neq j$, то или $\mathfrak{R}_ia\cap\mathfrak{R}_0$ содержит в точности один элемент или же $g_{ki}\mathfrak{R}_ia=g_{kj}\mathfrak{R}_j$ для однозначно определенного k.

Для того чтобы группа $\mathfrak{G}$ была группой некоторой частичной транзитивной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она содержала подмножество D и подгруппы $\mathfrak{R}_i$ и $\mathfrak{L}_i$, подчиняющиеся следующим требованиям:

1. Число элементов в $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{R}_i$, $\mathfrak{L}_i$ и D совпадает с указанным в одной из строк приведенной выше таблицы (число, указанное в последнем столбце, является следствием остальных).

2. Имеют место свойства (a)—(c).

3. Имеют место: (d) в случаях (1a), (1б), (2) и (3), (e), (e') и (f) в случае ($4m$); (e), (e'') и (f) в случае ($5m$); некоторые аналоги свойств (e) и (f) в случае ($6m$). Точная формулировка этих аналогов довольно сложна и автором не приводится. Содержание их можно понять, заметив, что в случаях ($4m$) и ($5m$) в качестве g_{ij} берется коллинеация, переводящая l_i в Q_iR_j.

Существуют как дезарговы, так и не дезарговы примеры конечных частично транзитивных плоскостей для случаев (1a), (2), (3), ($4m$) и ($5m$). Для случая (1б) известны лишь примеры дезарговых плоскостей. Примерами плоскостей для случая ($6m$) автор не располагает. Если такие плоскости существуют, то они не могут быть дезарговыми. Л. А. Скорняков

5918. Финитно-формалистическое построение проективной геометрии. Маннаури (Finitistisch-formalistische opbouw der projektieve meetkunde. Mannoury G.), Nieuw arch. wiskunde, 1955, 3, № 3, 143—147 (голл.)

Рассматриваются символы трех видов A, B, ... (точки), a, b, ... (прямые), α, β, ... (плоскости) и конечные последовательности этих символов, которые могут содержать также скобки. Последовательности могут быть преобразованы при помощи следующих аксиом:

1) $AB=d$; $Ad=a$; 3) $ad=A$; 4) $\alpha\beta=d$; 5) $AB=BA$; 6) $Ad=dA$; 7) $ad=da$; 8) $\alpha\beta=\beta\alpha$; 9) $(AB)C=A(BC)$; 10) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$; 11) $AA=A$; 12) $a\alpha=\alpha$; 13) $L\mu L=L$ (точнее $xL\mu=xL$, $XI\mu L=XL$); 14) $\mu L\mu=\mu$; 15) $lml=l$. Утверждается (без более подробного обоснования), что получаемые таким путем равенства между последовательностями могут быть истолкованы как теоремы трехмерной проективной геометрии. Г. К. Энгелис

5919. Произвольные выпуклые политопы как сечения и проекции кубов, симплексов и единичных политопов высшей размерности. Науман (Beliebige konvexe Polytope als Schnitte und Projektionen höherdimensionaler Würfel, Simplizes und Maßpolytope. Naumann Herbert), Math. Z., 1956, 65, № 1, 91—103 (нем.)

Доказывается, что выпуклый политоп в пространстве R_n с m крайними опорами и p вершинами может быть задан уравнениями в точечных или в плоскостных координатах:

$$\max_{i-1}^{n}\left|a_i+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|=1 \text{ или}$$

$$\max_{i=1}^{p}\left|b_i+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}u_k\right|=1, \qquad (1)$$

а политоп с центром, имеющий $2m$ крайних опор и $2p$ вершин уравнениями

$$\max_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|=1 \text{ или } \max_{i=1}^{p}\left|\sum_{k=1}^{n}b_{ik}u_k\right|=1. \qquad (2)$$

Если при этом выполнены условия «ортогональности»:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ik}a_{il}=\begin{cases}c \text{ при } k=l\\ 0 \text{ при } k\neq l\end{cases} \text{ или } \sum_{i=1}^{n}b_{ik}b_{il}=$$

$$=\begin{cases}c' \text{ при } k=l\\ 0 \text{ при } k\neq l,\end{cases} \qquad (3)$$

то политоп с центром в первом случае может быть рассматриваем как центральное сечение m-мерного куба посредством n-мерного линейного пространства, а во втором случае как ортогональная проекция p-мерного единичного политопа (Maßpolytop) в n-мерное линейное пространство.

Главным политопом автор называет политоп, который наряду с каждой точкой $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ содержит и точки $(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$ и $(-a_1, a_2, \ldots a_n)$. Примеры: правильный политоп с $4k$ вершинами (кроме тетраэдра), кубооктаэдр, ромбододекаэдр. Коэффициенты главного политопа удовлетворяют условиям (3), и потому для него возможно указанное представление.

В общем случае произвольный выпуклый политоп с m крайними опорами и p вершинами можно рассматривать как сечение $(2^n(n+1)\ m)$-мерного куба и как проекцию $(2^n(n+1)\ p)$-мерного единичного политопа.

Всякий выпуклый политоп может быть представлен также как сечение правильного симплекса высшего числа измерений и как параллельная проекция правильного симплекса; если политоп с центром, то сечение — через центр тяжести, а проекция — ортогональная.

Так, главный политоп с $2m$ крайними опорами и $2p$ вершинами можно рассматривать как сечение через центр тяжести $(2m-1)$-мерного правильного симплекса и как ортогональную проекцию $(2p-1)$-мерного правильного симплекса. А. Г. Школьник

5920. О неинцидентных гранях некоторых политопов. Улчар (О неинцидентним странама неких политопа. Улчар Јоже), Годишне. зб. филоз. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1955, 8, № 1, 25 с. (серб.; рез. нем.)

Ставится задача определения множества M, состоящего из наибольшего возможного числа попарно неинцидентных граней n-мерного политопа; для случая симплекса эту задачу решил Курепа (Kurepa G., C. r. Acad. sci., 1953, 237, 1133—1135), результаты которого здесь содержатся. Пусть элементами комплекса K_n являются выпуклые политопы размерностей 0, 1, 2, ..., n; через $n_{i,\,i+1}$ обозначено наименьшее число $(i+1)$-мерных граней, инцидентных с одной i-мерной гранью, через $n_{i+1,\,i}$ — наибольшее число i-мерных граней, инцидентных с одной $(i+1)$-мерной гранью; далее предполагается, что для каждого i существует по крайней мере одна i-мерная грань, инцидентная более чем с $n_{i,\,i+1}$ $(i+1)$-мерными гранями или по крайней мере одна $(i+1)$-мерная грань, инцидентная менее чем с $n_{i+1,\,i}$ i-мерными гранями. В таком случае $n_{i,\,i+1} \geqslant n_{i+1,\,i}$ $(i \leqslant \nu)$ и $n_{i,\,i+1} \leqslant n_{i+1,\,i}$ $(\mu \leqslant i \leqslant n-1)$ и множество M может содержать лишь грани размерностей от $(\nu+1)$-й до μ-й.

Дальше рассматриваются только правильные политопы. В этом случае множество M (которое определяется в некоторых случаях однозначно, а в других — двузначно) состоит из всех граней политопа определенной размерности m; значение m определяется требованием, чтобы число всех граней политопа любой другой размерности m_1 не было больше m. Такое число m определяется однозначно для всех правильных политопов евклидовых пространств R_{6k+1} и R_{6k+3} и двузначно — для всех правильных политопов пространства R_{6k+2}; в других случаях это число определяется однозначно для одних политопов и двузначно — для других. В работе для всех правильных политопов указаны размерности m и число граней, входящих в множество M. И. М. Яглом

5921. **Характеризация квадрики линейного (трехмерного) пространства над конечным телом.** Панелла (Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito. Panella Gianfranco), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 4, 507—513 (итал.)

Рассмотрение проводится в трехмерном линейном пространстве $\mathfrak{P}$ над конечным телом характеристики $p \neq 2$ и порядка $q = p^h$; в таком пространстве $q^3 + q^2 + q + 1$ точек и столько же плоскостей; через каждую точку проходят $q^2 + q + 1$ прямых; каждая прямая содержит $q+1$ точек и каждая плоскость $q^2 + q + 1$ прямых. Множество точек пространства $\mathfrak{P}$ называется множеством Q, если выполнены следующие условия: а) в Q существует точка P (центр) такая, что проходящие через нее прямые имеют с Q еще одну и только одну общую точку; б) делается исключение из а) для прямых, проходящих через P и принадлежащих некоторой плоскости, называемой касательной плоскостью к Q в точке P; в) если три точки множества Q принадлежат одной прямой, то вся прямая принадлежит Q. Дальнейшее рассмотрение освобождает определение множества Q от понятия центра: любая точка множества Q обладает свойствами центра. Множество Q называется нелинейчатым, если оно не содержит трех точек, принадлежащих одной прямой; в противном случае множество Q называется линейчатым.

Касательная плоскость к нелинейчатому множеству Q имеет с ним только одну общую точку. Плоскость, имеющая с нелинейчатым множеством Q две общие точки, имеет с ним $q+1$ общих точек (из которых никакие три не лежат на одной прямой — овал, по терминологии Б. Сегре (РЖМат, 1956, 9094)). Обратно, если плоскость, имеющая с некоторым множеством точек из $\mathfrak{P}$ две общих точки, пересекает его по овалу, то это множество есть нелинейчатое множество Q. Доказывается, что нелинейчатое множество Q является квадрикой с эллиптическими точками и наоборот. Нелинейчатая квадрика содержит q^2+1 точек. Чтобы q^2+1 точек пространства $\mathfrak{P}$ составляли нелинейчатую квадрику, необходимо и достаточно, чтобы никакие три из них не принадлежали одной прямой.

Линейчатое множество Q содержит $(q+1)^2$ точек и $2(q+1)$ прямых. Оно может быть трех типов: собственно линейчатым, совпадающим с (неспециализированной) линейчатой квадрикой, специализированным и вырожденным; специализированное множество Q содержится в конусе; вырожденное множество Q — в квадрике, распадающейся на две различные плоскости. А. Г. Школьник

5922. **Специальное подмногообразие линейного комплекса плоскостей в S_n (n — четное) и вытекающее отсюда свойство некоторых многообразий.** Стейн (The special primal of a linear plane complex in S_n (n even) and a resulting property of certain determinantal manifolds. Stein E.), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 3, 542—549 (англ.)

Пусть дан общий линейный комплекс плоскостей $K_2^{(n)}$. Прямая проективного пространства называется специальной, если всякая плоскость, проходящая через нее, принадлежит $K_2^{(n)}$. Если $n = 2k$, то специальные прямые заполняют многообразие V_{2k-1}^{k-1} ($2k-1$ — его размерность, а $k-1$ — порядок). Каждая точка из V_{2k-1}^{k-1} является вершиной плоского пучка специальных прямых.

Пусть теперь линейный комплекс прямых $K_1^{(n)}$ представлен в виде точек m-мерного пространства S, где $m = (n+2)(n-1)/2$. Тогда точки, представляющие те из $K_1^{(n)}$, специальные прямые которых порождают пространство размерности $n-2s$, образуют многообразие Ω^{2s} размерности $s(2n+1) - 1 - 2s^2$. Через общую точку из S проходит $\infty^{C_n^3}$ n-мерных пространств, пересекающих Ω^{n-2} по V_{2k-1}^{k-1}. Однако существует $\infty^{C_{n+1}^3 - 1}$ многообразий V_{2k-1}^{k-1} таких, что $\infty^{C_n^3}$ из них проходят через общую точку многообразия Ω^{n-2}. Полученные результаты иллюстрируются на примере $K_2^{(6)}$. Л. А. Скорняков

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

5923. **О деформациях многоугольника на сфере.** Залгаллер В. А., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 5, 177—178

Методом разрезывания и склеивания Александрова А. Д. доказывается теорема: Два сферических многоугольника, расположенные в открытой полусфере, равны, если они имеют соответственно равные стороны и углы одного многоугольника не превосходят соответствующих углов другого. Она обобщает лемму Коши о деформациях выпуклых сферических многоугольников. В. И. Ведерников

5924. **Об основах теории двумерных многообразий ограниченной кривизны.** Залгаллер В. А., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 4, 575—576

Основные положения теории двумерных многообразий ограниченной кривизны установлены в работе А. Д. Александрова (Докл. АН СССР, 1948, 60,

№ 9). Под таким многообразием понимается двумерное многообразие R с внутренней метрикой ρ, удовлетворяющей некоторым условиям.

Автор реферируемой заметки усиливает результаты упомянутой работы. Он выводит основные теоремы о приближении метрики ρ многогранными метриками, накладывая на ρ и R априори более слабые условия. Один из результатов гласит:

Теорема 1. Если в двумерном многообразии R с внутренней метрикой ρ у каждой точки существует такая окрестность G, что для любой конечной системы неперекрывающихся гомеоморфных кругу выпуклых треугольников $T_i \subset G$ будет $\sum_i |\bar{\delta}(T_i)| \leqslant \nu(G) < +\infty$, то каждая компактная область $G' \subset R$ может быть заключена в многоугольник P, в пределах которого метрика ρ_P допускает равномерное приближение многогранными метриками ρ_n, абсолютные кривизны которых ограничены в совокупности.

(Здесь $\bar{\delta}(T) = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi$ — избыток треугольника T; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ — верхние углы.)

Справедлива и обратная теорема. Доказательства только намечены. Ю. А. Волков

5925. **Об основах теории двумерных многообразий ограниченной кривизны. Залгаллер В. А.,** Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1, М., АНСССР, 1956, 152

Резюме доклада на 3-м Всесоюзном математическом съезде (см. реф. 5924).

5926. **Объем, площадь поверхности и интегральная средняя кривизна. Осио** (Volume, surface-area and total-mean-curvature. Ohshio Shigeru), Sci. Repts Kanazawa Univ., 1955, 4, № 1, 21—28 (англ.)

Выводятся дифференциальные и интегральные соотношения, связывающие площадь, интегральную среднюю кривизну и объем, заключенный внутри замкнутых выпуклых поверхностей $K(t)$, внутренне параллельных к данной, соответствующей $t = 0$. Поверхность $K(t)$ получается как граница пересечения положительных полупространств, отсекаемых опорными плоскостями исходной поверхности после смещения их на отрезок t в направлении внутренней нормали.

Поверхности $K(t)$, а также указанные понятия и соотношения рассматриваются в качестве предельных для последовательностей выпуклых многогранников $P_n(t)$, сходящихся к $K(t)$ извне. Для установления искомых зависимостей используется характеристическая функция $k(t) = \lim k_n(t)$ (предельная для характеристических функций $P_n(t)$, численно совпадающая с площадью поверхности (forme-figure), описанной около единичной сферы, и опорные плоскости которой параллельны соответствующим опорным плоскостям $K(t)$.

Все соотношения рассматриваются при $0 \leqslant t \leqslant r$, где r — радиус наибольшей сферы, могущей быть вписанной в $K(0)$ (исключая критические значения t, при которых число элементов $P_n(t)$ изменяется).

Г. С. Бархин

5927. **Замечания к моей работе «Об изгибаниях поверхностей положительной кривизны и некоторые замечания о поведении решений дифференциальных уравнений в частных производных в переходной области». Беккерт** (Bemerkungen zu meiner Arbeit «Uber die Verbiegung von Flächenstücken positiver Krümmung und einige Bemerkungen zum Verhalten der Lösungen partieller Differentialgleichungen im Übergangsgebiet». Beckert Herbert), Math. Nachr., 1955, 14, № 1, 21—23 (нем.)

Указывается, что результаты И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952 **31** (73), № 2, 217—314) существенно дополняют ранее опубликованные работы автора (Math. Nachr., 1951, 5, 111—121; 123—128) и позволяют, в частности, установить теорему: Каждый регулярный кусок поверхности положительной кривизны, имеющий топологический тип кругового кольца, при условиях дифференцируемости, которые указаны во второй из цитированных статей автора, допускает бесконечно много непрерывных изгибаний. Н. В. Ефимов

5928. **(M, F)-проблема при дополнительных условиях. Бири** (Ein (M, F)-Problem mit Nebenbedingungen. Bieri H.), Experientia, 1956, 12, № 10, 369—370 (нем.; рез. англ.)

Рассматривается экстремальная задача о нахождении во множестве выпуклых тел вращения данной высоты I и с заданным интегралом средней кривизны M тел, имеющих наименьшую поверхность F. При решении этой задачи можно, не нарушая общности, ограничиться выпуклыми телами, составленными из усеченных круглых конусов (и, в частности, конусов, которых в составе тела может быть не более двух, и не более чем одного цилиндра). В предшествующей своей работе (РЖМат, 1954, 2336) автор показывает, что по отношению к двум весьма частным классам тел указанным свойством обладают конусы. В настоящей работе это экстремальное устройство конусов доказывается по отношению ко всем выпуклым телам, составленным из усеченных конусов, у которых экваториальное сечение лежит в основании тела. Доказательство проводится с помощью рассмотрения в (M, F,)-плоскости соответствующих кривых. Полученный результат для тел рассматриваемого класса может быть выражен с помощью неравенства

$$M \leqslant \frac{\pi l \cdot F}{\sqrt{(\pi l^2 + F)^2 + F^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{F}{\pi l^2 + F} \right),$$

в котором знак равенства имеет место только для прямых круглых конусов. А. Г. Школьник

См. также: 5582

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

5929. **Замечания о τ-методе для решения линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Лью к** (Remarks on the τ-method for the solution of linear differential equations with rational coefficients. Luke Yudell L.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 4, 179-191 (англ.)

Заметка посвящена применению τ-метода (Lanczos C., J. Math. and Phys., 1938, 17, 123—199) для решения линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами вида

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(z) \frac{d^k y}{dz^k} - C = 0, \qquad (1)$$

где $C = 0$ или 1. Предполагается, что решение уравнения (1) может быть представлено в виде ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

коэффициенты которого определяются двучленным рекуррентным соотношением

$$M_{k+1} a_{k+1} + N_k a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2\ldots).$$

Для определения коэффициентов a_k аппроксимирующего ряда

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (2)$$

метод дает сравнительно простые формулы. Применение τ-метода для получения аппроксимаций для

систем определенных трехчленными рекуррентными соотношениями, приводит к более сложным формулам. Иллюстрирующие примеры показывают, что при небольшом n ряд (2) дает хорошую аппроксимацию для решения уравнения (1). А. Е. Божанова

5930. **О приближенном решении задачи Штурма—Лиувилля о собственных значениях. Лаасонен** (Über die Näherungslösungen der Sturm—Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Laasonen Pentti), 12-te Skand. matematikerkongr. Lund, 1953. Lund, 1954, 176—182 (нем.)

Автор предлагает приближенный метод нахождения больших собственных значений и соответствующих им собственных функций задачи Штурма—Лиувилля. Метод требует сравнительно небольших вычислений и дает достаточную для практических целей точность. Показано, что погрешность аппроксимации собственных значений и собственных функций есть величина порядка $O(\lambda_n^{-1}) = O(n^{-2})$. Метод иллюстрируется конкретным примером. А. Е. Божанова

5931. **Об одном разностном методе решения уравнения Лапласа с осевой симметрией. Давиденко Д. Ф.**, Докл. АН СССР, 1956, 110, № 6, 910—913

Ищется решение уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию $u|_\Gamma = \varphi$, где Γ — граница области G плоскости (r, z). Область G покрывается произвольной сеткой. Предполагается, что в окрестности узла (r_0, z_0) решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$u(r, z) = a_{0,0} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n-1,1}\Phi_{2n-1}(r, z) + a_{n,0}\Phi_{2n}(r, z)], \qquad (2)$$

где гармонические функции Φ_{2n-1} и Φ_{2n} задаются равенствами

$$\Phi_{2n-1}(r, z) = \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^j F_{n-(2j+1),\,2j+1}(r, z),$$

$$\Phi_{2n}(r, z) = \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^j F_{n-2j,\,2j}(r, z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а функции $F_{k,l}$ удовлетворяют равенствам

$$\left.\frac{\partial^{\nu+\mu} F_{k,l}(r, z)}{\partial r^\nu \partial z^\mu}\right|_{\substack{r=r_0\\ z=z_0}} = \begin{cases} 0 \text{ при } \nu \neq k,\ \mu \neq l,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots,\ k+l, \\ \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, \\ k+l-\nu, \\ 1 \text{ при } \nu = k,\ \mu = l. \end{cases}$$

Составляется линейная комбинация значений u в узле (r_0, z_0) и m ближайших к нему узлов так, чтобы в комбинации соответствующих разложений (2) обратились в нуль члены с Φ_k при $k < m$. При этом

$$u_0 - \sum_{i=1}^{m} b_i' u_i = R^{(m)},$$

где $R^{(m)}$ зависит от значений Φ_k в указанных узлах при $k \geqslant m$.

При численном решении уравнения (1) $R^{(m)}$ заменяются нулями.

Рассмотрен частный случай квадратной сетки и $m = 8$ при специальном выборе функций Φ_k. Полученные формулы использованы для решения конкретной задачи. Сравнение этих результатов с результатами, полученными по формулам Гершгорина, показывают преимущество формул автора. Н. П. Жидков

5932. **О численном решении уравнения Пуассона для прямоугольника. Стейн, Пек** (On the numerical solution of Poisson's equation over a rectangle. Stein P., Peck J. E. L.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 2, 999—1011 (англ.)

Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (1)$$

на прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ приближенно заменяется системой mn уравнений

$$2(1+\rho^2) z_{i,j} = \rho^2 (z_{i,j+1} + z_{i,j-1}) + z_{i+1,j} + z_{i-1,j} + a_{ij}, \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a = (n+1)\Delta x$, $b = (m+1)\Delta y$, $\rho = \Delta y/\Delta x$, $a_{ij} = -f(j\Delta x, i\Delta y)\Delta y^2$, $z_{ij} = z(j\Delta x, i\Delta y)$. Решение системы (2) получается столбец за столбцом в виде

$$Z_j = \sum\nolimits_k M_{jk} B_k, \qquad (3)$$

где M_{jk} — матрицы, зависящие от m, n и ρ, а B_k — векторы, зависящие от m, n, ρ, значений $f(x, y)$ в узловых точках и от граничных условий. Даны довольно громоздкие методы вычисления матриц M_{jk} и методы вычисления векторов B_k. Н. П. Жидков

5933. **Метод численного решения краевых задач эллиптического типа. Хайдин** (Ein Verfahren zur numerischen Lösung der Randwertaufgaben vom elliptischen Typus. Hajdin Nikola), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1956, 9, 69—78 (нем.)

Для приближенного решения уравнения

$$p + q + h\Phi = -f, \qquad (1)$$

где $p = \partial^2\Phi/\partial x^2$; $q = \partial^2\Phi/\partial y^2$; p, q, Φ, f, h — функции от $(x, y) \in S$ (S — ограниченная область с границей L, пересекающейся с каждой прямой, параллельной Ox или Oy не более, чем в двух точках) строится прямоугольная сетка $x = x_m$ $(m = 0, 1, \ldots, M)$, $y = y_n$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$, покрывающая S, затем рассматриваются MN-мерные векторы (M-мерные векторы с N-мерными компонентами) $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ такие, что, например, $\Phi_{nM+m} = \Phi(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in S$ и $\Phi_{nM+m} = 0$, если $(x_m, y_n) \overline{\in} S$. Исходя при фиксированных $y = y_n$ из равенств $\partial^2\varphi/\partial x^2 = p$, $\Phi = 0$ на L, выражаем $\Phi(x, y_n)$ через $p(x, y_n)$ при помощи функции Грина, и при приближении соответствующих интегралов квадратурными формулами получим $\boldsymbol{\Phi} = A\boldsymbol{p}$, где матрица A нам известна. Точно так же $\boldsymbol{\Phi} = B\boldsymbol{q}$ и из (1) $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} + H\boldsymbol{\Phi} = -\boldsymbol{f}$; из этих трех уравнений определяем $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\Phi}$. Приведен пример расчета призматической балки на кручение.

М. Л. Бродский

5934. **О применении вариационного метода Л. В. Канторовича к задачам прикладной теории упругости. Фролов В. М.**, Инженерный сб., 1956, 24, 174—182

Вариационный метод Л. В. Канторовича (Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, М., Гостехиздат, 1948, гл. IV, § 3) предлагается дополнить следующим образом.

Решение w плоской граничной задачи первоначально ищется в виде

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,\varphi_i(y), \qquad (1)$$

где функции $\varphi_i(y)$ заданы, а функции $f_i(x)$ определяются из условия минимума соответствующего функционала. Затем найденные $f_i(x)$ подставляются в (1) и вариационным методом определяются новые значения для $\varphi_i(y)$, и т. д. Этот прием предлагается для приближенного решения задачи о кручении прямоугольного вала и двух задач об изгибе тонкой прямоугольной пластины. Во всех примерах взято $n = 1$. Произведено сравнение с результатами, полученными другими вариационными методами. Вопросы сходимости и оценки погрешности не рассматриваются.

М. Ш. Бирман

5935. **Об устойчивости разностных методов уравнения теплопроводности. Эванс, Брюссо, Кирстед** (Stability considerations for various difference equations derived for the linear heat conduction equation. Evans G. W., Brousseau R., Keirstead R.), J. Math. and Phys., 1956, 34, № 4, 267—285 (англ.)

На примере одномерного уравнения теплопроводности авторы показывают, что понятия устойчивости разностных уравнений, сходимости их решений к решению соответствующего дифференциального уравнения и распространение ошибок округления не всегда являются взаимно связанными. При этом подчеркивается тот факт, что граничные условия, а также соотношение между граничными и начальными условиями, как и сама форма разностных уравнений, во многих случаях изменяют устойчивость решения разностной системы.

Вводя понятие устойчивости (и неустойчивости) разностных уравнений, авторы применяют метод Неймана (O'Brien G., Hyman M., Kaplan S., J. Math. and Phys., 1951, 29) для исследования устойчивости двух неявных разностных схем для уравнения теплопроводности. Этот же метод применяется к анализу устойчивости некоторых разностных схем для одномерного волнового уравнения.

В заключение исследуется рост ошибок округления для уравнения теплопроводности. А. Е. Божанова

5936. **Об ошибке решения уравнения теплопроводности методом прямых. Дуглас** (On the errors in analogue solutions of heat conduction problems. Douglas Jim Jr), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 3, 333—335 (англ.)

Приводится элементарный вывод оценки погрешности решения уравнения теплопроводности (с начальными и граничными условиями) методом прямых. Указанная оценка погрешности для метода прямых получается как предельный случай из оценки погрешности для соответствующего разностного метода. В. С.

5937. **О методе прямых для некоторых краевых задач. Будак Б. М.,** Вестн. Моск. ун-та, 1956, № 1, 3—12

Выводятся оценки погрешностей, возникающих при решении краевых задач для уравнений

$$u_{xy} = a(x, y)\,u + f(x, y), \quad u_{xy} = A(x, y, u),$$

$$\rho(x)\,u_{tt} = (\sigma(x)\,u_x)_x - q(x)\,u + f(x, t),$$

$$\rho(x)\,u_t = (\sigma(x)\,u_x)_x - q(x)\,u + f(x, t)$$

методом прямых. Эти оценки имеют вид Ch; при этом указывается явная зависимость постоянной C от исходных данных. Я. И. Алихашкин

5938. **Оценка погрешности приближенных решений телеграфных уравнений. Сон Вон Рок** (전신 방정식의 근사해의 오차 평가. 손원룩), 조선 민주주의 인민 공화국 과학원 학보 Чосон минчуучуы инмин конхвагук, квахаквон хакпо, 1955, № 11, 108—126 (кор.)

При расчете обычно берут вместо решений телеграфных уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_i + L\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

решения уравнений, получаемых подстановкой в (1) $L = 0$ и $G = 0$, в силу чего возникает вопрос оценки погрешности этих приближенных решений.

Автор рассматривает этот вопрос при следующих начальных и краевых условиях $u|_{x=0} = E$, $u|_{x=l} = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $i|_{t=0} = 0$ и получает формулы для оценок в различных промежутках времени. Основной вывод таков: приближенные решения с момента $t = \frac{1}{2\alpha^2}$ допускают относительную погрешность, меньшую 11%, если выполнены условия $La^2/R \leqslant 0{,}001$, $G/Ca^2 \leqslant 0{,}002$, где $\alpha^2 = \pi^2/RCl^2$ (u — напряжение, i — сила тока, R — сопротивление, L — самоиндукция, C — емкость, G — утечка, l — длина провода). Ким Сен Ен

5939. **Численные решения для сферических взрывных волн. Брод** (Numerical solutions of spherical blast waves. Brode Harold L.), J. Appl. Phys., 1953, 26, № 6, 766—775 (англ.)

Приводятся результаты численного решения задачи о сильном взрыве в идеальном газе (случай сферической симметрии) с учетом противодавления.

Так как применение численных методов расчета течений сжимаемой жидкости усложняется наличием скачков, то для уравнения поверхностей разрывов автор использует метод искусственной вязкости, предложенный Нейманом и Рихтмайером (Neumann J. von, Richtmyer R. D. J. Appl. Phys., 1950, 21, № 3).

В результате введения в уравнения движения идеальной жидкости диссипативных членов скачок заменяется тонким слоем (толщина которого равна нескольким интервалам счетной сетки), в котором гидродинамические величины меняются быстро, но непрерывно.

Для искусственной вязкости автор употребляет выражение

$$q = \frac{9\gamma(\gamma+1)}{4}\left(\frac{M}{3\pi}\right)^2 \rho(\Delta x)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right),$$

где Δx — длина интервала при численных расчетах, M — число таких интервалов в слое, заменяющем скачок, γ — показатель адиабаты, u — скорость, x — лагранжева координата, ρ — плотность.

Дифференциальные уравнения движения в форме Лагранжа, записанные в безразмерных переменных, заменяются соответствующей системой уравнений в конечных разностях. В качестве начальных данных используются: 1) значения искомых функций, полученные из решения автомодельной задачи о точечном сильном взрыве, 2) значения искомых функций при расширении изотермического шара конечного радиуса.

Решение задачи с первым типом начальных условий было выполнено для значений максимального избыточного давления до 0,06 атм. Результаты расчетов приведены на 26 графиках, изображающих избыточное давление, скорость и плотность частиц как функции времени и расстояния. Приводятся также динамическое давление, импульсы избыточных давлений и импульсы переноса массы для положительных и отрицательных фаз давления и скорости, а также

значения всех величин на ударной волне для разных времен и расстояний по радиусу. Приводятся приближенные аналитические выражения, аппроксимирующие полученные численные результаты. Автор указывает, что решение задачи со вторым типом начальных условий еще не закончено, приводится только график избыточного давления на ударной волне как функции радиуса ударной волны. Библ. 9 назв. Е. В. Рязанов

5940. **Приложение одного метода минимальной погрешности к решению задач управления движением контура нефтеносности.** Салехов Г. С., Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ., матем. и техн. н., 1955, вып. 8, 3—15

При решении задач управления движением контура нефтеносности предлагается пользоваться методом минимизации квадратичной погрешности. При этом решается следующая задача. Рассматривается уравнение движения контура нефтеносности, зависящее от ряда параметров (координаты и мощности скважин). Задавшись желаемым законом стягивания контура нефтености, выбираются параметры уравнения так, чтобы его решение было близко к выбранному. Рассматриваются непрерывный и дискретный случаи задания контура. Библ. 12 назв. В. А. Булавский

5941. **Приближенные методы решения проблемы быстрого движения воды под гидротехническими сооружениями.** Мейзлик (Aplikácia, metódy sieti na riešenie problémov prudenia, podzemnej vody pod hydrotechnickymi stavbami. Mejzlik Ladislav), Apl. mat., 1956, 1, № 6, 399—430 (словацк.; рез. русск., нем.)

5942. **Осциллирующие функции и их приложение к приближенному решению интегральных и дифференциальных уравнений.** Мельник С. И., Уч. зап. Молотовск. ун-та, 1955, 9, № 4, 15—23

Функция $f(p)$, заданная в области Ω, называется осциллирующей, если для некоторого разбиения Ω на неперекрывающиеся части Ω_i $\int_{\Omega_i} f(p)\,d\omega = 0$. Автор предлагает метод осциллирующих функций, заключающийся в следующем: приближенное решение находится так, чтобы невязка его была осциллирующей функцией для заданной системы множеств Ω_i.

Для интегральных уравнений метод совпадает с методом Галёркина для специальной ортогональной системы. Для обыкновенных уравнений 1-го порядка (задача Коши) приближенное решение линейно в интервалах $[x_i,\ x_{i+1}]$: $y = a_i(x - x_i) + b_i$. Аналогично для линейных уравнений 2-го порядка (задача Коши) приближенное решение ищется в виде

$$y = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i.$$

В обоих случаях коэффициенты a_i выбираются из условия осциллирования невязки на интервалах $[x_i,\ x_{i+1}]$, b_i, c_i — непрерывности y в первом случае, y и y' — во втором.

Рассмотрены условия применимости метода (разрешимость уравнений для a_i). Во всех трех случаях даны оценки погрешностей. Б. А. Самокиш

5943. **Осциллирующие функции и некоторые их приложения к задачам математической физики.** Мельник С. И., Матем. сб., 1956, 38, № 4, 465—478

Работа является развитием заметки автора (РЖМат, 1954, 5256). Основное определение: функция $f \in L_p(\Omega)$ ($p > 1$, область Ω конечна) называется осциллирующей порядка m, если для некоторого разбиения Ω на непересекающиеся части $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ будет $\int_{\Omega_i} f \prod d\Omega = 0$ ($i = 1, \ldots, N$) для любого полинома $\prod$ степени $\leqslant m$. Основная оценка: если $F \in L_q(\Omega)$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$), то

$$\left|\int_\Omega F\,d\Omega\right| \leqslant \left[\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left|F - \prod_i\right|^q d\Omega\right]^{1/q} \left[\int_\Omega |f|^p\,d\Omega\right]^{1/p}$$

(для любых указанных выше полиномов $\prod_i$); отсюда вытекают более простые оценки левой части для функции F, удовлетворяющих условию Гельдера, определенное число раз ограниченно дифференцируемых и т. д., а также оценки, когда f представляет собой сумму осциллирующих функций порядка m.

Основная оценка применяется к оценке (аналогичной полученной в указанной выше работе) разности $|u - f|$ для уравнения

$$u(P) - \int_\Omega K(P,\ Q)\,u(Q)\,d\Omega_Q = f(P),$$

если f — осциллирующая функция, а также для оценки разности приближенного решения и точного через невязку. Далее выводится оценка погрешности приближенного решения начальной задачи для уравнения $y' = f(x, y)$, причем график этого решения строится в виде ломаной, каждое звено которой выбирается так, чтобы для него интегральная невязка равнялась нулю. Наконец, выводится оценка деформаций для пространственной линейной статической задачи теории упругости (в случае изотропной среды и отсутствии массовых сил), когда на границе области заданы осциллирующие напряжения (один из возможных подходов к обоснованию принципа Сен-Венана).

А. Д. Мышкис

5944. **Приближенный метод решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений.** Юсупов К. Ю., Уч. зап. Казанск. гос. пед ин-та, 1955, вып. 10, 85—108

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_0\frac{\partial u}{\partial x} + q_1\frac{\partial u}{\partial t} + q_2 u =$$

$$= \lambda\int_0^t k(t-\tau)\left(p_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p_1\frac{\partial u}{\partial t} + p_2 u\right)d\tau + p(x)$$

с начальным и граничными условиями

$$u(x,\ 0) = f(x),\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = g(x),\quad u(a,\ t) = \varphi(x),$$

$$u(b,\ t) = \psi(t),$$

где коэффициенты q_0, q_1, q_2, p_0, p_1, p_2 — постоянные, ядро $k(t-\tau)$ — регулярное, известная функция $p(x)$ — непрерывная.

Для приближенного решения указанной задачи все производные по t заменяются соответствующими разностными отношениями (метод прямых). Полученные при этом обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка решаются последовательно в направлении возрастания t обычным методом вариации постоянных. Устанавливается единственность приближенного решения и высказываются некоторые соображения относительно оценки погрешности. Приведены три числовых примера. В. К. Саульев

5945. **Приближенное решение особых интегральных уравнений.** Иванов В. В., Докл. АН СССР, 1956, 110, № 1, 15—18

Сингулярное интегральное уравнение

$$A(t)\,x(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ \lambda\int_\gamma T(t,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau = f(t)$$

(γ — единичная окружность; известные функции A, B, T, f удовлетворяют на γ условию Гёльдера) решается приближенно одним из вариантов метода Галеркина на системе функций $\{t^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$. Пользуясь общей теорией приближенных методов Л. В. Канторовича (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6, 89—185), автор оценивает порядок убывания погрешности n-го приближения. М. Ш. Бирман

5946. **О решении уравнений переноса. I. Крук** (On the solution of equations of transfer. I. Krook Max), Astrophys. J., 1955, 122, № 3, 488—497 (англ.)

Предлагается метод приближенного решения уравнения переноса излучения в плоскопараллельной атмосфере

$$\mu\frac{\partial I(\tau,\mu)}{\partial\tau}=I(\tau,\mu)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}I(\tau,\mu')\,d\mu'. \qquad (1)$$

Граничные условия заданы в виде а) $I(0,\mu)=0$, $(-1\leqslant\mu<0)$, в) для любого $\varepsilon>0$ и для $-1\leqslant\mu\leqslant+1$ $\lim\limits_{\tau\to\infty}e^{-\varepsilon\tau}I(\tau,\mu)=0$.

Метод состоит в использовании моментов $M_R(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\mu^2 I(\tau,\mu)\,d\mu$ и приближенного соотношения $\int_{-1}^{+1}P_{2n}(\mu)\,I(\tau,\mu)\,d\mu=0$, которое выполняется тем лучше чем больше индекс n. Здесь P_{2n} — полином Лежандра. Из (I) легко найти систему уравнений

$$\frac{dM_{R+1}(\tau)}{d\tau}=M_R(\tau)-\frac{[1+(-1)^n]}{2(R+1)}M_0(\tau)$$
$$(R=0,\ 1,\ldots,\ 2n-1),$$

результат интегрирования которой дает величину $M_0(\tau)$, а, значит, и решение задачи. Показано, что предложенный метод моментов эквивалентен методу сферических гармоник, а также методу дискретных ординат. Первый из них состоит в представлении решения уравнения (1) в виде

$$I(\tau,\mu)=\sum\nolimits_R I_R(\tau)\,P_R(\tau),$$

а метод дискретных ординат — в представлении интегрального члена уравнения (1) в виде конечной суммы с помощью квадратурной формулы. Отмечено, что квадратурная формула Ньютона—Котеса дает лучшие результаты, нежели формула Гаусса, используемая Чандрасекаром.

Метод моментов при $n=1$ показывает, что для условия на границе следует брать соотношение $J(0)=\sqrt{3}\,H(0)$, где $J(0)$ — значение функций источника при $\tau=0$, $4\pi H(0)$ — величина потока излучения, вместо соотношения $J(0)=2H(0)$, которое используется в методе Эддингтона.

Рассмотрено приближенное решение интегральных уравнений Милна для данной задачи, состоящее в замене экспоненциальных интегралов $E_n(x)$ конечными суммами. Отмечено, что рассмотренные методы решения уравнений излучения могут быть применены в других разделах физики, например при решении уравнения Больцмана в кинетической теории газов. Н. М. Минин

5947. **Приближенное решение функциональных уравнений. Канторович Л. В.**, Успехи матем. наук, 1956, 11, № 6, 99—116

Обзорная статья, посвященная вопросу применения функционального анализа к построению и исследованию алгорифмов приближенного решения функциональных уравнений. Разделы: 1. Градиентные методы, 2. Метод Ньютона и связанные с ним другие методы; 3. Сходимость линейных приближенных процессов. Библ. 74 назв. И. К. Даугавет

5948. **Об одном варианте метода усреднения. Черныш енко** (Про один варіант методу осереднення. Чернишенко Е. А.), Доповіді АН УРСР, 1956, № 1, 10—12 (укр.; рез. русск.)

Для линейных операторных уравнений предлагается следующее видоизменение обычного метода последовательных приближений (в связи с допущенной в статье путаницей в терминологии и нечеткостью изложения, референт вынужден несколько отойти от текста, формулируя идею предлагаемого метода). Пусть G n-мерное линейное подпространство гильбертова пространства H, P — оператор проектирования на G. Для построения последовательных приближений f_1, f_2,... к решению f линейного операторного уравнения в H

$$f-\lambda Af=g \qquad (1)$$

предлагается рекуррентная формула

$$f_m=\lambda A(f_{m-1}+P(f_m-f_{m-1}))+g \qquad (2)$$

($f_0=0$). Проектирование обеих частей равенства (2) на G приводит к уравнению

$$\alpha_m-\lambda PA\alpha_m=P(g-f_{m-1}+\lambda Af_{m-1}) \qquad (3)$$

для проекции $\alpha_m=P(f_m-f_{m-1})$. Отыскав из (3) α_m, можно далее найти f_m по формуле (2). Процесс построения последовательных приближений может быть реализован в случае существования в G обратного оператора $(E-\lambda PA)^{-1}$. Никаких общих соображений по вопросу о сходимости предлагаемого процесса статья не содержит. Рассмотрены некоторые примеры. В отдельных частных случаях предлагаемый автором метод был уже ранее развит Ю. Д. Соколовым (РЖМат, 1956, 2462). И. М. Рапопорт

5949. **Применение метода чаплыгинского типа приближенного решения операторных уравнений. Слугин С. Н.**, Докл. АН СССР, 1956, 110, № 5, 739—741

Рассматривается приложение теоремы 2 из работы автора (РЖМат, 1956, 4097) для уравнения

$$y'-f(t,\ y)=0,\ \ y(t_0)=\alpha, \qquad (1)$$

для системы

$$y_k'=f_k(t,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m),\quad y_k(t_0)=\alpha_k,\quad k=\overline{1,\ m}, \qquad (2)$$

и для уравнения

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}K(t,\ \tau,\ y(\tau))\,d\tau. \qquad (3)$$

Ранее рассматриваемые условия применимости этого метода к уравнениям (1), (2), (3) заменены более слабыми ограничениями. В каждом случае дается алгорифм построения верхних (нижних) приближений и оценка быстроты сходимости процесса.

Впервые аналогичное приложение указано для системы алгебраических и трансцендентных уравнений

$$f_k(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_m)=0$$

при выполнении весьма жестких условий. С. С. Мусина

5950. **Итерационные методы решения линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Хейс** (Iterative methods of solving linear problems on Hilbert space. Hayes R. M.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, № 39, 71—103 (англ.)

Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Будем говорить, что x_0 — решение уравнения

$$Ax = b \qquad (1)$$

в линейном многообразии $L \subseteq H$, если $r_0 = b - Ax_0$ ортогонально L. В частности, при $L = H$ это значит, что $z = h$, где h — решение (1) в обычном смысле слова. Если A — положительно определенный оператор ($A \geqslant mI$, $m > 0$), то решение (1) в L равносильно минимизации $F(x) = (b - Ax,\ h - x)$ (h единственно) в L.

Рассматриваются методы построения последовательностей $x_n \to h$: 1) «метод градиента» (известный метод наискорейшего спуска, см. Канторович Л. В., Успехи матем. наук, 1948, вып. 6); 2) «метод сопряженного градиента»: $x_{n+1} = x_n + (p_n,\ r_n)\, p_n\, (p_n,\ Ap_n)$; $r_{n+1} = b - Ax_{n+1}$; $p_{n+1} = r_{n+1} - (r_{n+1},\ Ap_n)\, p_n / (p_n,\ Ap_n)$, являющийся частным случаем «метода сопряженных направлений» (имеются в виду направления последовательных смещений p_n), так как $(Ap_j,\ p_k) = 0$ при $j \neq k$. При этом методе x_n является решением (1) в линейном многообразии, проходящем через $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$; геометрически x_n — центр n-мерного эллипсоида, полученного в пересечении поверхности $F(x) = 1$ этим многообразием. Оценка сходимости такая же, как для «метода градиента».

Пусть теперь $A = D + K$, где D — самосопряженный положительно определенный оператор, K — самосопряженный вполне непрерывный оператор, т. е. A — оператор Лежандра (в терминологии автора). Ряд свойств таких операторов был установлен Хистензом (Hestenes M. R., Pacif. J. Math., 1950, 1, 525—582). Доказывается, что если A — оператор Лежандра и дана расширяющаяся последовательность пространств $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots$, $\overline{\sum_{n=1}^{\infty}} H_n = H$, то, начиная с некоторого n, в H_n разрешимо (1), и решения $x_n \to h$. Поэтому «метод сопряженного градиента» применим и к операторам Лежандра. Оценки сходимости для A в пределе не хуже таких же оценок для D; если $D = I$, $x_n \to h$ быстрее любой геометрической прогрессии.

В качестве приложений рассмотрены уравнение Фредгольма 2-го рода, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. В последнем случае рассматривается пространство функций $x(t)$, где $t(t_1, \ldots, t_m) \in S$, S — область m-мерного пространства, аннулирующихся на границе S и таких, что $\|x\|^2 = \int_S \sum_{i=1}^{m} (\partial x / \partial t_i)^2\, dt < \infty$ (остальные условия опускаем). Тогда решение некоторой системы уравнений в частных производных сводится к минимизации $F(x)$, где $(Ax,\ x) = \int_S \left(\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} \partial x / \partial t_j\, \partial x / \partial t_k + 2 \sum_{k=1}^{m} b_k x \partial x / \partial t_k + fx^2 \right) dt$, причем A является оператором Лежандра тогда и только тогда, когда форма $\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(t)\, \xi_j \xi_k$ положительно определена. Отсюда название «оператор Лежандра» (обобщение условия Лежандра в вариационном исчислении).

Рассмотрены также методы построения последовательностей, стремящихся к собственным числам, собственным векторам оператора. М. Л. Бродский

5951. Практический метод интерполирования функции двух переменных. (С численным примером применительно к вопросам отделения углей и горных пород от массива.) Слободкин М. И., Научн. тр. Моск. горн. ин-та, 1956, Сб. 17, 27—35

5952. О точности численных расчетов при интерполировании полиномами. Попович (Despre precizia calculului numeric in interpolarea prin polinoame. Popoviciu Tiberiu), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 4, 953—961 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается интерполирование посредством интерполяционного полинома Ньютона и исследуется погрешность интерполирования, возникающая за счет погрешностей, допускаемых при вычислении разделенных разностей посредством рекурентной формулы

$$D_i^j = (D_{i+1}^{j-1} - D_i^{j-1})\, (x_{i+j} - x_i)^{-1}, \quad D_i^0 = f(x_i). \qquad (1)$$

Пусть c_{ij} — погрешность, допущенная при вычислении D_i^j по формуле (1). Полученные в результате расчета значения разделенных разностей $\tilde{D}_i^j$ будут удовлетворять соотношениям

$$\tilde{D}_i^j + c_{ij} = (\tilde{D}_{i+1}^{j-1} - \tilde{D}_i^{j-1})\, (x_{i+j} - x_i)^{-1},$$

$$\tilde{D}_i^0 + c_{i0} = f(x_i)$$

(c_{i0} — погрешность ввода в расчет исходных данных $f(x_i)$). В результате погрешностей, допущенных при вычислении разделенных разностей, вместо интерполяционного полинома $\tilde{P}(x)$ будет построен некоторый полином $\tilde{P}(x)$. Исследуется связь между погрешностью $\lambda(x) = P(x) - \tilde{P}(x)$ и погрешностями c_{ij} и устанавливается оценка

$$|\lambda(x)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{n} \left| (x - x_1) \ldots (x - x_i) \right| \times \left[\sum_{j=0}^{i} N_{i-j}(x_1, \ldots, x_{i+1}) \right],$$

где $\varepsilon = \max_{i,\ j} |c_{ij}|$, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — точки, по которым ведется интерполирование, N_k — функции, определяемые рекуррентными формулами

$$N_k(x_1, \ldots, x_{j+1}) = [N_k(x_1, \ldots, x_j) + N_k(x_2, \ldots, x_{j+1})] \times (x_{j+1} - x_1)^{-1}, \quad j \geqslant k+1, \quad N_k(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 1.$$

Если исходные данные $f(x_i)$ вводятся в расчет точно ($c_{i0} = 0$), то имеет место оценка $|\lambda(x)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |(x - x_1) \ldots (x - x_i)| \left[\sum_{j=0}^{i-1} N_{i-j}(x_1, \ldots, x_{i+1}) \right]$.

И. М. Рапопорт

5953. Вычисление интеграла, получающегося при численном интегрировании около логарифмической особенности. Люк (Evaluation of an integral arising in numerical integration near a logarithmic singularity. Luke Yudell L.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, 10, № 53, 14—21 (англ.)

Рассматривается численное нахождение интеграла

$$\int_0^y \frac{dx}{x} \int_0^x f(u)\, du \qquad (1)$$

путем применения интерполяционного полинома n-го порядка, а также выводится оценка соответствующей погрешности через верхнюю грань модуля $(n+1)$-й производной от функции $f(x)$. Приводятся таблицы коэффициентов соответствующего полинома для случая $n = 1, 2 \ldots 10$, а также ошибки коэффициентов для случая $n = 10$.

Интеграл (1) появляется при численном интегрировании

$$\int_0^y f(x)\ln x\,dx.$$

Н. А. Гречина

5954. **К вопросу об интегрировании обобщенных радиальных интегралов, встречающихся в квантовой теории атома. Ванагас, Ушпалис** (Apibendrintų radijinių integralų, sutinkamų kvantinėje atomo teorijoje, integravimo klausimu. Vanagas V., Ušpalis K.), Fiz.-techn. inst. darbai. Liet. TSR mokslų akad., Тр. Физ.-техн. ин-та АН ЛитССР, 1956, 2, 45—56 (лит.; рез. русск.)

Речь идет о численном вычислении интегралов вида

$$\int_0^\infty r_1^{a_1}e^{-\alpha_1 r_1}dr_1\int_{r_1}^\infty r_2^{a_2}e^{-\alpha_2 r_2}dr_2\int_{r_2}^\infty\dots\int_{r_{n-1}}^\infty r_n^{a_n}e^{-\alpha_n r_n}dr_n$$

В. С.

5955. **Новый метод практического гармонического анализа. Чжао Фан-сюн** (實用調和分析新法. 趙訪熊), 數學學報, Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1956, 6, № 3, 433—451 (кит.; рез. англ.)

Пусть для равноотстоящих значений аргумента в интервале $(0, 2\pi)$ задана функция $f(x)$. Для определения приближенных значений коэффициентов Фурье a_k и b_k функции $f(x)$ на практике обычно находят коэффициенты α_k и β_k тригонометрического полинома $\psi_n(x)$, минимизирующего выражение

$$\sum_{l=1}^{2n}[f(x_l)-\psi_n(x_l)]^2\quad\left(x_l=\frac{l\pi}{n}\right).$$

Замечая, что этот метод не дает хорошей аппроксимации, автор предлагает новый метод. Он аппроксимирует данную непрерывную функцию $f(x)$ кривой, состоящей из отрезков прямых или дуг парабол, проходящих через данные ординаты и затем, как обычно, находит коэффициенты Фурье A_k и B_k этой аппроксимационной кривой. Значения A_k и B_k, по утверждению автора, лучше приближают a_k и b_k, чем α_k и β_k. Приведены примеры, иллюстрирующие преимущество нового метода. В случае полигональной аппроксимации и $f(0)=f(2\pi)$ установлено соотношение

$$A_k/\alpha_k=B_k/\beta_k=\left[\sin\frac{k\pi}{2n}\Big/\frac{k\pi}{2n}\right]^2.$$

Сюй Сянь-юй

5956. **Разложение Фурье машинным методом. Кларк** (Fourier analysis by machine methods. Clark John R.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, EC-5, № 3, 141 (англ.)

Пусть $f(x)$ — периодическая с периодом 2π функция. Обычные формулы расчета коэффициентов Фурье включают произведения $f(x)\sin nx$, $f(x)\cos nx$ и потому являются источником ошибок при приближенных вычислениях. Предлагается вместо этого вычислять интегралы

$$\alpha_n=\int_0^{2\pi}f(x)\varphi_n(x)\,dx\quad\text{и}\quad\beta_n=\int_0^{2\pi}f(x)\psi_n(x)\,dx,$$

где $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ — кусочно-постоянные периодические функции, принимающие значения $+1$ или -1. Поскольку разложения Фурье функций $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ известны, то предлагаемый метод приводит к системе линейных уравнений относительно коэффициентов Фурье функции $f(x)$.

Ю. Н. Днестровский

5957. **Практический гармонический анализ разрывных функций. Юшков П. П.,** Сб. тр. общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-т холодильн. пром-сти, 1956, 12, 31—38

Уточняются формулы практического гармонического анализа для 2π-периодической функции $\Phi(x)$, если $\Phi(0+0)\neq\Phi(2\pi-0)$. Если для непрерывной функции (т. е. $\Phi(0+0)=\Phi(2\pi-0)=\Phi(0)=\Phi(2\pi)$) формулы практического гармонического анализа имеют вид:

$$\alpha_m=\frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l\cos\frac{2m\pi l}{n},$$

$$\beta_m=\frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l\sin\frac{2m\pi l}{n},$$

то для разрывной функции получаются следующие формулы практического гармонического анализа:

$$\alpha_m^*=\frac{2}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{l=1}^{n-1}y_l\cos\frac{2m\pi l}{n}\right],$$

$$\beta_m^*=\frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n-1}y_l\sin\frac{2m\pi l}{n}.$$

Можно пользоваться старыми шаблонами, подставив только $y^*=(y_0+y_n)/2$ вместо y_0.

Проводится исследование по применению множителей исправления Умова и числам α_m^* и β_m^*. Формулы для уточненных коэффициентов Фурье функции, имеющей разрывы первого рода на концах промежутка $[0, 2\pi]$, имеют вид:

$$a_m=c_m\alpha_m^*,$$

$$b_m=c_m\beta_m^*-\frac{n(y_0-y_n)}{2m^2\pi^2}\sin\frac{2m\pi}{n}+\frac{y_0-y_n}{\pi m},$$

где c_m — множители исправления Умова:

$$c_m=\left(\frac{n}{2m\pi}\sin\frac{m\pi}{n}\right)^2.$$

Приводится числовой пример.

Л. М. Голубева

5958. **Решение систем линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей. Райли** (Solving systems of linear equations with a positive definite, symmetric, but possibly ill-conditioned matrix. Riley James D.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 51, 96—101 (англ.)

Пусть дана система n линейных уравнений $Ax=b$ с симметрической, положительно определенной матрицей. λ_i, V_i — собственные числа и векторы A. В качестве меры обусловленности матрицы A рассматриваются следующие величины:

$$1.\ \det A\quad 2.\ P(A)=|\lambda_i|_{\max}/|\lambda_i|_{\min}$$

$$3.\ \tilde{N}(A)=\frac{1}{n}N(A)N(A^{-1}),\quad N(A)=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}^2.$$

Для решения системы с плохо обусловленной матрицей предлагается решать «возмущенную» систему $Cy=b$, где $C=A+kI$. Показывается, что для $k>0$ A лучше обусловлена, чем C в смысле любого из трех принятых определений. x находится из разложения $x=y+kC^{-1}y+k^2C^{-2}y+\dots$. Если k слишком велико, этот ряд сходится медленно, если слишком мало, C так же плохо обусловлена, как и A. Рекомендуемые значения для k: 10^{2-s}—10^{3-s}, где s — число удерживаемых десятичных знаков. Характер сходимости ряда для x позволяет судить об обусловленности матрицы A.

В заключение предлагается использовать величину

$$P(A, B) = \max_i \frac{|b_i|}{\lambda_i} \Big/ \min_i \frac{\sum_{j=1}^n |b_j|}{\lambda_i} + P(A)$$

как характеристику обусловленности системы $Ax = b$. Здесь b_i — коэффициенты разложения $b = \sum_{i=1}^n b_i V_i$.

Б. А. Самокиш

5959. **Численное решение системы линейных алгебраических уравнений на вычислительной машине.** Митани (連立一次方程式求解機と數値計算との關係について. 三谷尚正), 電氣試驗所彙報, Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab., 1955, 19, № 8, 576—581 (японск.; рез. англ.)

Предлагаемый метод автора для решения системы

$$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n) \quad |a_{ij}| \neq 0,$$

на вычислительной машине основывается на последовательном определении значений x_i, дающих минимум выражению

$$F = \sum_{i=1}^n f_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i\right)^2.$$

Отмечая медленную сходимость процесса, автор изменяет несколько этот процесс, чтобы ускорить его сходимость при осуществлении на вычислительной машине.

Излагается соответствующий численный метод и дается схема, по которой ведется вычисление.

Ким Сен Ен

5960. **Определители с преобладающей главной диагональю и абсолютная сходимость итерационных процессов. Островский** (Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen. Ostrowski Alexander), Comment. math. helv., 1956, 30, № 3, 175—210 (нем.)

Рассматривается вопрос о сходимости различных итерационных способов решения системы линейных уравнений $A\xi' = \eta'$, где $A = (a_{ik})$ — квадратная матрица, $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — искомый вектор, $\eta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — вектор свободных членов.

Кроме способа Якоби, в котором при переходе к ξ_{k+1} меняются сразу все компоненты k-го приближения $\xi_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ по формулам:

$$x_\mu^{(k+1)} = x_\mu^{(k)} - \frac{1}{a_{\mu\mu}}\left(\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu}x_\nu^{(k)} - y_\mu\right) = x_\mu^{(k)} - \frac{1}{a_{\mu\mu}} r_\mu^{(k)} \qquad (1)$$

(все $a_{\mu\mu} \neq 0$), способов, в которых у векторов ξ_{k+1} и ξ_k совпадают все компоненты, кроме какой-нибудь одной, заменяемой по формуле (1) (при этом чередование значений μ производится либо в циклическом порядке, либо носит случайный характер, либо каждый раз номер изменяемой компоненты выбирается в зависимости от величины «невязок» $r_\mu^{(k)}$) и некоторых других способов, автор рассматривает еще «неполную релаксацию», где вместо (1) берется

$$x_\mu^{(k+1)} = x_\mu^k - \frac{1}{a_{\mu\mu}} r_\mu^{(k)} q_k,$$

где q_k — некоторые числа из интервала (0,2).

Для некоторых итерационных процессов рассматриваются условия абсолютной сходимости (когда процесс сходится при любом исходном векторе ξ_1, при любом векторе η и при изменении знаков у любого числа элементов матрицы A).

В ряде теорем, дающих критерии сходимости различных итерационных процессов, существенную роль играет принадлежность матрицы A к классу H-матриц (это означает, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ik} = |a_{ik}|$, принадлежит к классу M-матриц, т. е. у нее определитель и элементы главной диагонали положительны, а все главные миноры неотрицательны).

Приведен ряд новых и опубликованных в прежних работах автора теорем, относящихся к H-матрицам и M-матрицам.

А. П. Доморяд

5961. **О решении линейных систем посредством итераций. Янг** (On the solution of linear systems by iteration. Young David), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York—Toronto—London, 1956, 283—298 (англ.)

Во введении дается известная классификация методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Пункт 2 посвящен классификации линейных итеративных методов и условиям их сходимости. Результаты этого пункта имеются в предыдущей статье автора (РЖМат, 1955, 1953) и статье Форсайта (РЖМат, 1954, 3840). В пункте 3 исследуется скорость сходимости некоторых известных итерационных методов и двух новых методов, предложенных автором. В пункте 4 производится сравнение новых методов автора на числовом примере решения системы 361 уравнения с 361 неизвестными, возникшей при решении задачи Дирихле конечноразностными методами.

Н. П. Жидков

5962. **Некоторые применения градиентных методов. Фишбак** (Some applications of gradient methods. Fischbach Joseph W.), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York—Toronto—London, 1956, 59—72 (англ.)

Рассматривается применение двух градиентных методов (метода наискорейшего спуска и метода сопряженных градиентов) к решению линейных и нелинейных алгебраических систем с вещественными и комплексными коэффициентами, к решению дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных. Дается краткий исторический экскурс по обоим методам и их описание. Оба метода трактуются как релаксационные. Проводится сравнение методов и даются советы по их применению.

Методы запрограммированы для решения линейных систем (для симметричной матрицы 33 порядка и несимметричной — 23 порядка). Приведены примеры.

В. Н. Кублановская

5963. **Решение системы нормальных уравнений при помощи матриц. Маковер С. Г.,** Астрон. ж., 1956, 33, № 3, 423—439 (рез. франц.)

Статья представляет собой популяризацию для астрономов известной в литературе компактной схемы для решения системы нормальных уравнений, основанной на возможности разложения матрицы в произведение двух треугольных. Для получения диагональных элементов обратной матрицы (весовых коэффициентов) не обязательно решать параллельно соответствующие системы уравнений, как предлагает автор. Элементы обратной матрицы легко получаются с помощью элементов матриц B и C. Приводятся некоторые

формулы для определения средних ошибок неизвестных.

А. П. Хусу

5964. **Применение алгорифма Банахевича (метода краковян) к групповому уравновешиванию систем наблюдений методом Пранис-Праневича. Гаусбрандт** (Zastosovanie algorytmu Banachiewicza (metody pierwiastka krakowianowego) do grupowego wyrównania układów obserwacyjnych metoda Pranis—Praniewicza. Hausbrandt Stefan), Przegl. geod., 1955, **11**, № 1, dodatek Biul. Geod. inst. nauk badawcz., № 1—2, 29—32 (польск.)

Алгорифмом Банахевича называется переход от прямоугольной таблицы коэффициентов нормальных уравнений к ступенчатой «вторичной» таблице алгорифма

$$\begin{matrix} A_1B_1C_1D_1\ldots..L_1 \\ B_2C_2D_2\ldots..L_2 \end{matrix}$$

в результате преобразований, удовлетворяющих соотношениям

$$[AA]=[aa]\,[AB]=[ab]\,[AC]=[ac]\,[AD]=[ad]\ldots[AL]=[al]$$
$$[BB]=[bb]\,[BC]=[bc]\,[BD]=[bd]\ldots[BL]=[bl]$$
$$[CC]=[cc]\,[CD]=[cd]\ldots[CL]=[cl]$$
$$[DD]=[dd]\ldots[DL]=[dl]$$

Применение алгорифма Банахевича к уравновешиванию методом Пранис—Праневича состоит в следующем. По каждой группе уравнений ошибок составляются соответствующие нормальные уравнения, таблицы коэффициентов которых преобразуются во «вторичные» таблицы алгорифма. Общие неизвестные помещаются в конце систем. Из уравнений, содержащих исключительно общие неизвестные и представленных заключительными строками «вторичных» таблиц (они рассматриваются как уравнения ошибок), составляется система нормальных уравнений для определения общих неизвестных. Значения остальных неизвестных вычисляются путем подстановки найденных значений общих неизвестных в соответствующие нормальные уравнения, представленные в виде вторичных таблиц. Применение алгорифма Банахевича имеет ту выгоду, что в результате всех вычислений первоначальная система уравнений ошибок, содержащая избыточные измерения, преобразуется в эквивалентную систему без избыточных измерений. Решение ее позволяет произвести оценку точности неизвестных, чего нельзя сделать при применении алгорифма Гаусса в методе Пранис—Праневича. Эта фиктивная система состоит из уравнений, коэффициенты которых заключены в начальные строки вторичных таблиц алгорифма Банахевича для отдельных групп. Приведен пример трехгруппового уравновешивания системы с 6 неизвестными. Указывается, что метод Пранис—Праневича может иметь большое значение при применении электронных вычислительных машин. Н. И. Модринский

5965. **Об одном целесообразном способе исключения. Бейер** (Ein rationelles Eliminationsverfahren. Beyer H.), Österr. Z. Vermessungswesen, 1954, **42**, № 6, 172—176 (нем.)

Предлагается модификация схемы исключения Гаусса, предназначенная для решения нормальных уравнений с немногими неизвестными.

С. Л. Хубларова

5966. **Уравнение триангуляции посредством ортогонализации. Цветков, Лилли** (Triangulation adjustment by orthogonalization. Cvetkov B., Lilly J. E.), Canad. Surveyor, 1955, **12**, № 6, 396—414 (англ.)

5967. **Замечание о решении больших линейных систем. Ризель** (A note on large linear systems. Riesel Hans), Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, **10**, № 56, 226—227 (англ.)

Сообщается о решении методом Гаусса на машине БЭСК четырех симметричных систем линейных алгебраических уравнений 214-го порядка

$$AX = B. \qquad (1)$$

Около 40% коэффициентов этих систем равны нулю. Несмотря на то, что это обстоятельство было учтено в программе, памяти (8192 ячеек) не хватило для решения в один прием. Время вычисления около 2 час. Вообще, если $p\%$ коэффициентов системы равны нулю и n — порядок системы, время вычисления пропорционально p^2n^2. Матрица $A=(a_{ij})$ системы (1) плохо обусловлена:

$$\frac{|\det(a_{ik})|}{\prod_{k=1}^{214}\left(\sum_{i=1}^{214}|a_{ik}|\right)} = 2^{-886}$$

В. К. Саульев

5968. **Точная оценка уменьшения погрешности на одном шаге метода наискорейшего спуска. Костарчук В. Н., Пугачев Б. П.**, Тр. Семинара по функцион. анализу Воронежск. ун-та, 1956, вып. 2, 25—30

Пусть через x_n обозначено n-е приближение к решению уравнения $Ax=b$ по методу наискорейшего спуска. Устанавливается следующая оценка:

$$\|x_1 - x^*\| \leqslant T\,\|x_0 - x^*\|, \quad T = \frac{1-\mu}{t_0+\mu^3}\sqrt{\frac{t_0(t_0+\mu^4)}{1+t_0}},$$

$\mu = m/M$ (M, m — границы оператора A), t_0 — единственный положительный корень уравнения

$$t^3 - \mu^3(1-2\mu)\,t^2 - \mu^3(2-\mu)\,t - \mu^7 = 0.$$

При малых μ T значительно отличается от существовавшей до сих пор оценки этого коэффициента. Дана таблица значений $T(\mu)$ для $\mu = 0\ (0{,}1)\ 1$. Оказывается выгодным многократное (до 7—8) применение этой оценки для нескольких шагов процесса.

Б. А. Самокиш

5969. **Численное решение задачи о наименьших квадратах. Апаро** (Risoluzione numerica di un problema di minimi quadrati. Aparo Enzo), Ricerca scient., 1955, **25**, № 11, 3039—3044 (итал.; рез. англ., нем., франц.)

Пусть $a_j\,(a_{1j},\ldots,a_{mj})$, $j=1,\ldots,n$-система n вещественных линейно независимых «m»-мерных векторов. Рассматривается процесс минимизации квадратической формы

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right)^2 \qquad (1)$$

($b\,(b_1,\ldots,b_m)$ — заданный вещественный вектор), основанный на ортогонализации системы векторов $a_1,\ldots,a_n$. Пусть

$$c_1 = a_1,\ c_j = -q_{1j}c_1 - \ldots - q_{j-1,j}c_{j-1} + a_j,\ j=2,\ldots,n, \qquad (2)$$

$q_{ij}=0$ при $i>j$, $q_{jj}=1$, q — матрица, составленная из элементов q_{ij}, а и c — матрицы, в столбцах которых размещены соответственно составляющие векторов a_j и c_j. Тогда $a=cq$, и если векторы $c_1,\ldots,c_n$ взаимно ортогональны, то вектор $x\,(x_1,\ldots,x_n)$, минимизирующий квадратическую форму (1), может быть найден по формуле $x=q^{-1}d^{-1}c^*b$, где d — диагональная матрица c^*c. Если числа q_{ij} ($i<j$), реализующие ортогонализацию векторов $a_1,\ldots,a_n$, найдены приближенно, то, вычисляя $c_1,\ldots,c_n$ по формулам (2), получим в итоге матрицу c^*c недиагональную. Пусть

$$c^*c = d + \varepsilon,$$

где d — диагональная матрица, выделенная из матрицы c^*c. Показано, что если $\|d^{-1}\|\,\|\varepsilon\|<1$, то искомый вектор x с погрешностью порядка $\|\varepsilon\|^2$ может быть найден по формуле

$$x\cong q^{-1}(e-d^{-1}\varepsilon)\,d^{-1}c^*b$$

(e — единичная матрица). Даны указания по постановке расчетов на электронных счетных машинах.

И. М. Рапопорт

5970. **Обусловленность матриц — конечных отрезков матрицы Гильберта.** Todd (The condition of the finite segments of the Hilbert matrix. Todd John), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, № 39, 109—116 (англ.)

Матрицы H_n (реф. 6004) являются плохо обусловленными (в смысле влияния погрешностей на их обращение). Число Тюринга

$$M(H_n)=n\cdot\max_{i,j}\left|H_{ij}^{(n)}\right|\max_{i,j}\left|T_{ij}^{(n)}\right|\leqslant M(T_n),$$

характеризующее обусловленность матрицы, имеет порядок $\exp nB$, где $B\approx 3{,}5$; другие критерии также свидетельствуют о плохой обусловленности. Детерминант $d(H_n)\sim 2^{-2n^2}$ (в работе опечатка: $d(T_n)$). Нейманом и Гольдштейном (Neumann J. von, Goldstine H. H., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 188—202) была разработана программа, которая во всех случаях либо обращает матрицу, либо свидетельствует о ее приближенной вырожденности. Эта программа была применена к H_n на машине ЭАК, работающей с точностью до 2^{-42}. Уже при $n=6$ машина «отказалась» обращать матрицу; приведены таблицы точных и полученных приближенных матриц T_n, $n=4, 5, 6$. Матрица T_n, также плохо обусловленная, может быть представлена в виде $B_nB_n^*$, где B_n гораздо лучше обусловлена, чем T_n. Это показывает, что симметризация матрицы может ее сильно «испортить».

М. Л. Бродский

5971. **Решение задач линейной алгебры методом непрерывных дробей.** Люстерник Л. А., Тр. Семинара по функцион. анализу. Воронежск. ун-т, 1956, вып. 2, 85—90

Указывается способ уточнения метода итерации для приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений

$$y=Ay+b,$$

где A — симметрическая матрица порядка n, b — заданный и y — искомый вектор в n-мерном пространстве. Пусть $b^{(0)}$ — вектор начального приближения и векторы

$$b^{(k)}=Ab^{(k-1)}+b$$

вычислены при $k=1, 2, \ldots, k_0+n_0$. Устанавливается формула

$$y-b^{(k_0)}\doteq(a_0+a_1+\ldots+a_{n_0})^{-1}\sum_{r=0}^{n_0-1}\left(\sum_{s=0}^{n_0-r-1}a_sb_s\right),$$

где $b_s=b^{(k_0+s+1)}-b^{(k_0+s)}$, позволяющая улучшить результат итерации с номером k_0 при помощи n_0+1 векторов $b^{(k)}$, полученных при итерациях с номерами от k_0 до k_0+n_0. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$, суть коэффициенты некоторого делителя характеристического многочлена матрицы A. Формула обращается в точное равенство, если $n_0=n$. Упомянутый делитель характеристического многочлена совпадает со знаменателем $q_{n_0}(\lambda)$ n_0-ой подходящей дроби ($n_0\leqslant n$), получаемой при обращении степенного ряда

$$R_0(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{\lambda^{k+1}},\quad d_k=(b^{(k-s)},\ b^{(s)}),\quad 0\leqslant s\leqslant k,$$

в непрерывную дробь

$$R_0(\lambda)=\frac{\alpha_0}{\lambda-\beta_0}-\frac{\alpha_1}{\lambda-\beta_1}-\cdots$$

Указывается алгоритм для вычисления $q_{n_0}(\lambda)$. Приведенный в работе метод связан с методом ортогонализации Ланчоса (Lanczos, J. Res. Nat. Bureau Standards, 1950, 45, Oct. 260).

И. П. Мысовских

5972. **Видоизменение метода наискорейшего спуска.** Шудрова С. И., Уч. зап. Казанского ун-та, 1956, 116, № 1, 26—30

Для двухшагового варианта метода наискорейшего спуска получена следующая оценка быстроты сходимости:

$$\|x_n-x^*\|\leqq Cq^n,\quad q=\frac{(m-\lambda)(\lambda-M)}{\lambda(m-\lambda)+M(m+\lambda)},$$

где m — наименьшее, M — наибольшее, λ — ближайшее к $(m+M)/2$ собственные числа оператора A, который предполагается вполне непрерывным.

Б. А. Самокиш

5973. **О поведении итерационных последовательностей в случае их расходимости.** Островский (Über das Verhalten von Iterationsfolgen im Divergenzfall. Ostrowski Alexander), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1956, 59, № 2, 69—79 (нем.)

Уточняется теорема, полученная С. Л. Лейбензоном (РЖМат, 1953, 787). В данной работе эта теорема формулируется так: Если функция $f(x)$ задана в интервале (сегменте) J, ее значения не выходят из J, она непрерывна, в неподвижных точках итерации z, т. е. в таких точках, в которых $f(z)=z$, дифференцируема, и если дана последовательность $x_0\in J$,

$$x_{n+1}=f(x_n)\qquad(1)$$

и $\underline{\lim}\,x_n=l\neq L=\overline{\lim}\,x_n$, то 1) существует по крайней мере одна неподвижная точка z, $l<z<L$, и 2) если все неподвижные точки отталкивающие, то в (l, L) существует по крайней мере одна сопряженная пара значений (u, v), т. е. такая, что $f(u)=v$, $f(v)=u$. Неподвижная точка z отталкивающая, если существуют x_0, сколько угодно близкие к z и такие, что последовательность (1) либо не стремится к z, либо $x_n=x_{n+1}=\ldots=z$ (С. Л. Лейбензон требовал, чтобы неподвижные точки были «сильно отталкивающими», т. е. $|f'(z)|>1$, хотя отталкивающая точка может быть и при $|f'(z)|=1$, кроме того он требовал дифференцируемости $f(x)$ на всем сегменте $J=[0, 1]$). Доказывается еще несколько утверждений о неподвижных и сопряженных точках итерации.

М. Л. Бродский

5974. **Приближение переходных процессов при помощи рядов Лагерра.** Хед (Approximation to transients by means of Laguerre series. Head J. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 4, 640—651 (англ.)

Рассматривается метод, примененный Уордом (РЖМат, 1955, 2756) для вычисления переходных процессов в динамических системах. Исследуются условия сходимости разложения оригинала в ряд

$$\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^r e^{-\beta t}L_r(2\beta t).$$

Указываются условия улучшения сходимости, если она медленная, путем введения некоторого множителя, что дает возможность при приближенном вычислении пользоваться частными суммами меньшего числа членов разложения вместо семи по Уорду.

Изложенные выше соображения автор применяет к некоторым примерам, рассмотренным Уордом. Приведены таблицы, в которых сравниваются точные значения оригинала со значениями частных сумм в основном четырех первых членов разложения. При рассмотрении последнего примера автор указывает, что в некоторых случаях должны быть известны полюсы данной рациональной функции. Процесс нахождения этих полюсов рассмотрен в конце статьи. Для этого в общих чертах без доказательств описано применение метода Лина (РЖМат, 1955, 1968). Автор обещает в будущем дать детальное описание этого вопроса. С. С. Мусина

5975. **Решение трехчленных уравнений методами начертательной геометрии. Посвянский А. Д.,** В сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения. М., Гостехтеоретиздат, 1955, 396—402

Для трехчленного уравнения $z^n - pz^k + q = 0$ с комплексными коэффициентами корни находятся следующим построением. Пусть z_0 — корень исходного уравнения. Полагая

$$z_0 = re^{i\varphi},\ p = |p|e^{i\alpha},\ q = |q|e^{i\beta},$$

в результате подстановки в уравнение можно написать

$$r^n e^{in\varphi} + |q|e^{i\beta} = |p|r^k e^{i(k\varphi+\alpha)}.$$

Геометрически это равенство можно истолковать как векторный треугольник в комплексной z-плоскости, основание которого $q = |q|e^{i\beta}$ — данный вектор. Через начало — нулевую точку z-плоскости — и конец вектора q проводятся плоскости, ортогонально пересекающие z-плоскость по двум другим сторонам векторного треугольника. Вершина этого треугольника является ортогональной проекцией общей точки некоторых парабол. Она может быть найдена так же, как общая точка двух параболоидов, полученных вращением упомянутых парабол около перпендикуляров к z-плоскости, восстановленных в конце и начале вектора q, и цилиндрической поверхности, направляющая которой называется «улиткой» $k : n$. Эта кривая в z-плоскости есть геометрическое место точек пересечения лучей, исходящих из начала и конца вектора q и образующих с осью x z-плоскости углы, находящиеся в отношении $k : n$. Метод построения корней заключается в построении точки пересечения трех упомянутых поверхностей на эпюре Монжа, причем можно пользоваться стандартными для данных k и n параболами и улитками. С. В. Смирнов

5976. **Результаты расчета конфигурации ударных волн при маховском отражении. Клаттерем, Тауб** (Numerical results on the shock configuration in Mach reflection. Clutterham D. R., Taub A. H.), Proc. Sympos. Appl. Math., 6, New York—Toronto—London, 1956, 45—58 (англ.)

Рассматривается автомодельная двумерная задача о маховском отражении в газе при столкновении плоской ударной волны с плоской твердой стенкой. Предлагается численный метод определения угла наклона траектории точки пересечения ударных волн (тройная точка) при таком отражении.

Пусть этот угол есть χ. Делая ряд предположений о характере решения в окрестности точки пересечения волн, используя условия Гюгонио для ударных волн и некоторые свойства течения газа, авторы дают приближенный метод определения зависимости угла χ от угла падения ударной волны α и от величины отношения давления покоящегося газа к давлению за падающим скачком.

Задача сводится к нахождению корней полинома 12-й степени. Ищутся корни, имеющие физически реальные значения. Указывается схема отыскания корней и приведены результаты расчета на вычислительной машине ИЛЛИАК. Расчет проведен для случая отражения ударных волн в совершенном газе с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 1{,}4$. Результаты расчетов даны в виде двух таблиц. В. П. Коробейников

5977. **Кривые равных точностей в случае одной линии положения. Воронов В. В.,** Уч. зап. Ленингр. высш. инж. мор. уч-ща, 1955, вып. 1, 129—134

5978. **Численное решение флюктуационной задачи в каскадной теории. Гарднер, Гелман, Мессел** (Numerical calculations on the fluction problem in cascade theory. Gardner J. W., Gellman H., Messel H.), Nuovo cimento, 1955, 2, № 1, 58—74 (англ.)

Рассматривается проблема получения численных результатов для флюктуаций в каскадных процессах. Формальное решение для функции распределения Ф, полученное Месселем и сотрудниками, содержит интегралы, численное решение которых оказывается затруднительным даже с помощью электронных счетных машин. Более простой оказывается задача вычисления моментов различных порядков от функции распределения, общие выражения для которых также получены Месселом и сотрудниками. В качестве предварительной, наиболее простой задачи рассматривается ядерный каскад в однородной неограниченной среде. Приводятся результаты вычисления первых трех моментов до глубины в 35—40 пробегов столкновения. Описывается техника вычисления с помощью счетных машин. Первый момент вычисляется непосредственно и с использованием метода перевала. С точностью до нескольких процентов полученные результаты совпадают. Второй и третий моменты вычисляются с использованием метода перевала. Описывается методика построения функции распределения по ее моментам. Обсуждается будущая программа вычислений физически более интересного и математически более сложного случая электронно-фотонной лавины с применением электронных счетных машин и метода Монте—Карло (Univ. of Sydney, Сидней, Австралия)

В. Х.

5979. **Рассмотрение гистограмм функций путем обращения свертки. Турнари** (Considérations sur l'histographie des fonctions, notamment dans l'inversion du produit de composition. Tournarie Mex), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 21, 2509—2512 (франц.)

Рассматриваются различные аспекты задачи аппроксимации функции $f(t)$ с помощью свертки

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_f(t/\tau - x)\, g_h(x)\, dx$$

применительно к обработке опытных данных.

О. С. Парасюк

5980. **Остаточный член формулы Тейлора при вычислении «приведенной» суммы страховых взносов в зависимости от уровня банковского процента при большой величине последнего. Лах** (Das Restglied der Taylorschen Reihe des Rentenbarwertes und einige Formeln des Zinsfussproblems für grosse Zinsspannungen. Lah Ivo), Skand. aktuarietidskr., 1955, № 3—4, 165—179 (нем.)

Пусть l_x — величина, характеризующая процент лиц, доживающих до возраста x (z — целое), x — возраст страхующегося в момент заключения страхового договора, i — уровень банковского процента, ω — возраст, до которого заключается страховой договор. Тогда можно принять, что ежегодная выплата равного страхового взноса, начиная с возраста x, равносильна уплате застраховавшимся в момент заключения договора, в $a(x, i)$ раз большей суммы денег, где

$$a = \sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t}/l_x\,(1+i)^t.$$

Гюттингер вывел формулу приближенной экстраполяции $a(x, i)$ по i; в работе выведена более сложная, но и более точная формула, причем ее большая точность иллюстрируется примером, в котором значения l_x взяты из данных статистики. М. Л. Бродский

5981. **О наложении условий на границах в электрических сетках из сопротивлений. Юар-де-ла-Марр** (Sur l'imposition des conditions auxlimites dans les réseaux de conductances. Huard de la Marre P.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 385—395 (франц.; рез. англ.)

Описывается использование электрической сетки для решения дифференциальных уравнений в частных производных типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=i,$$

где λ, μ, i — известные функции от x и y, когда эти уравнения представлены в конечно-разностном виде. Ошибка, получаемая от замены частных производных конечными разностями, зависит от вида выбранной сетки. Принимая во внимание этот факт, предложены различные системы сеток. Точность решения, получаемая на сетке, также существенно зависит и от того, насколько данная граница области близка к границе сеточной области, а также насколько близко совпадают при этом граничные условия. Целью данной работы является изучение различных методов определения граничных условий по контуру сеточной области. В частном случае рассмотрены задача Неймана и области, содержащие точки, в которых имеют место бесконечные градиенты. Последний метод основан на использовании формул интерполирования, которые отличаются от классических полиноминальных формул 2-й степени. Г. К. Кузьминок

5982. **Анализ Фурье однородной турбулентности. Биркгоф** (Fourier synthesis of homogeneous turbulence. Birkhoff Garrett), Trans. Sympos. Appl. Math., 1953. I, New York, 1954, 19—44 (англ.)

5983. **О происхождении ошибок при вычислениях с непрерывными дробями. Мейкон, Баскервилл** (On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions. Macon Nathaniel, Baskervill Margaret), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, 3, № 3, 199—202 (англ.)

Отправляясь от идей Хаусхолдера, авторы дают оценку погрешности, возникающей при пользовании непрерывными дробями, выражая ее в виде непрерывной дроби. Границы погрешности, получаемые с помощью этих оценок, являются довольно узкими, что иллюстрируется примером. А. Е. Божанова

5984. **Установление аналитического вида функций по методу Коши для целей фильтростроения. Листов В. Н.**, Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1956, вып. 151, 37—60

В элементарной форме изложены некоторые известные сведения, необходимые при расчете фильтров: об эллиптических функциях и их свойствах, о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля, об эллиптических интегралах и некоторые другие.

К. А. Карпов

5985. **«Вспомогательные символы» Хаусбрандта и применение их при вычислениях. Сениссон Витольд.** Геод. и картография, 1956, № 10, 14—23

5986. **Замечания по поводу «Дополнения к вопросу о приближенном решении уравнений». Конрад** (Bemerkungen zum «Beitrag über die Behandlung der Näherungslösungen von Gleichungen». Conrad Rudolf), Math. und Phys. Schule, 1956, 8, № 10, 443—445 (нем.)

Замечания о погрешности приближенных вычислений.

5987. **Способ случайных испытаний при хронометраже. Адам** (Stichprobenverfahren im Zeitstudienwesen. Adam A.), MTW-Mitt., 1956, 3, № 6, 280—282 (нем.)

Рассматриваются два метода определения непроизводительного времени в процессе производства при помощи случайных испытаний. Обычно относительное производительное время определяется как отношение $p=t/T$ непроизводительно израсходованного времени ко всему затраченному времени. Для определения p делается n испытаний и определяется отношение числа случаев непроизводительной работы к полному числу испытаний. Недостаток этого метода в том, что в течение конечного интервала времени, когда производится испытание, может происходить переход от непроизводительного времени к производительному или обратно. Для устранения этого недостатка авторы предлагают отмечать при каждом испытании не только факт наступления соответствующего события, но и продолжительность этого события и определять p как отношение полного непроизводительного времени $\sum t_i$ во время испытаний ко всему времени $\sum T_i$, затраченному на испытания. В. Я. Евфанов

5988. **Нахождение стейнеровых систем триплетов 15-го порядка. Холл, Свифт** (Determination of Steiner triple systems of order 15. Hall Marshall, Jr, Swit J. D.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 52, 146—152 (англ.)

Стейнеровой системой триплетов порядка n называется множество всех троек (триплетов), составленных из n различных знаков, удовлетворяющих следующим требованиям: каждая тройка состоит из разных знаков и каждая пара различных знаков может входить не более чем в одну тройку. Описывается программа, находящая все неизоморфные системы 15-го порядка.

Вычисления состояли из двух этапов. На первом этапе с помощью подсистемы из восьми троек, входящей с точностью до изоморфизма в любую систему триплетов 15-го порядка, строилось около 5000 систем, наверняка заключающих в себе все неизоморфные системы. Приведена краткая логическая схема соответствующей программы. Второй этап состоял в фактическом выделении неизоморфных систем, производившемся путем вычисления инвариантов систем. Инвариантами являлись специальные симметрические матрицы 15-го порядка, эквивалентные для изоморфных систем.

Вычислениями, производившимися на машине СВАК, было найдено 80 неизоморфных систем. А. П. Ершов

5989. **Автоматическое вычисление нервной возбудимости. Кол, Антосевич, Рабинович** (Automatic computation of nerve excitation. Cole K. S., Antosiewicz H. A., Rabinowitz P.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, 3, № 3, 153—172 (англ.)

Описание решения на вычислительной машине СЕАК системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение ионных токов, проходящих через оболочку нервного волокна (аксона) при его возбуждении. Основное содержание статьи состоит в специальном анализе полученных результатов и в сопоставлении их с экспериментальными данными. П. А. Ершов

5990. **Ряд для F-функции. Бинфорд** (A series for the F-functions of shielding computations. Binford F. T.), Nucleonics, 1956, 14, № 12, 62—63 (англ.)

Устанавливается соотношение

$$F_n(x)=\int_0^{\pi/2} e^{-x\sec\theta}\sin\theta\cos^{n-1}\theta d\theta=$$

$$= \frac{e^{-x}}{n!} \sum_{j=1}^{j=n} (n-j)!\, x^{j-1} (-1)^{j+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^n}{n!} [-Ei(-x)],\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$F_0(x) = -Ei(-x) \equiv \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx.$$

5991. **Изображения разбиений. Комет** (Notations for partitions. Comét Stig), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 52, 143—146 (англ.)

Разбиением $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ натурального числа n называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Заметка посвящена описанию трех способов «кодировки» разбиений для их изображений в вычислительных машинах в виде двоичных дробей.

1-й способ. Разбиение $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ изображается числом вида $2^{-\lambda_1} + 2^{-\lambda_1-\lambda_2} + \ldots + 2^{-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_p}$, содержащим в дробной части сначала $\lambda_1 - 1$ нулей, затем единицу, затем $\lambda_2 - 1$ нулей, затем опять единицу и т. д.

2-й способ использует запись разбиения в виде $(\lambda_1^{a_1}, \lambda_2^{a_2}, \ldots, \lambda_m^{a_m})$, где $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m > 0$ и все $a_i > 0$. λ_i — составляющие слагаемые, а a_i — число вхождений λ_i в разбиение. Пусть $b_2 = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ $(i < m)$ и $i_m = b_m$. Тогда разбиение изображается двоичной дробью, имеющей справа от запятой подряд a_1 нулей, затем b_1 единиц, затем a_2 нулей, b_2 единиц и т. д.

3-й способ. Пусть $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_m, \beta_m$ — число двоичных разрядов в изображении чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_m, b_m$ соответственно. Изображение разбиения состоит из двух частей. Первая часть является дробью, имеющей справа от запятой подряд α_1 нулей, затем β_1 единиц, α_2 нулей и т. д. Вторая часть является дробью, составленной подряд из двоичных представлений чисел $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_m, b_m$.

Необходимые элементы разбиения получаются из его изображения с помощью операций нормализации, сдвига и взятия поразрядного дополнения. Первый способ требует для изображения разбиений чисел, не превышающих n, n двоичных разрядов, второй способ — $(n+1)$ разрядов и третий способ, примерно $\sqrt{32n+4} - 2$ разрядов, приближаясь, таким образом, к оптимальной оценке, асимптотически равной $3{,}7\sqrt{n} - \log_2 n - 2{,}79$ двоичных разрядов.

А. П. Ершов

5992. **Графическое интерполирование квадратов и квадратных корней чисел. Гарр** (Interpolation graphique des carrés et des racines carrées des nombres. Garres Pierre), Rev. géom.-experts et topogr. franç., 1955, 117, № 5, 333—336 (франц.)

Для приближенного графического интерполирования квадратов и квадратных корней чисел, извлекаемых из таблиц, предлагается счетная анаформированная номограмма, обеспечивающая для $N \leqslant 200$ предельную относительную ошибку менее $35 \cdot 10^{-5}$. Приведен расчет предельной относительной ошибки гипотенузы прямоугольного треугольника, квадраты катетов которого определяются с помощью номограммы. Полученный результат $(275 \cdot 10^{-4})$ автор находит приемлемым для приближенных полевых подсчетов. М. Л. Р.

5993. **Графическое решение систем линейных алгебраических уравнений. Погребысский И. Б.**, Укр. матем. ж., 1955, 7, № 4, 419—422

Предлагается графический способ решения системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

основанный на истолковании каждого из уравнений системы (1) как уравнения гиперплоскости в n-мерном евклидовом пространстве. Общие точки всех этих гиперплоскостей — решение системы (1) — находят, рассматривая следы каждой гиперплоскости в некоторых из двумерных координатных плоскостей, совмещенных на одном чертеже. Точки пересечения гиперплоскостей, заданных своими следами в двумерных координатных плоскостях, находятся графически, причем пользуются естественным обобщением известного правила начертательной геометрии.

С. В. Смирнов

5994. **Оценка быстроты сходимости последовательных приближений и контроль построения при графическом интегрировании. Штыкан А. Б.**, Инженерный сб., 1956, 24, 209—216

При графическом построении решений дифференциальных и интегральных уравнений методом последовательных приближений нет необходимости строить приближение, точность которого превышает 0,1 *мм* (толщина карандашной линии). Если заранее известно, что следующее приближение отличается от найденного на величину, не превышающую 0,1 *мм*, то на этом процесс следует остановить. В работе получаются формулы для оценки максимальной разности двух следующих друг за другом приближений при линейной и параболической аппроксимациях.

Ю. Н. Днестровский

5995. **Погрешности номографических расчетов. Ленский М. М.**, Инженерный сб., 1955, 22, 223—230

Рассматриваются погрешности, возникающие при пользовании номограммами из выравненных точек при интерполировании на шкалах и при пользовании индексом выравнивания, т. е. при перенесении реальных точек на чертеже номограммы.

Абсолютная погрешность интерполирования вычисляется по формуле $\Delta w = \frac{h}{\lambda}\varepsilon$, где Δw — абсолютная погрешность ответа, прочтенного на шкале (w), λ — длина деления, которому принадлежит точка w, h — цена деления, ε — константа номограммы. Для графического определения абсолютной погрешности интерполирования предлагается построение тени шкалы — кривой, точки которой получают, откладывая на нормалях в соответствующих точках шкалы (w) отрезки Δw. Аналогично может быть построена «тень» относительной погрешности. Понятие тени шкалы связывается с характеристикой шкалы по М. В. Пентковскому.

Для ответной шкалы номограммы подобным же способом строится графический эквивалент формул, предлагаемых автором для вычисления погрешностей перенесения.

С. В. Смирнов

5996. **Номограмма для вычисления и деления площадей. Бастар** (Abaque de calcul *et* de division des surfaces. Bastard Jacques), Rev. géom.-experts et topogr. franç., 1955, 117, № 7, 495—499 (франц.)

На изображение фигуры, площадь которой подлежит определению (треугольник, четырехугольник и другие, сводимые к этим простейшим), накладывается пластинка из прозрачного плексигласа, толщиной 2 *мм* с выгравированной сеткой кривых. В 2 приема снимаются: а) со вспомогательной сетки из параллельных прямых — половина высоты треугольника или полусумма высот треугольников, из которых состоит четырехугольник; б) с основной сетки — искомая площадь по полученному аргументу высоты и основанию фигуры. Номограмма может быть использована также и для деления площадей. М. Л. Р.

5997 К. **Номография. Атен** (Nomographie. Athen Hermann. Frankfurt, M.—Pinneberg,

Salle, 1956, 56 S., ill., 4.80 DM)., Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, A, № 29, 2040 (нем.)

5998 К. **Численные и графические вычисления. Гоу** (Calculs numériques et graphiques. 8 éd. Gau Emile. Paris, A. Colin, 1956, VI, 206 p., ill., 300 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 22, 511 (франц.)

5999 К. **Численный математический анализ. Скарборо** (Numerical mathematical analysis. 3rd ed. Scarborough James Blaine. Baltimore, Md., Johns Hopkins Press, London, Oxford Univ. Press, 1955, XXI, 554 pp. ill., 48 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 329, 13 (англ.)

6000 К. **Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Панов** (Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren. Panow D. J. Akademie-Verlag, Berlin, 1955, X, 130 pp., 12.00 DM) (нем.) Из Math. Revs, 1956, 17, № 2, 196.

6001 К. **Вычислительные центры** (Il centro di calcoli numerici. Milano, Tip A. Cordani, 1955, 16 p.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 68 (итал.)

6002 К. **Уравнения третьей и четвертой степеней. Торторичи** (Equazioni e problemi di terzo e di quarto grado. Tortorici Pietro. Palermo, Tip. A. Renna, 1955, 176 p., 850 l.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 72 (итал.)

6003 Д. **О равносильности и преобразованиях схем программ. Янов Ю. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Матем. ин-т. АН СССР, М., 1957.

ТАБЛИЦЫ

6004. **Таблицы матриц, обратных конечным отрезкам матрицы Гильберта. Савидж, Лукач** (Tables of inverses of finite segments of the Hilbert matrix. Savage I. Richard, Lukacs Eugene), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1954, № 39, 105—108 (англ.)

Пусть $H_n = \|(i+j-1)^{-1}\|_{i,j=1}^{n}$, т. е. H_n — «срезанная» бесконечная матрица Гильберта $\|(i+j-1)^{-1}\|_{i,j=1}^{\infty}$. Тогда матрица $T_n = H_n^{-1}$ может быть получена в явном виде, если использовать известную формулу для $\|(a_i+b_j)^{-1}\|_{i,j=1}^{n}$ (РЖМат, 1957), а именно:

$$T_{ij}^{(n)} = (-1)^{i+j}(n+i-1)!\,(n+j-1)!/(i+j-1)\times$$

$$\times[(i-1)!\,(j-1)!]^2(n-i)(n-j).$$

Все $T_{ij}^{(n)}$ целые. Приведены T_n при $2 \leqslant n \leqslant 10$.

М. Л. Бродский

6005. **Таблицы функций $M_0(\tau)$, $N_0(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$, $\Phi_3(\tau)$, употребляемых в уравнениях проблем переноса. Мак-Доналд** (Tables of the functions useful in equation of transfer problems. McDonald Jean K.), Publs Domin. Astrophys. Observ., 1955, 10, № 4, 87—125 (англ.)

Значения функций $M_0(\tau)$, $N_0(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$, $\Phi_3(\tau)$, употребляемых при решении проблем переноса, вычислены при помощи электронных счетных машин с семью десятичными знаками. Даны таблицы этих функций для значений аргумента от 0,001 до 1,000 через 0,001 и от 1,01 до 5,00 через 0,01.

Указанные функции определяются формулами

$$\Phi_r(\tau) = 2\int_\tau^\infty E_n(t)\,E_2(t-\tau)\,dt - 2\int_0^\tau E_n(t)E_2(\tau-t)\,dt =$$

$$= 2\,[2N_{n+1}(\tau) - M_{n+1}(\tau) + 2E_{n+1}(\tau) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}(E_{k+2}(\tau)/(n-k))]$$

где

$$E_n(\tau) = \int_1^\infty t^{-n}e^{-t\tau}dt \quad (\tau \geqslant 0,\ n \text{ — целое} \geqslant 1),$$

$$M_n(\tau) = \int_1^\infty \frac{e^{-t\tau}}{t^n}\frac{\log(t+1)}{t}\,dt,\ N_n(\tau) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{n^n}\frac{\log(t-1)}{t}\,dt.$$

При вычислениях использованы разложения в ряды для функций $M_0(\tau)$ и $N_0(\tau)$ и рекуррентные соотношения для $M_n(\tau)$ и $N_n(\tau)$. В. В. С.

6006. **Таблицы функции излучения Планка $B_\nu(T)$. Мак-Доналд** (Tables of the Planck radiation function $B_\nu(T)$. McDonald Jean K.), Publs Domin. Astrophys. Observ., 1955, 10, № 5, 127—143 (англ.)

Даны таблицы функции Планка

$$B_\nu(T) = 2h\nu^3/c^2\,(\exp\{h\nu/kT\} - 1),$$

где ν — частота, T — температура, c — скорость света; h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана. Функция табулирована для значений температуры от 15000° до 26000° через 200° и от 26000° до 50000° через 500° и для выбранных значений частот от $0{,}001315 \cdot 10^{17}$ сек.$^{-1}$ до $0{,}300000 \cdot 10^{17}$ · сек$^{-1}$. Значения функции $B_\nu(T)$ даны с четырьмя значащими цифрами. Вычисления сделаны при помощи электронных счетных машин. В. В. С.

6007. **Беккер—Дельта (Δ)-вычислительные таблицы. Беккер** (Becker-Delta (Δ)-Rechentafel. Becker W.), Vermessungstechn. Rundschau, 1955, 17, № 4, 129—132 (нем.)

Описываются номограммы для вычисления приращений прямоугольных координат для углов от 0^g до 100^g и расстояний от 10 до 300 *м*. М. А. Гиршберг

6008. **Тригонометрические функции в десятичной градовой системе. Берри** (Centesimal trigonometric functions. Berry Ralph Moore), Surveying and Mapping, 1954, 14, № 3, 282 (англ.)

В настоящее время во многих странах Европы нашли применение угломерные инструменты с кругами, разделенными на грады и десятичные доли града. К концу войны много подобных инструментов появилось в США. В связи с этим обращается внимание геодезистов на существующие таблицы тригонометрических функций, в которых аргументы выражены в десятичной системе: А. Наставление № 1 Картографической службы армии США содержит пятизначные таблицы натуральных значений синуса и тангенса через каждую десятичную минуту ($0{,}01^g$), а также таблицы перевода значений углов из градовой системы в градусную и обратно. Б. Петерс Дж. Таблицы семизначных значений тригонометрических функций, изданные Ин-том прикладной геодезии в 1952 г. во Франкфурте. Таблицы содержат натуральные значения четырех тригонометрических функций для значений углов через каждую градовую секунду. В. Восьмизначные таблицы натуральных значений синусов, косинусов и тангенсов, изданные Международным геодезическим и геофизическим союзом. Значения функций даны через 0.01^g, а для получения восьмизначных значений произвольных углов служат специальные интерполяционные таблицы. Ф. Л. М.

6009. **Таблицы для вычисления логарифма любого числа с 25 десятичными знаками. Солзер** (Radix tables for finding the logarithm of any number to 25 decimal places. Salzer Herbert E.), Nat.

Bur. Standards Appl. Math. Ser., 1954, № 37, 143—144 (англ.)

Дан простой метод вычисления логарифмов и антилогарифмов чисел с большим числом знаков, использующий приведенную в статье небольшую таблицу, дающую значения $\ln x$ и $\ln(1\pm10^{-n})$ с 28 десятичными знаками для $x=2$ (1) 10, $n=1$ (1) 14. Метод позволяет получить значения логарифмов и антилогарифмов чисел с ошибкой, меньшей половины единицы 25-го десятичного знака. Подробно разобран пример на вычисление логарифма. Способ может быть распространен на получение логарифмов и антилогарифмов чисел с любым числом знаков. Н. М. Бурунова

6010 К. **Таблицы возведения в степень при основаниях от 0,00001 до 1000 и показателях от 0,01 до 4.** (2-е доп. изд.). **Тишин С. Д.** М., Госстатиздат, 1956, 318 стр., 11 р. 60 к.

6011 К. **Пятизначные логарифмические таблицы. Ржевский** (Tablice logarytmiczne pięciocyfrowe. Dla podziału koła na 400 g. Ryżewski Kazimierz. Warszawa. Państw. Przedsięb. Wydawn. Kartogr., 1956, L. 215 s., 32 zł.), Przew. bibliogr., 1956, 12, № 28, 415 (польск.)

6012 К. **Пятизначные таблицы логарифмов. Пинту** (Tábuas de logaritimos com cinco decimais. 2. ed. Pinto Hébert Feliciano. Rio de Janeiro. Ed. Científica, 1956, 206 p. 60 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 2, 81 (порт.)

6013 К. **Таблицы логарифмов и тригонометрических функций. Санчес-Рамос** (Tables de logaritmos, trigonométricas y de cálculos de interés. 19 ed. estereotipada al galvanismo y considerabl. aumentada. Sánchez Ramos Eusebio. Madrid, Hernando, 1955, LXXXIII, 240 p., 50 ptas), Bibliogr. hispánica, 1956, 15, № 6, 163 (исп.)

6014 К. **Таблицы логарифмов и тригонометрических функций. Нильсон** (Tábus logarítmicas e trigonométricas cinco decimais. Nielsen Kaj L. Rio de Janeiro, Ao Livro Técn., 1956, XXI, 127 p. 60.00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1956, 4, № 4, 184 (порт.)

6015 К. **Таблицы функции arc sin z** (Tables of the function arc sin z. Ann. Harvard Univ. Comput. Lab. 40. Cambridge (Mass.) Harvard Univ. Press, London, Oxford Univ. Press. 1956, XXXVIII, 586 pp., ill., L. 5), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 340, 9 (англ.)

6016 К. **Пятизначные таблицы логарифмов. Мюллер, Райна** (Tavole di logaritmi con cinque decimali. 41 ed. Müller O., Rajna M. Milano U. Hoepli, 1956, XXXII, 224 p., 350 l.), Bibliogr. ital., 1956, № 657—659, 71 (итал.)

6017 К. **Пятизначные логарифмо-тригонометрические таблицы. Смоли, Смоли, Смоли** (Five decimal logarithmic trigonometric tables: natural trigonometric functions including secant and cosecant, squares, cubes square roots, etc., areas circumferences of circles for diameters to 200 by one eighths. Smoley Constantine Kenneth. 4th ed. extend. by Smoley E. R., Smoley N. G. Chautauqua (N. Y.) Smoley, London, Techn. Press, 1956, 5, 193 pp., ill., 12 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 368, 10 (англ.)

6018 К. **Математические таблицы. Том 2. Таблицы перевода прямоугольных координат в полярные и обратно. Невилл** (Mathematical tables. Vol. 2: Rectangular—polar conversion tables. Compl. Neville E. H. Cambridge, Univ. Press, 1956, XXXII, 169 pp., ill., 30 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 333, 10 (англ.)

6019 К. **Численное решение систем линейных уравнений. Куффиньяль** (Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Couffignal Louis (Collect. manuels calculs techn., 2. Paris, Gauthier—Villars, 1956, 180 p., ill.) (франц.)

Книга посвящена численному решению систем линейных алгебраических уравнений:

$$Ax=B. \qquad (1)$$

Автор предлагает вниманию читателя формулы для погрешности решения системы (1) и (в зависимости от имеющихся вычислительных средств) те или иные приемы счета.

Плохо обусловленные системы и аномалии, возникшие как следствие применения способа наименьших квадратов, выделены особо. Изложение основных теоретических положений сопровождается числовыми примерами, демонстрирующими обоснованность выбранного приема. Книга рекомендуется в качестве пособия для широкого круга инженерных работников.

Содержание книги по главам следующее: 1. Определения и обозначения. 2. Ранг, определители матриц. 3. Формальное решение системы линейных уравнений. 4. Численное решение системы линейных уравнений. А) Нормальные системы. В) Общее решение нормальных систем. С) Общие системы линейных уравнений. 5. Практическое решение систем линейных уравнений.

А. И. Взорова

См. также: 5469, 5470, 5471, 5574, 5638, 5649, 5816, 5850 К, 5927

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

6020. **Релейная вычислительная цифровая машина «Опрема». Кеммерер** (Die programmgesteuerte Relaisrechenanlage «Oprema». Einsatzmöglichkeiten und Erfahrungen. Kämmerer W.), MTW-Mitt., 1956, 3, № 5, 225—230 (нем.)

Сообщается о цифровой релейной вычислительной машине «Опрема», разработанной и построенной на заводе Цейсса в Иене. Машина пущена в эксплуатацию в августе 1955 г. В конце года была сделана вторая машина этой марки. В статье приведены некоторые данные «Опремы». Мощность, потребляемая установкой, около 40 *вт*. Машина 3-адресная. Программа набирается на 6 штеккерных платах, каждая из которых имеет 50 строк. На каждой строке помещается отдельная инструкция. Машина выполняет следующие операции: алгебраическое сложение, умножение, деление, возведение в квадрат, операцию условной передачи управления и операцию «стоп».

Адреса чисел, с которыми производятся действия, кодируются 6-разрядными двоичными числами, а адрес результата содержит 5 разрядов, что соответствует 32 рабочим ячейкам машины. Каждая ячейка представляет собой группу поляризованных электромагнитных реле. Кроме оперативных рабочих ячеек, машина содержит 348 входных ячеек. Числа в этих ячейках набираются с помощью штеккеров. 28 ячеек объединены в группу констант, а остальные 320 разбиты на 4 группы по 80 строк в каждой. Каждой из 4 последних групп соответствует свой адрес. При первоначальном появлении одного из этих адресов выбирается число

из соответствующего накопителя; номер строки, из которой выбирается это число, перед началом вычислений указывается на пульте управления. При втором появлении адреса выбирается следующее число и так до 80-й строки; после 80-й строки выбирается 1-я и т. д. опять до 80-й. Таким образом образуется цикл. Это нормальный цикл машины. Но строки могут быть закоммутированы так, что можно осуществлять переход не к следующей строке, а к любой другой, миновав одну строку или группу строк. Такая возможность безусловного переключения предусмотрена и в программных платах, причем можно коммутировать между собой не только строки одной платы, но и строки различных плат.

Машина осуществляет также условные переходы. Условный переход зависит от состояния 3 дискриминаторов. Так, например, при условном переходе по 1-му дискриминатору проверяется число по 1-му адресу. Если это число является «нулем», то осуществляется переход к следующей строке, а если по 1-му адресу стоит не нуль, то — к строке, указанной в инструкции условного перехода. Соответственно по 2-му дискриминатору проверяется, положительное или отрицательное число стоит по 1-му адресу. При переходе по 3-му дискриминатору производится проверка числа, стоящего по 1-му адресу на «бесконечность».

Числа представляются в полулогарифмической форме; мантисса представляется 8 десятичными цифрами, причем первая из этих цифр всегда отлична от нуля. Порядок может измениться от 0 до ± 15. «Нуль», «неопределенность» и «бесконечность» представляются в машине особыми знаками, с которыми она может оперировать. Нормализация чисел автоматически производится после каждого действия. Вывод чисел производится при помощи специальной электрической печатающей машины в полулогарифмической форме.

Г. С. Горячева

6021. Электронная вычислительная машина Z-4 Цюрихского федерального политехнического института и ее применение для решения уравнений эллиптического типа. Штифель (La machine à calculer arithmétique «Z4» de l'École Polytechnique Fédérale à Zurich (Suisse) et son application à la résolution d'une équation aux dérivées partielles de type elliptique. Stiefel E.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 33—40, Discuss. 113—115, 210, 347—354 (франц.)

Сообщение о проектировании машины Z-4 (РЖМат, 1954, 4617). Описывается устройство и принцип действия машины. С момента ввода в эксплуатацию, помимо решения ряда незначительных проблем, было произведено обращение матриц до 16-го порядка, интегрирование системы 8 дифференциальных уравнений, вычисление максимума семейства функций, зависящего от пяти параметров, решение бигармонических уравнений.

Р. Д. Бачелис

6022. Мюнхенская электронная счетная машина ПЭРМ. 2-я часть. Пилоти, Пилоти, Лейлих, Прёбстер (Die programmgesteuerte elektronische Rechenanlage München (PERM), 2. Teil. Piloty H., Piloty R., Leilich H. O., Proebster W. E.), Fernmeldetechn. Z., 1955, 8, № 12, 650—658 (нем.; рез. франц., англ.)

Приводится описание элементов арифметического и запоминающего устройств машины ПЭРМ (PERM) и их схемы. Все логические схемы в машине выполнены на лампах. Диоды используются только для разделительных целей. Описана работа сумматора и приведена его схема. Сложение выполняется за два такта. В первом такте производится суммирование без учета переноса, во втором учитывается перенос. Время сквозного переноса на 41 разряд составляет 1,3 мксек. Сумматор работает с частотой 330 *кгц*, сдвиги в арифметическом устройстве выполняются на частоте 700 *кгц*.

Приведены параметры магнитного барабана. Длина 22 *см*, диаметр 10 *см*, скорость 15000 об/мин. Информация на барабане разбита на 4 группы по 50 дорожек в каждой. Максимальное время обращения к барабану составляет 4 *мсек*. Приведена схема управления выбором числа, а также схемы записи и считывания для магнитного барабана. Дается конструктивное описание головки. Головки работают на частоте около 500 *кгц*. На одной дорожке барабана записано 2048 имп.

В машине используются четыре основных уровня питающих напряжений: 100 *в*, +40 *в*, +150 *в* и +300 *в*.

В статье приводятся некоторые методы контроля машины. Указывается скорость выполнения отдельных операций без учета времени выбора чисел.

Операции	С фиксированной запятой в мксек.	С плавающей запятой в мксек.
Сложение	8	30 . . . 1000
Умножение	170. . . 330	180 . . . 340
Деление	350	360 . . . 1000

Машина без барабана, стойки питания и пульта управления занимает объем 5×2×0,4 *м* и включает в себя 2400 электронных ламп и 3000 германиевых диодов.

Д. А. Кузьмичев

6023. Сокращенное умножение в параллельной десятичной вычислительной машине. Петерик (Multiplication abrégée dans un auto-calculateur parallèle décimal. Petherick E. J.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 1953, 37, 41—51, Discuss. 113—115, 210, 347—354 (франц.)

В английском Авиационном центре в Фарнборо (Royal Aircraft Establishment, Farnborough) заканчивается монтаж релейной вычислительной машины с программным управлением RAE SCC. В дальнейшем предусмотрена замена реле декатронами (РЖМат, 1955, 3452). Машина работает в десятичной системе счисления. Числа представляются в полулогарифмической форме $\pm A \times 10^{\pm p}$, где A — семизначное и $1 < A < 10$, а p изменяется от — 49 до +49. Система программирования трехадресная. Ввод и вывод данных осуществляется посредством перфоленты. Запоминающее устройство — на магнитном барабане. Приведен список 27 операций, выполняемых машиной. Скорость выполнения основных операций следующая: сложение и вычитание 0,5 сек., умножение 0,5—1,0 сек., деление и извлечение квадратного корня 4 сек., вычисление значений синуса и косинуса 5 сек. Передача числа в сумматор в прямом или обратном коде (вычитание) осуществляется за один цикл, состоящий из 10 имп. (последовательно-параллельная система передачи чисел). Девять импульсов — для передачи числа, десятый импульс осуществляет перенос десятков. Умножение множимого на один разряд множителя осуществляется также за один цикл, причем цифра множителя всегда меньше или равна пяти, что достигается соответствующим преобразованием множителя.

Например: 137 — 100 + 40 — 3,
157 — 200 — 40 — 3.

Окончательное произведение получается в сумматоре путем добавления или вычитания, при соответствующем

поразрядном сдвиге, частных производных множимого на соответствующие цифры множителя. Н. Н. Поснов

6024. **Электронные вычислительные машины** (Electronic computers), Mach. Lloyd. Overseas Ed., 1956, 28, № 17, 93—94 (англ.), 92 (исп.)

Дается общее описание электронной вычислительной машины UNIVAC-File и сообщается о выпуске машины УНИВАК II. UNIVAC-File предназначена для автоматизации конторских работ: составления балансовой ведомости, расчетов по использованию машинного оборудования, составления калькуляции себестоимости, учета продукции и сырья.

Данные вводятся либо с бумажной, либо с магнитной ленты, с перфокарт и с клавиатуры.

Внутреннее запоминающее устройство на магнитных барабанах. Результаты печатаются в форме ежедневного отчета.

При вводе исходных данных производится автоматическое их дублирование на контрольные перфокарты, отбор по одинаковым индексам и выдача данных на сумматор.

Машина производит сопоставление новых данных с находящимися в хранении, вычисление новых итогов и запись их на определенном магнитном барабане. Встроенные схемы контроля гарантируют правильность результатов, необходимость двойного счета отпадает.

За 8 час. работы машина обрабатывает до 100 000 не отобранных заранее данных.

Недавно выпущена машина УНИВАК II с внутренним запоминающим устройством на магнитных сердечниках, на 2000 чисел. Внешнее запоминающее устройство — магнитная лента с плотностью записи 8 имп. на 1 *мм* (вместо 5 в УНИВАК I), что позволяет записать 3 млн имп. на ленте, намотанной на бобине диаметром в 200 *мм*. С. П. Кузнецов

6025. **СЕЕР — последовательный экстраполирующий автомат. Хейгелбарджер** (SEER, a sequence extrapolating robot. Hagelbarger D. W.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, 5, № 1, 1—7, 35 (англ.)

Приводится подробное описание схемы и стратегии игры релейной играющей машины, построенной фирмой Белл (Bell). Игра ведется следующим образом: человек с помощью ключа на пульте устанавливает + или —. Машина с свою очередь также выбирает + или —. Затем машина проводит сравнение; если результаты совпадают, что выигрывает машина, если не совпадают, то выигрывает человек. Стратегия игры машины заключается в том, что она улавливает и запоминает некоторый шаблон в игре противника. Из 9795 игр, сыгранных машиной с обслуживающим персоналом фирмы Белл, машина выиграла 5218 игр и 4577 проиграла. Указывается, что данная машина явилась предшественницей музыкально-композиционной машины Пирса (Pierce); кроме того, указывается, что принципы, заложенные в данной машине, будут использованы для устройств, автоматизирующих и ускоряющих работу телефонных станций. Н. Н. Поснов

6026. **Эра арифметических машин. Буше** (L'ère des machines arithmétiques. Boucher H.), Rev. maritime, 1956, № 121, 546—562 (франц.)

В популярной форме объясняются общие принципы устройства и работы цифровых электронных вычислительных машин.

Приведены краткие характеристики некоторых американских и английских цифровых электронных вычислительных машин. Сообщается, что машины ИБМ-650 и ИБМ-704 будут поставляться во Францию с конца 1956 г., а ИБМ-705 с начала 1958 г.

Рассматривается состояние вычислительной техники во Франции, которой, по мнению автора, уделяется очень мало внимания. Имеются только две французские фирмы, которые занимаются разработкой и постройкой цифровых электронных вычислительных машин.

Фирма SEA (Société d'Electronique et d'Automatisme) начала разработку электронных вычислительных машин с 1948 г. Фирма выпускает машины CAB (Calculateurs arithmétiques binaires) серии 2000 и CAB серии 3000. Приводится фото узлов машины CAB-2022 (РЖМат, 1955, 3453, 6139). Построена электронная вычислительная машина CAB-5040. Машина работает с сорокаразрядными двоичными числами. Запятая плавающая. Запоминающее устройство: на ферритовых сердечниках — 512 чисел и на магнитном барабане — 4096 чисел. Скорость умножения 210 мксек.

Фирма BULL начала производство цифровых электронных вычислительных машин в 1952 г. За три года выпущено более двухсот электронных перфораторов GAMMA (РЖМат, 1954, 1839; 1955, 3453), которые по своим техническим данным лучше аналогичных американских машин.

Выпускается электронная вычислительная машина для научных расчетов GAMMA-3B, которая по своим возможностям может конкурировать с американской машиной ИБМ-650. Н. Н. Поснов

6027. **Вычислительные машины Лондонского университета. Бут** (La machine à calculer électromagnétique de l'Université de Londres. Booth A. D.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 1953, 37, 29—31. Discuss., 113—115, 210 (франц.)

К настоящему времени в Лондонском университете находятся в действии три вычислительные машины: АРК — автоматическая релейная вычислительная машина, СЕК — малая электронная вычислительная машина и APE(X)C — универсальная электронная вычислительная машина.

Машина АРК введена в эксплуатацию в 1948 г., она имеет 800 быстродействующих электромагнитных реле. Емкость запоминающего устройства на магнитном барабане 256 21-разрядных двоичных чисел. Вычисления производятся в двоичной системе. Время выполнения сложения и вычитания 50 мсек., умножения и деления — 2 сек. Ввод данных осуществляется с помощью телетайпа.

Вычислительные машины СЕК и APE(X)C также работают по двоичной системе. Машина S. E. C. имеет электромеханическое запоминающее устройство емкостью 50 ячеек (на 21 разряд) с временем выбора $^1/_4$ сек.

Кроме того, СЕК снабжена магнитным барабаном на 256 21-назрядных двоичных чисел. Машина последовательно-параллельная и насчитывает 230 электронных ламп. Сложение и вычитание производится со скоростью 1,4 мсек.

Электронная вычислительная машина APE(X)C универсальная, двухадресная, последовательно-параллельная и насчитывает 415 электронных ламп.

Запоминающее устройство имеет емкость 512 ячеек (на 32 разряда). Скорость сложения и вычитания 600 мксек., умножения 18 мсек. Сообщается, что сооружаются еще две машины типа APE(X)C А. А. Крюков

6028. **Вопросы приемных испытаний цифровых вычислительных машин. Брок, Рок** (Problems in acceptance testing of digital computers. Brock Paul, Rock Sibyl), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, 1, № 2, 82—87 (англ.)

Основным требованием приемных испытаний является уровень надежности, ожидаемый от машины. Приближенно — чем длительнее бесперебойная работа машины при испытании, тем надежнее машина; однако это не дает гарантии, что машина будет работать в следующий час, день. неделю. Приемные испытания де-

монстрируют только тот факт, что машина работоспособна и что при соответствующем уходе ее можно поддерживать на этом уровне надежности.

Все испытания обычно разделяются на проверку вспомогательного оборудования, входных и выходных устройств и проверку машины при решении задач на надежность и правильность выполнения операций. В последнем случае контрольные задачи должны быть заранее проверены, они должны иметь готовые численные результаты для сверки с результатами испытаний. Контрольные задачи рассчитывались обычно на 5÷25 мин. работы машин. Бесперебойное время работы определяется как сумма времен правильно решенных задач. В течение испытаний допускается некоторый заранее оговоренный процент потери времени. Во всех случаях поставщик имеет право прервать испытания в любое время и начать их сначала позднее.

Простейшим методом определения удовлетворительности проведенных испытаний является достижение определенного предварительно установленного процента времени полезной работы. Другой метод определяет ошибки работы. Ошибки классифицируются как главные, требующие вмешательства инженерного персонала, и второстепенные, исправление которых может быть сделано оператором. Испытания считаются пройденными, если за определенный период времени число главных и второстепенных ошибок не будет превосходить ранее предписанного числа. При этом методе также устанавливается предел времени на ликвидацию главных ошибок. Третий метод определения успешности испытаний — статистический метод. По этому методу время испытаний разбивается на ряд одинаковых этапов, внутри которых решается несколько раз контрольная задача, причем учитывается число задач, прошедших без сбоя, и число задач со сбоями. Вероятность i ошибок в течение одного этапа может быть выражена по формуле

$$P(i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

Если достигнут некоторый уровень надежности λ_0, то испытания считаются пройденными. При испытании вычислительной машины фирмы «Консолидэйтид» (Consolidated) допустимое число ошибок выражалось как $\varepsilon \leqslant 0{,}424x - 2{,}97$, где x — число этапов вычислений.

В соглашении о проведении испытаний указывается: 1) основные условия — проведение испытаний до или после установки машины у заказчика, перечисление фаз испытаний (демонстрация операций, контроль входных и выходных устройств, испытание надежности на сложной задаче), определение продолжительности отрезков вычислений, времени простоя и т. д.; 2) описание фаз с условиями успешного прохождения испытаний.

Оборудование, не изготавливаемое поставщиком, не включается обычно в программу испытаний.

В. Д. Князев

6029. **Решение научных задач. Карр III** (Solving scientific problems. Carr III John W.), Control Engng, 1956, 3, № 1, 63—70 (англ.)

Излагается ряд требований, которым должны отвечать электронные вычислительные машины для научных вычислений, и описываются возможности электронных вычислительных машин и некоторые их характеристики.

Большинство вычислительных машин для решения научных задач должны быть универсальными, приспособленными к решению широкого круга задач: от задач аэродинамики и построения ядерных реакторов до логики переключающих схем и построения самих вычислительных машин. Этим они существенно отличаются от коммерческих вычислительных машин или машин, работающих с реальными объектами и решающих узкий круг задач либо одну единственную задачу.

Главное различие научных, коммерческих и работающих с реальными объектами машин заключается во входных и выходных устройствах. Коммерческие машины принимают и выдают огромное количество информации. Машины, работающие с реальными объектами, получают (в полуавтоматическом режиме) информацию от оператора. Машина для научных расчетов должна быть приспособлена к повторению большого количества вариантов одной задачи, и поэтому количество входных и выходных данных бывает сравнительно невысоким.

В статье приводится примерный круг задач, решаемых на вычислительных машинах. Выпускаемые для научных целей вычислительные машины должны быть приспособлены для автоматического кодирования программ. Для машин должны быть приготовлены библиотеки стандартных подпрограмм, сборочные программы и т. д., чтобы максимально облегчить труд программиста.

Автор указывает, что подходящей скоростью ввода для современной вычислительной машины является 200 десятичных цифр в 1 сек. и для вывода — 50 десятичных цифр в 1 сек. Необходимо также обратить серьезное внимание на надежность этих устройств, так как большой процент повреждений падает на них (например, на машине ИЛЛИАК они составляют в среднем до 75% ежемесячных повреждений).

Основной характеристикой машин является надежность работы машины, которая в настоящее время определяется, в основном, числом ламп. Сильным средством предотвращения повреждений является организация профилактического контроля машины на критических режимах.

Предполагается, что удобнее всего применять в работе машины, оперирующие с десятичными или бинарно кодированными числами, представленными в псевдологарифмической форме.

Запоминающие устройства на ферритах или электроннолучевых трубках с временем выборки 10—50 мксек должны обладать емкостью не менее, чем в 1000 кодов. В более дешевых машинах, использующих магнитный барабан (время выборки 5—20 мсек) и работающих в 100÷1000 раз медленнее, емкость запоминающего устройства должна быть не менее 2000 кодов, чтобы можно было, применяя рациональное программирование, ускорить вычисление.

Указывается, что одноадресные машины более гибки, однако трехадресная логика удобнее в использовании. В настоящее время с развитием методов автоматического программирования это различие становится несущественным.

Американские эксплуатационники сходятся на том, что более дорогостоящие машины позволяют получить меньшую стоимость одной операции; например, вычислительная машина на ферритах стоимостью в 1 млн. долл. может сделать более чем в 4 раза больше вычислений, чем 4 малых машины с магнитным барабаном стоимостью по 250 тыс. долл. В. Д. Князев

6030. **Вычисление обобщенных гипергеометрических рядов. Атта, Сангрен** (Calculation of generalized hypergeometric series. Atta Susie E., Sangren Ward C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, 1, № 4, 170—172 (англ.)

Излагается схема подпрограммы для вычисления обобщенных гипергеометрических рядов, составленной для машины ОРАКЛЕ (ORACLE).

Обобщенным гипергеометрическим рядом называется ряд

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q; x) = $$

$$ = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j \ldots (\alpha_p)_j}{(\gamma_1)_j \ldots (\gamma_q)_j j!} x^j, $$

где $(a)_j = a(a+1)\ldots(a+j-1)$, $j = 1, 2, \ldots, \gamma \neq 0, -1, -2\ldots$

При подборе соответствующим образом параметров α и γ так, чтобы $p \leqslant q$, программа может использоваться для вычисления некоторых специальных функций, например: некоторых функций Бесселя, неполной гамма-функции, полиномов Эрмита, Лягерра, Лежандра, Якоби, полных эллиптических интегралов и др. Сообщается, что работа премирована Ассоциацией машинных вычислений. Ф. С. Лось

6031. **Числовое решение некоторых задач нелинейного сверхзвукового потока на вычислительной машине CPC фирмы ИБМ. Бауэр, Хигман** (The numerical solution of certain nonlinear supersonic flow problems on the IBM card programmed calculator. Bower R. E., Higman J. H.), J. Aeronaut. Sci., 1954,, **21**, № 3, 205—206 (англ.)

Сообщается об использовании электронной вычислительной машины CPC фирмы ИБМ для решения дифференциальных уравнений, в частных производных гиперболического типа, к которым приводятся некоторые задачи сверхзвуковых нелинейных потоков. Для приводимых задач процессы вычислений полностью автоматизированы с помощью программирования на перфокартах. Приводится таблица затраты времени для решения некоторых задач.

И. А. Ковалев

6032. **Новое в библиотековедении. Перри, Кент** (The new look in library science. Perry J. W., Kent Allen), Appl. Mech. Revs. 1956, **9**, № 11, 457—460 (англ.)

Отметив важность эффективной библиотечной техники в условиях быстрого накопления огромного количества сведений, авторы выделяют из трех основных функций информационной системы: хранения, идентификации и фактического получения документов, вторую функцию как наиболее интересную и сложную. Затем кратко рассматриваются возможности и недостатки методов и устройств, служащих для выполнения этой функции, таких, как классификационные системы, алфавитное индексирование, карты с вырезками по краям и обычные счетно-аналитические сортировальные машины. Более подробно описываются функциональные возможности такого типа устройств, как селектор, используемый авторами. Среди прочих здесь отмечена возможность такой записи характеристик документа на носителе, которая позволяет последовательно просматривать эти характеристики при поисках. Сами характеристики как в документе, так и в вопросе могут образовывать группы различных уровней сложности, аналогичные «словам», «словосочетаниям», «предложениям», «параграфам» и т. д. Любую группу уровня сложности «n» можно рассматривать как упорядоченную совокупность групп уровня сложности «n-1». Условия выбора документа могут содержать следующие требования относительно строения какой-либо его группы A_n уровня сложности «n» из группы A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1} и т. д.: а) в A_n должны содержаться все заданные группы, причем может быть задан и порядок их следования друг за другом; б) в A_n должна содержаться хотя бы одна из заданных групп; в) в A_n не должна содержаться ни одна из заданных групп. Возможны и различные объединения этих требований, причем в этом случае может быть задан и порядок, в котором должны присутствовать или отсутствовать заданные группы.

Авторы утверждают, что указанные функциональные возможности позволяют получать закодированные рефераты, пригодные для автоматизированных поисков и отражающие в явном виде как классификационные, так и грамматические связи между характеристиками. Главной задачей, по их мнению, является такая обработка больших объемов информации для всей промышленности и основных отраслей науки, чтобы она была экономична и позволяла наиболее эффективно использовать новую поисковую технику.

Примечание референта. Неудачный выбор символов логических операций для записи условий выбора (знак минус, вместо знака отрицания) приводит к ошибочному представлению логического отрицания как операции, противоположной логическому сложению (см. например, формулу в 6 строке сверху на стр. 460). В. П. Черенин

6033. **Программа для вычислений действительных корней полиномов. Бут** (A computer program for finding roots. Booth Andrew D.), Computers and Automat., 1956, 5, № 7, 20—21 (англ.)

Программа составлена для вычисления действительных корней полиномов не выше 31-й степени на машине APE(X)C. После заполнения в «памяти» мест, предназначенных для коэффициентов полинома, программа определяет степень полинома и проводит вычисление его корней. Подробные объяснения позволяют без особых затруднений переписать программу в любом коде. Ф. С. Лось

6034. **Применение цифровых машин фирмы «Литтон» для решения дифференциальных уравнений.** (Applications for Litton-digital differential analysers. DDA Summation, 1956, № 2, 2 pp.) (англ.)

Перечисляются возможные применения цифровых машин для решения дифференциальных уравнений в области математики, механики и техники.

6035. **Внутренняя баллистика.** (Internal ballistics. DDA Summation, 1956, № 3, 6 pp.) (англ.)

Описание способа решения на цифровом дифференциальном анализаторе основной задачи внутренней баллистики. Приводится схема соединений интеграторов.

6036. **Таблица демонстрируемых уравнений** (A tabulation of demonstration equations. DDA Summation, 1957, № 4, 9 pp.) (англ.)

Перечень 31 типа дифференциальных уравнений из области прикладной математики, механики и техники, решаемых на цифровых дифференциальных уравнений анализаторах.

Перечень 24 типов элементарных функций, вырабатываемых внутри машины и требующих от 1 до 15 интеграторов.

6037. **Элементы временного запоминания и лампы специального назначения. Скотт** (Temporary storage elements and special-purpose tubes. Scott Norman R.), Control Engng, 1956, **3**, № 3, 93—98 (англ.)

Описывается ряд схем для временного запоминания (линии задержки, триггеры) и некоторые типы специальных ламп (счетные, кодирующие и т. д.). Сохранение информации на время от долей микросекунды до нескольких микросекунд может быть выполнено при помощи линий задержки. Приводится расчет для Т-образной LC-линии задержки. Линия с распределенными параметрами может быть сделана в виде катушки индуктивности, намотанной на изоляционный сердечник, в который вставлен заземленный проводник. Кратко описывается работа статических триггеров, кипп-реле и мультивибраторов.

Триггерные схемы могут быть построены на транзисторах с точечным контактом либо на поверхностно-барьерных транзисторах, причем последние особенно удобны в логических схемах.

Применение специальных ламп может сильно упростить конструкцию многоламповых узлов машины или более удобно организовать их логику. Специальные лампы могут быть разбиты на 4 группы: 1) переключающие или счетные лампы; 2) кодирующие лампы; 3) арифметические лампы; 4) запоминающие трубки.

Переключающие и счетные лампы подобны друг другу. Такие лампы обычно имеют общий катод, ряд анодов и электростатическую либо магнитную систему фокусировки, разрешающую протекать току только в направлении одного анода. Лампы этого типа с электростатической фокусировкой имеют размеры обычных ламп и электронный луч, сформированный в виде ленты. Ток луча можно получить достаточно большим при малых ускоряющих потенциалах (1 *ма* при 250—300 *в*).

Примером использования формирования и отклонения луча подобного электроннолучевой трубке является «Циклофон» (Cyclophon). В этой трубке луч направляется в одно из 25 отверстий диафрагмы, за которыми расположены соответствующие 25 анодов, связанных с внешней схемой. Это устройство дает на выходе ток 1 *ма* через сопротивление 50 *ком*. При покрытии анодов материалом с большим коэффициентом вторичной эмиссии можно получить на выходе ток до 30 *ма* через сопротивление 1000 *ом*.

В трохотронах небольшое поперечное магнитное поле (100—200 гаусс) заставляет двигаться электроны по трохоидальной траектории вдоль эквипотенциальной линии поля электродов. Изменение на некоторое время потенциала управляющего электрода переводит луч от одного анода к другому. Неудобством является необходимость строгой калибровки управляющего импульса по длительности, так как короткие импульсы могут не перевести трохотрон в следующее состояние, а слишком длительный импульс может переместить электронный луч более чем на один шаг.

Простейшим видом кодирующей трубки является трубка, у которой на пути луча помещена кодирующая пластина с отверстиями, за которыми размещены аноды, связанные с соответствующим двоичным разрядом. Луч сперва отклоняется на величину, соответствующую сигналу, а затем развертывается поперек кодирующей пластины, попадая последовательно на аноды.

Интересная суммирующая лампа предложена Кейтсом, она имеет три анодных сегмента, каждая с отверстием в центре, за которым расположен приемный электрод; такие же приемные элементы расположены за промежутками между сегментами. Положительное напряжение прикладывается к сегментам в зависимости от наличия единиц слагаемых и переноса. Если только одна из цифр равна 1, то через отверстие одного анода проходят электроны к приемному электроду. Если любые 2 цифры равны единице, то ток течет к 2 приемным элементам за этими анодами и, кроме того, к приемному электроду в промежутке между ними, давая сигнал, означающий наличие переходной единицы и т. д. В. Д. Князев

6038. **Запоминающие устройства вычислительных машин. Миллер** (Computers: storage devices Miller J. T.), Instrum. Practice, 1955, 9, № 10, 989—993 (англ.)

Автор рассматривает основные типы запоминающих устройств: линии задержки (ртутные и никелевые), магнитные барабаны, запоминающие устройства на магнитных сердечниках, катодно-лучевые трубки. Описываются принципы работы этих устройств и приводятся их характеристики. Отмечается, что в вычислительной машине «Эллиот 402» короткая линия задержки выполнена на никелевой трубке длиной около 60 *см* и имеет емкость запоминания 34 двоичных разряда. Длинная линия представляет собой никелевую проволоку длиной 7 *м* и имеет емкость 512 двоичных разрядов. Приведены параметры магнитных барабанов, установленных в машинах «Эллиот 402» (Elliott 402) и ГЕК (HEC). Отмечается, что в последнее время в качестве магнитного покрытия применяется намотанная по спирали стальная проволока диаметром 0,1 *мм*. Несколько витков проволоки образуют дорожку.

В. М. Тарасевич

6039. **Арифметические узлы вычислительных машин. Миллер** (Arithmetic units. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1955, 9, № 12, 1178—1180 (англ.)

Рассматриваются примеры сложения чисел в двоичной системе счисления. Приведены примеры сложения на диодной сетке и полусумматоре, разбирается работа матричного диодного дешифратора и триггера.

В. М. Тарасевич

6040. **ТРИДАК — большое моделирующее устройство. Спирман, Гейт, Хамингуэй, Хайнс** (TRIDAC, a large analogue computing machine. Spearman F. R. J., Gait J., Hemingway A. V., Hynes R. W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B103, № 9, 375—390, discuss. 390—395 (англ.)

Подробный доклад о принципе работы, схеме и конструкции моделирующего устройства Королевских воздушных сил Великобритании ТРИДАК (РЖМат, 1955, 4048, 4049, 4050, 6180, 6181), предназначенной для вычислений в трехмерном пространстве траектории одного самолета, преследующего другой самолет, или управляемого снаряда, атакующего цель. Для этого ТРИДАК в первую очередь определяет аэродинамические силы и моменты, действующие на преследующий объект в результате управления им, а также результирующие углы и линейные перемещения этого объекта. Кроме того, ТРИДАК вычисляет перемещение преследуемого и преследующего объектов относительно друг друга, а также сигналы ошибки, которые поступают от пилота или автомата и управляют полетом преследующего объекта. Работающие модели различных систем могут быть исследованы посредством совместной работы реальных и моделируемых составных частей. Так как ТРИДАК должен работать в «реальном масштабе времени», то для его схемы было решено использовать принцип непериодического одноразового действия.

Система перехвата, которую моделируют посредством устройства ТРИДАК, представляет собой замкнутую систему с данными о движении цели в качестве входных условий и данных о движении преследующего объекта (управляемого снаряда) на выходе. Входные данные о преследуемой цели подаются в декартовых координатах, ориентированных параллельно относительно соответствующих осей земли. В цепь обратной связи подаются координаты положения управляемого снаряда, представленные аналогично. Система управления, учитывая аэродинамику полета управляемого снаряда, должна свести ошибку между сигналами на входе и выходе системы к нулю, т. е. осуществить перехват цели. Эта операция должна быть произведена за время, меньшее, чем максимальное время управляемого полета снаряда-перехватчика. Приводится и кратко описывается полная блок-схема системы ТРИДАК с указанием всех электрических и механических входных и выходных величин для каждого блока.

Отклонения управляющих плоскостей относительно корпуса управляемого снаряда определяются в блоке «генерирования функций управляющих плоскостей» и подаются на вход блока «аэродинамических сил» и блока «аэродинамических моментов», которые решают аэродинамические уравнения движения снаряда, определяя его вращение, килевую качку и «рысканье». Таким образом, оказываются определенными угловые ускорения снаряда относительно своих осей координат. Изменения аэродинамических сил и моментов в зависимости от высоты над уровнем моря компенсируются блоком «высота—давление». Блок «программы» используется для учета изменений в вычислениях из-за расхода топлива. При этом учитывается изменение массы, момента инерции, тягового усилия и перемещение центра тяжести. При вычислении эволюций снаряда, последний рассматривается помещенным внутри четырех ортогонально ориентированных карданных подвесов. Наличие четвертого подвеса не вытекает из математических требований. Он используется для устранения эффекта, известного под названием «карданное торможение». Эта «синтетическая карданная система» имитирует гипотетическое положение снаряда.

В блоке «угловых ускорений» определяются угловые ускорения относительно невращающихся осей, координат, совпадающих с мгновенным положением осей снаряда. Последнее производится суммированием ускорений, вызываемых аэродинамическими моментами и ускорениями из-за угловых скоростей вращения осей снаряда. В блоке «вращения» угловые ускорения интегрируются для получения угловых скоростей, которые управляют «синтетической карданной системой». В блоке «линейных ускорений» вычисляются линейные ускорения относительно невращающихся осей координат посредством суммирования ускорений из-за действия аэродинамических и гравитационных сил с ускорениями, вызванными одновременным поворотом осей координат снаряда и переносом их начала. В блоке «преобразования» линейные ускорения интегрируются, и сигналы, соответствующие линейным скоростям снаряда, подаются через цепь обратной связи в аэродинамические блоки. Напряжения, представляющие компоненты ускорений перехватываемой цели, генерируются и интегрируются для получения скоростей цели в блоке «генератор движения цели». Скорости управляемого снаряда и цели относительно координат земли интегрируются в блоке «интегратор курса снаряда и цели» для получения их взаимного положения. Эти данные поступают на блок «система управления имитаторами», который воздействует на органы управления полетом снаряда. Таким образом, система оказывается замкнутой. В системе ТРИДАК могут быть использованы все реальные элементы управляемого снаряда и приборы, связанные с угловыми перемещениями. Линейные перемещения могут только моделироваться. Помещение устройства ТРИДАК позволяет размещать в нем целиком управляемый снаряд так, чтобы отдельные его части могли быть непосредственно включены в работу системы.

В приложениях приводятся основные уравнения, которые входят в состав задачи, решаемой на ТРИДАК: аэродинамические уравнения механики, уравнения четырехкарданной системы и уравнения преобразования осей.

Электронные вычислительные блоки используют известные схемы, сочетающие основной усилитель постоянного тока и усилитель переменного тока для компенсации дрейфа «нуля». Приводятся принципиальные схемы этих усилителей. Напряжение ошибки, вызываемой дрейфом, может быть преобразовано в переменный ток релейным прерывателем либо магнитным модулятором. Последний дает менее точную компенсацию, но более удобен в эксплуатации из-за отсутствия подвижных частей. Прерыватель на базе реле используется лишь там, где требования к компенсации дрейфа особенно велики, т. е. в интеграторах, воспроизводящих точные геометрические зависимости. Магнитные прерыватели используются в интеграторах, воспроизводящих аэродинамические зависимости. Для генерирования нелинейных функций типа $y=kx^2$, $y=k/x$ и $y=k\sin x$ используются диодные схемы. Умножение по формуле $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$ производится в блоке для получения квадрата $y=kx^2$. Точность вычисления произведения не ниже 0,2% от полного значения напряжения. Точность работы электронных блоков ТРИДАК'а зависит полностью от точности сопротивлений и емкостей, используемых в входных цепях и цепях обратной связи усилителей, а также от точности потенциометров, используемых для установки коэффициентов и выбора масштабов.

Кроме электронных решающих элементов, в машине используются гидравлические сервомеханизмы, с помощью которых производится моделирование относительно медленных процессов (высота полета снаряда, направление полета цели). Приводится полная блок-схема гидравлического сервомотора с главной и дополнительной цепями обратной связи. Максимальная угловая скорость выходного вала сервомотора 100 радиан/сек, а ускорение 2500 радиан/сек^2. Специальная сравнивающая система устанавливает вал в начальное положение.

В ТРИДАК вводятся шумы для имитации получения сигнала с радиолокационной станции. Для этого используется либо предварительная запись шумов на магнитную пленку, либо равномерно распределенные по частотному спектру шумы, пропускаемые через соответствующие фильтры.

Блок программы за 25 сек. перед началом решения задачи устанавливает в начальное положение электронные и серво-интеграторы. Те валы, которые должны вращаться с постоянной скоростью, приводятся в движение за 1 сек. до начала решения задачи так, что в момент $t=0$ они находятся в начальном положении и вращаются уже с требуемой скоростью. Для записи искомых результатов четыре трехканальных самописца с переменной скоростью подачи бумаги ведут запись величин, выбранных оператором посредством переключения штеккеров на пульте. Они обеспечивают запись величин с амплитудой ± 37 *мм* при максимальной частоте 15 *гц*. Другие четырехканальные самописцы, использующие для записи высоковольтную искру, применяются для записи колебаний с частотой до 90 *гц* и амплитудой ± 15 *мм*. Для регистрации еще более быстро меняющихся величин используется фотографическая запись на трехканальных осциллографах. Для записи взаимного положения цели и снаряда используются 2 стола размером 205×80 *см*, каждый из которых оборудован двумя перьями, положение которых определяется электрическими сервомеханизмами. Специальные приборы регистрируют среднеквадратичные значения переменных за весь период, а также максимальные и минимальные их значения. Для оператора имеется на пульте специальный стереоскопический экран, на котором имитированный перехват можно наблюдать через поляризованные очки в трехмерном пространстве. Для этого картины для левого и правого глаза проектируются с экранов катодных трубок через синхронно вращающийся поляризующий диск. Подробно описывается система питания ТРИДАК'а и противопожарная защита. Релейная система защиты отключает питание электронных субблоков машины при определенном несоответствии между током накала и током смещения ламп.

ТРИДАК позволяет изучать отдельные компоненты полета снаряда или самолета-перехватчика. Соответствующей коммутацией можно имитировать, например, отдельно вращательное движение, учитывая лишь вращающий момент и вводя соответствующие аэродинамические коэффициенты.

Для быстрого обнаружения места неисправности в ТРИДАК'е используется обширная система визуального контроля. Каждый дрейф, превышающий 3 *мв*, регистрируется как неисправность. Аналогично регистрируется каждая перегрузка усилителя (выходное напряжение превышает 30 *в*). Проводится профилактическая проверка отдельных блоков по контрольным операциям, а также повсеместная проверка ламп в специальных режимах.

Серийное изготовление одной машины оценивается в 250 000 фунтов стерлингов. Однако столь высокая стоимость ТРИДАК'а полностью оправдывается экономией, получаемой от замены запуска управляемых снарядов при отработке системы перехвата имитацией его на машине. Последнее особенно важно для накопления статистического материала, что требует целой серии стрельб. Указываются дальнейшие возможные усовершенствования ТРИДАК'а и условия, при которых его функции могут выполняться цифровой вычислительной машиной, обеспечивающей большую точность. Библ. 12 назв. А. Б. Залкинд

6041. Лаборатория моделирующих устройств. Принс, Райт (The analog computer laboratory. A versatile new research facility. Prince M. David, Wright T. K.), Res. Engr. 1956, **11**, № 3, 15—16, 18 (англ.)

Сообщается об открытии лаборатории моделирующих устройств на экспериментальной технической станции в Джорджии.

Лаборатория оборудована моделирующим устройством, включающим в себя 40 усилителей для суммирования и интегрирования, 34 потенциометра для умножения на постоянные коэффициенты, два электронных перемножителя и два функциональных генератора.

Для соединения элементов в заданную схему имеются четыре взаимозаменяемых коммутационных поля, каждое из которых может быть заранее закоммутировано и быстро вставлено в машину для решения очередной задачи.

В дальнейшем предполагается установить дополнительно более десяти усилителей, четыре электронных функциональных генератора, четыре электронных перемножателя и другое специальное оборудование. А. А. Крюков

6042. Моделирующие устройства. Миллер (Analogue computers. Miller J. T.), Instrum. Practice, 1956, **10**, № 1, 55—57 (англ.)

Дается понятие об электрических и электронных моделирующих устройствах. Рассматриваются четыре функциональных элемента: суммирующее, масштабное, интегрирующее и дифференцирующее. Приводится блок-схема моделирующего устройства для решения дифференциальных уравнений «Miniputer» фирмы «Sonders-Roe» и описываются основные узлы этой машины (РЖМат, 1956, 6229). В. М. Тарасевич

6043. Применение моделирующих устройств. Хилд (Putting the analog computer to work. Heald Carl), ISA Journal, 1956, **3**, № 8, 270—273 (англ.)

Рассматриваются две задачи, решенные с помощью методов моделирования: определение изгибающих моментов, перерезывающих сил и прогиба мостового пролета длиной 10 *м* и расчет характеристик сервосистемы, состоящей из двигателя и генератора, связанных через зубчатую передачу. Характеристики сервосистемы определяются уравнением

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} = -k'\frac{d\theta_0}{dt} - k''\theta_0 + k''\theta_1,$$

причем угол θ_0 изменяется в пределах от 0° до 360°. А. А. Крюков

6044. К вопросу о приближенном решении дифференциальных уравнений в частных производных при помощи электрических моделей. Козлов Э. С., Николаев Н. С., Автоматика и телемеханика, 1956, **17**, № 10, 890—896

Указывается, что некоторые типы дифференциальных уравнений в частных производных (типа Лапласа, Пуассона и Фурье) могут быть решены с помощью электрических моделей-сеток при использовании конечноразностного метода. Приведены краткие описания элементов схем моделей-сеток, способы задания граничных условий и метод «электрической лупы».

Кратко описаны принципиальная схема электрической модели для решения уравнений типа Фурье и несколько блок-схем измерительных устройств — с ручным и автоматическим управлением, автоматическое устройство для нахождения изолиний, электронно-лучевой индикатор. И. М. Витенберг

6045. Современные методы экспериментального исследования систем автоматического регулирования. Трапезников В. А., Коган Б. Я., Тр. 2-го Всес. совещания по теории автомат. регулирования. **3**, М.—Л., 1955, 7—36

Основными задачами экспериментальных методов исследования систем автоматического регулирования являются выявление исходных характеристик регулятора, ускорение расчетов и выбора систем регулирования, наладка замкнутой системы автоматического регулирования в лабораторных условиях, настройка регулятора применительно к конкретному объекту регулирования.

Сущность моделирования сводится к замене всей системы или отдельных ее звеньев моделью, повторяющей динамические свойства оригинала.

Моделирующие установки строятся на основе физического или математического моделирования; физическое моделирование характеризуется подобием процессов, протекающих в модели и оригинале, оно менее универсально, чем математическое, но в ряде случаев является наиболее эффективным, так как полнее воспроизводит свойства объектов; математическое моделирование основывается на подобии дифференциальных уравнений, описывающих процессы в оригиналах и модели, оно осуществляется с помощью счетно-решающих устройств.

Современная счетно-решающая модель состоит из линейных решающих элементов, выполняющих сложение, умножение, дифференцирование и интегрирование; функциональных преобразователей, воспроизводящих, при решении нелинейных дифференциальных уравнений, произвольную функциональную зависимость, причем функциональные преобразователи сооружаются с использованием диодов или электронно-лучевых трубок; множительно-делительных устройств; устройств для введения переменных коэффициентов, выполняемых, обычно, в виде потенциометров; преобразующих устройств, позволяющих соединять модель с реальной аппаратурой регулирования.

Приводится краткая характеристика линейных моделирующих установок: И. П. Т.-5, М. П. Т.-9, Э. М. У.-2, Э. М. У.-3, З. М. У.-4. Библ. 28 назв. А. А. Крюков

6046. Преобразование непрерывных величин в цифровую форму. Клейн, Вильямс, Морган

(Analog-to-digital conversion. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1956, 29, № 5, 911—917 (англ.)

Рассматриваются три основных метода преобразования (кодирования) непрерывных величин в цифровую форму: временное кодирование, кодирование методом обратной связи и кодирование с использованием кодовых масок.

Каждый из этих методов может быть основан как на электромеханическом, так и на чисто электронном принципе. Выбор того или иного способа реализации метода зависит от конструктивных требований, но в основном определяется требуемой скоростью преобразования, а также формой представления исходных непрерывных величин. Основными формами представления непрерывных величин являются угловое положение вала и электрическое напряжение.

Главными характеристиками устройств преобразования, которые рассматриваются в статье, являются скорость, точность и однозначность квантования преобразуемых величин, когда их мгновенные значения находятся между фиксированными уровнями шкалы квантования.

Приводится описание принципов осуществления каждого из трех указанных методов преобразования и дается их сравнение с точки зрения этих характеристик.

В основе метода временного кодирования лежит измерение интервала времени между моментом начала отсчета, в частности моментом начала хода пилообразного напряжения, и моментом равенства этого эталонного напряжения с напряжением, пропорциональным преобразуемой величине. В качестве единицы измерения используются электрические импульсы, число которых, накопленное за этот интервал времени в двоичном счетчике, представляет в цифровой форме преобразуемую величину. Точность этого метода преобразования определяется количеством двоичных разрядов, используемых для представления диапазона изменения преобразуемой величины, линейностью пилообразного напряжения и точностью фиксации начала и конца отсчетов. Скорость преобразования определяется здесь частотой повторения импульсов и находится в обратной зависимости от требуемой точности. Кроме того, она зависит от скорости считывания показания накапливающего счетчика и может быть повышена применением параллельного способа считывания. Проблема однозначности квантования отсутствует, но имеется другая трудность, связанная со считыванием показаний счетчика, который может в момент считывания изменить свое содержание.

Приводится блок-схема типичной системы преобразования, построенной на принципе временного кодирования, фантастронная схема генератора пилообразного напряжения и электронная схема сравнения пилообразного напряжения с преобразуемым. Главными преимуществами метода временного кодирования являются простота и обычность применяемых схемных элементов, а также отсутствие схем, выполняющих логические функции.

Кодирование методом обратной связи основано на принципе последовательного сравнения фиксированного значения преобразуемого напряжения с рядом фиксированных эталонных напряжений, величины которых пропорциональны последовательно уменьшающимся степеням двойки. Процесс сравнения начинается с наибольшего эталонного напряжения и продолжается до тех пор, пока оно не станет меньше преобразуемого напряжения. Тогда это эталонное напряжение вычитается из преобразуемого, и этот момент отмечается посылкой на выход схемы импульса, обозначающего 1 в разряде, соответствующем той степени двойки, которую изображает данное эталонное напряжение. Разность напряжений далее сравнивается с последующими эталонными напряжениями и т. д. В результате получается последовательный двоичный код, изображающий преобразуемое напряжение. Точность такого метода преобразования ограничивается точностью и стабильностью эталонных напряжений и схемы сравнения. Предел точности этого метода в настоящее время составляет 0,1%. Скорость этого метода кодирования значительно выше по сравнению с методом временного кодирования и при использовании электроннолучевой переключающей трубки типа магнетрона может достигать 100 000 преобразований в 1 сек. Недостатком кодирования методом обратной связи является необходимость в логических схемах для процесса сравнения напряжений, а также потребность в большом количестве переключающих диодных матричных схем. Проблема однозначности квантования здесь особенно сложна и определяется степенью совершенства сравнивающего устройства. Приводится блок-схема устройства преобразования методом обратной связи и ее описание.

Наиболее прямым методом кодирования является метод использования кодовых масок, геометрическая конфигурация которых может быть различной в зависимости от конструкции устройства. В случае электромеханического устройства преобразования кодовые трафареты имеют форму диска с изображением кода в виде электрических контактов, кулачков или отверстий, в зависимости от типа считывающего устройства. Точность метода кодирования с использованием кодовых масок определяется количеством кодов, которые могут быть размещены на маске. Путем использования нескольких масок, связанных между собой соответствующими передаточными отношениями, точность преобразования может быть значительно повышена, однако за счет потерь в скорости преобразования, простоты конструкции и усложнения проблемы однозначности квантования благодаря мертвым ходам в зубчатых передачах. Кроме электромеханических способов преобразования с использованием кодовых масок, возможны и чисто электронные способы реализации этого метода.

Описывается применение для этой цели электроннолучевой трубки, луч которой отклоняется по вертикали пропорционально величине преобразуемого напряжения, попадая на соответствующий этому напряжению горизонтальный код маски, представленный на ней в виде отверстий. В результате горизонтального движения луча со скоростью горизонтальной развертки трубки на выходном фотоэлементе появляется серия последовательных импульсов, представляющих двоичный код преобразуемого напряжения. Точность такого вида преобразования зависит от достижимого количества различимых строк горизонтальной развертки трубки, которое может достигать 1000, а также от линейности отклонения луча по вертикали. В целом достижимая точность имеет порядок 0,1%. Скорость такой системы преобразования ограничивается временем восстановления фотоэлемента и экрана электроннолучевой трубки и в настоящее время может достигать 25 000 преобразований в 1 сек.

Использование электроннолучевой трубки типа передающей телевизионной трубки, на фотокатоде которой постоянно нанесена кодовая маска, может позволить увеличить скорость преобразования до 5 млн. в 1 сек.

Для исключения неоднозначности считывания при использовании метода кодовых масок применяются специальные коды. Применение для этой цели так

называемого циклического кода требует специальных устройств для перехода к обычному двоичному коду. Применение избыточных кодов полностью решает проблему устранения неоднозначности считывания, но уменьшает эффективную емкость кодовых масок, т. е. точность преобразования.

В заключение рассмотрения различных методов преобразования делается вывод, что наиболее простым и наилучшим в смысле характеристик преобразования является метод кодовых масок. Максимально достижимая точность всех указанных методов примерно одинакова и составляет в настоящее время 0,1%.

Б. И. Стрелков

6047. **Автоматическая запись показаний манометров и термопар на перфокарты. Перли** (Automatic strain-gage and thermocouple recording on punched cards. Perley Richmond), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, 1, № 1, 36—43 (англ.)

Разработка и испытание реактивного двигателя требуют для каждого режима работы (высота, температура, скорость, тяга) до 300—400 измерений давлений и температур в компрессоре, турбине и на всем двигателе в целом. До настоящего времени давления измерялись манометрами, показания от которых передавались в комнату управления, где и записывались группой в 4—5 человек. Температуры измерялись термопарами и показания их передавались на многопозиционный переключатель в той же комнате и считывались с одного прибора. Съем измерений при одном режиме работы занимал 15 мин., после чего данные перфорировались на картах.

Чтобы исключить ошибки и увеличить скорость, было сконструировано устройство, автоматически измеряющее давление и температуры и записывающее их на перфокарты со скоростью 200 точек в 1 мин. Выходы манометров и термопар подаются в виде напряжений на преобразователь, преобразующий их в цифровую форму. В преобразователе применен метод вычисления масштабной величины из измеряемой до тех пор, пока не получится нуль. Чтобы получить данные в десятичной системе, принято следующее соотношение масштабных напряжений: 1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 100, 200, 300, 400. При точности 0,1% требуется 12 вычислений.

Преобразователь работает следующим образом. На вход прерывателя, работающего с частотой 1000 *гц*, подается разность входного напряжения и эталонного напряжения с делителя с указанным выше соотношением сопротивлений. Сигнал с прерывателя подается на усилитель переменного тока и после него на фазочувствительный детектор, который воспринимает разность напряжений на входе как фазовый сдвиг. Выход детектора подается на триггерную схему, которая срабатывает, если входное напряжение меньше эталонного. В преобразователе имеются два шаговых искателя. Один из них подключает последовательно одно за другим (начиная со старшего — 400) сопротивления делителя ко входу, а другой подключает соответствующее реле к триггерной схеме. Если напряжение с делителя превышает входной сигнал, то срабатывает триггерная схема и возбуждается подключенное к ней реле, которое закорачивает очередное подключенное сопротивление. Реле делаются самоблокирующимися и имеют дополнительные контакты, комбинация замыканий которых соответствует определенной десятичной цифре. 4 реле составляют одну декаду. Одно сравнение занимает 16 *мсек* и около 80 *мсек* составляет промежуток между циклами, используемый для считывания показаний и переключения входа. Таким образом общее время цикла составляет 0,3 *сек*.

Поскольку цикл пробивки перфокарты занимает 0,6 *сек*., то имеется 4 ряда запоминающих реле по 12 реле в ряду. Пока на 2 рядах идет запоминание считываемых величин, данные с двух других рядов пробиваются на картах. Кроме результатов измерений, на картах пробивается число, определяющее положение переключателя каналов. Кроме того, с клавишной панели пробивается дата испытаний, № опыта, условия и т. д. После пробивки перфокарты передаются на табулятор и данные печатаются, причем диапазон чисел равен $0 \div 999$. Эти данные не являются истинными величинами. Чтобы получить истинные величины, необходимо ввести коррекцию на начало отсчета и масштабные коэффициенты. Все необходимые данные для коррекции пробиваются на перфокартах. Обработка данных ведется на вычислительных машинах.

В. Д. Князев

6048. **Машина для двоичного умножения и перевода произведения в десятичную систему. Ларсон** (A binary multiplier-translator. Larson Robert E.), J. Tennessee Acad. Sci., 1956, **31**, № 2, 161—163 (англ.)

Описывается способ умножения двоичных чисел и перевода полученного результата в десятичную систему с помощью электромеханической машины.

В машине для представления цифр множимого используются однополюсные перекидные переключатели, а для представления цифр множителя — строенные (в случае умножения двух трехразрядных двоичных чисел) однополюсные перекидные переключатели.

Цифры частных произведений получаются путем последовательного соединения каждого переключателя множимого с соответствующим переключателем множителя.

Протекающий по этим цепям ток управляет генератором, вырабатывающим определенное количество импульсов согласно позиции соответствующей цепи в частном итоге. Поскольку частные итоги представлены теперь электрическими импульсами, их легко преобразовать в десятичное число. Каждая двоичная цифра имеет определенное значение в десятичной системе, которое равно двоичной цифре, умноженной на коэффициент, определяемый позицией цифры. Окончательный результат в десятичной системе получается путем сложения с необходимым весом всех двоичных цифр. Для этого электрические импульсы частных итогов подводятся к контактам шагового переключателя. Переключатель медленно вращается и импульсы по одному поступают в счетчик, где образуется итог в десятичной системе.

М. С. Саплин

6049. **Счетный прибор, снабженный функциональными шкалами большой протяженности. (Счетная рулетка). Любченко Г. Г.,** Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, **19**, 437—441

Дается описание счетного прибора, основанного на сопоставлении логарифмических шкал. Описываемый прибор может давать точность вычислений до четырех, пяти и шестизначных цифр.

Идея прибора связана с удлинением отрезков функциональных шкал. Технические допуски прибора дают возможность не допускать ошибки при перемещении шкал, большей 0,2 *мм*. Чтобы результаты вычислений при помощи шкал имели n верных знаков, достаточно положить, что расстояние $\Delta\bar{x}$ между рисками точных чисел 10 и $10-0{,}1^{n-1}$ равно 0,25 *мм*. Величина $\Delta\bar{x}$ связана с указанными числами соотношением: $\Delta\bar{x} = m\,[\lg 10 - \lg(10 - 0{,}1^{n-1})]$. Отсюда модуль m шкал, а следовательно, и их длина определяется так:

$$m = \Delta\bar{x}/[\lg 10/(10 - 0{,}1^{n-1})].$$

Но так как с $2n+1$ точными знаками соблюдается

равенство $\frac{10}{10-0{,}1^{n-1}} \approx 1+0{,}1^n$, то $m \approx \frac{\Delta\bar{x}}{\lg(1+0{,}1^n)}$, или

$$m \approx \frac{1}{M}\,10^n\Delta\bar{x},$$

где $M = \lg e$.

Вычисляя по формуле (1) длину шкал ($\Delta\bar{x} = 0{,}25$ *мм*), получим следующие результаты: для замены четырехзначных таблиц логарифмов нужно иметь логарифмические шкалы длиной около 5,76 *м*; для замены пятизначных таблиц нужны шкалы длиной около 57,6 *м*; для замены шестизначных таблиц — 576 *м*.

Проводится изображение продольного разреза прибора и вид на один из концов перфорированной ленты со шкалами. Функциональные шкалы наносятся на две самосворачивающиеся в спиральные рулоны ленты. Рекомендуется изготовлять ленты из целлулоидной пленки, на которую функциональные шкалы наносятся фотографическим путем. Дается подробное описание устройства и действия прибора. Указывается, что прибор можно использовать как при практических инженерных расчетах, так и при теоретических вычислениях и что об этом свидетельствуют отзывы специалистов. Е. В. Вандышева

6050. «CYPAK»-системы. Применение логических функций. Бейкер (CYPAK systems. An application of logic functions. Baker J. P.), Westinghouse Engr, 1956, 16, № 4, 107—111 (англ.)

Описываются схемы логических элементов на базе магнитных усилителей, применяемых в системах CYPAK, используемых для целей управления производственными и технологическими процессами.

Даны примеры применения подобных логических схем для задачи о двух резервуарах и для управления прессом; указано, что во многих случаях замена релейной схемы на чисто логическую нецелесообразна. Важной особенностью систем CYPAK является разработка бесконтактных предельных выключателей и нажимных кнопок. И. К. Волков

6051. Умножение на многосчетчиковом печатающем бухгалтерском автомате. Майр (Die Multiplikation auf Mehrzählwerks—Walzenbuchungs-automaten. Mair Walter), MTW-Mitt., 1956, 3, № 3, 121—124 (нем.)

Излагается метод составления программ процесса получения произведения при умножении на постоянные числа на многосчетчиковых печатающих бухгалтерских автоматах.

В основу описываемого метода положен метод простого последовательного сложения. Программа получения произведения состоит из команд, управляющих работой счетчиков в такой последовательности, чтобы путем передачи множимого из одного счетчика в другие, а также путем последующей передачи удвоенных, утроенных и т. д. множимых из одних счетчиков в другие получить произведение в одном из счетчиков. Все остальные счетчики, участвующие в образовании произведения, должны при последнем ходе быть очищены. К числу команд, управляющих работой счетчиков, можно отнести: передачу числа в счетчик, передачу числа из счетчика, невключение счетчика (НЕ). Причем передача числа из счетчика может быть с возвратом, т. е. снятие промежуточного итога со счетчика (ПИ), или без возврата, т. е. снятие окончательного итога со счетчика (ОИ).

Примечание референта. Для понимания существа методики составления программы приводим пример на составление такой программы для умножения числа a на 25. Эта программа представлена в виде следующей таблицы.

№ ходов \ № счетчика	I	II	III	IV	№ счетчика, из которого подается число
1	a	a	a	a	Из устройства ввода
2	ПИ / a	+ / $2a$	+ / $2a$	+ / $2a$	I
3	+ / $3a$	ПИ / $2a$	+ / $4a$	+ / $4a$	II
4	НЕ / $3a$	+ / $6a$	+ / $8a$	ОИ / 0	IV
5	+ / $11a$	+ / $14a$	ОИ / 0	НЕ / 0	III
6	+ / $25a$	ОИ / 0	НЕ / 0	НЕ / 0	II

Н. П. Вашкевич

6052. Складская система Кидда (Le Kidde Warehousing System.), Manutent. méc. et automat., 1956, 9, № 8, 29—31 (франц.)

Описывается система отпуска товаров со склада. Упаковки снабжены перфокартами, на которых записаны необходимые данные о товаре. В систему входят: 1) конвейер, по которому перемещаются упакованные товары; 2) устройства для спуска товаров с конвейера; 3) диспетчер, который снимает с товаров перфокарты и направляет в электронное устройство чтения для обработки перфокарт в целях учета; диспетчер также обнаруживает ошибки в выборе товаров и удаляет с конвейера ошибочно выбранные товары; 4) электронное управление, работающее от перфоленты и вызывающее спуск товаров с конвейера; 5) вычислительная группа, состоящая из электронного вычислителя ИБМ-604, итогового перфоратора ИБМ-521, табулятора ИБМ-422 и запоминающего устройства ИБМ-941. Г. Г. Меньшиков

6053. Как мы программировали переход к учету с помощью вычислительной машины. Эглстон (How we programmed the transition to a computer accounting system. Eggleston W. E.), Electric Light and Power, 1955, 33; № 10/15, 82—86 (англ.)

Сообщается о том, что фирма «Коммонвелс Эдисон» (Commonwealth Edison), обслуживающая 1 800 000 потребителей электроэнергии, производит все расчетные операции с помощью вычислительной машины ИБМ-702. Участие человека требуется только при выписке счетов и при различных исключениях в платежах (утеря или задержка оплаты счета и др.).

На корешке почтовой карточки-счета для потребителя имеется перфорация, содержащая сведения о потребителе, сумме счета и т. д. После оплаты счета корешок возвращается в контору для дальнейшей обработки.

Все данные о потребителе записываются на магнитной ленте. Сюда входят имя, адрес, задолженность, величина кредита и т. п.

Три раза в месяц с ленты производится печать неоплаченных счетов на балансовый список для учета обращения. Кроме того, ежедневно печатается вспомогательный список, учитывающий обращение с момента последнего открытого баланса. Каждые два месяца печатается главный список, показывающий все, что содержится на ленте. По этим спискам легко получить сведения о текущем состоянии дел.

Рассматривается вопрос о программировании системы учета для электронных цифровых машин. Сообщается, что в скором времени фирма установит две машины ИБМ-705, которые также будут использоваться для учетных работ. М. С. Саплин

6054. **Технический прогресс в области машинного перевода. Уолл** (Engineering progress in machine translation. Wall Robert E., Jr.), Trend Engng Univ. Wash., 1956, 8, № 3, 9-15, 27-28 (англ.).

Описывая процесс автоматического перевода с одного языка на другой при помощи электронной машины, автор выделяет четыре последовательных этапа перевода: 1) кодирование, которое состоит в преобразовании исходного печатного текста в коды машины; 2) поиск слов в машинном словаре; в результате действия специальной подпрограммы получается пословный перевод; 3) логический анализ; так как практическое значение пословного перевода невелико, необходим «пофразный» перевод (sentence-for-sentence trans.); исследования показали, что для определения точного смысла слова или группы слов необходим анализ всего предложения; этот анализ производится с помощью логических операций машины; 4) декодирование, которое сводится к печати переведенной фразы.

Рассматривая информацию, которую следует хранить в словаре, автор приходит к выводу, что машина для перевода должна иметь сдвигающий регистр на 70 двоичных разрядов. Объем запоминающего устройства для хранения практически пригодного словаря оценивается в 140 000 двоичных разрядов. Указывается, что в качестве запоминающего устройства для словаря могут быть использованы фотопластинки с записанной на них информацией. Считывание производится оптико-фотоэлектронным устройством со временем выборки около 1 сек. К сложным проблемам машинного перевода отнесена задача определения значения многозначных слов и определения порядка слов в предложении.

Автор считает, что машинный перевод оправдает себя с коммерческой точки зрения, так как необходимость в массовых переводах будет все время возрастать и не сможет быть удовлетворена иными средствами.

Относительно опыта автоматического перевода с английского на русский язык, проведенного в СССР в конце 1955 г., высказывается мнение, что тем самым решена более сложная задача, чем перевод с русского на английский. Л. Н. Королев

6055. **Функции «памяти» и сопоставления в автоматических устройствах. Гаврилов М. А.,** Природа, 1956, № 10, 30—39

В популярной форме описываются принципы работы управляющих машин и функции запоминающих устройств в подобных машинах. Изложен принцип действия отдельных запоминающих устройств (электромагнитное реле, магнитный сердечник с прямоугольной петлей гистерезиса). Дано понятие двоичной системы счисления и приведен пример записи дискретного процесса на перфоленте. Кратко разобран принцип действия машины для библиографического поиска. Г. С. Горячева

6056. **Будущее автоматической обработки информации в химической промышленности. Де-Карло** (The future of automatic information handling in chemical engineering. De Carlo Charles R.), Chem. Engng. Progr., 1955, **51**, № 11, 487—491 (англ.)

Статья знакомит специалистов-химиков с устройством и возможностями современных электронных вычислительных машин. Приводятся примеры применения таких машин для научных исследований, конструирования аппаратуры, экономических расчетов и автоматизации химических процессов. В. Н. Лаут

6057. **Теория информации. Хоман** (Information theory. Hohmann Jack), Carnegie Techn., 1956, **20**, № 2, 39—40, 42 (англ.)

В статье популярно рассказывается о предмете теории информации. Дается определение количества информации, которое иллюстрируется примером. Кратко говорится о перспективах развития теории. В. П. Парамонов

6058. **Как машина выполняет арифметические действия. Бланкенбейкер** (How computers do arithmetic. Blankenbaker John), Control Engng, 1956, **3**, № 4, 93—99 (англ.)

Популярная статья об основных принципах выполнения арифметических операций в электронных цифровых вычислительных машинах. Б. Н. Малиновский

6059. **Универсальные цифровые вычислительные машины. Ремон** (Les calculatrices numériques universelles. Raymond François-Henri), Mém. artill. franç., 1956, **30**, № 4, 941—1013 (франц.)

Окончание статьи общего характера (РЖМат, 1957, 2737) о цифровых электронных вычислительных машинах. Рассмотрены вопросы численного представления величин и операций над ними, а также состав основных элементов (релейных, диодных и ламповых), служащих для выполнения арифметических и логических действий. Излагается история развития цифровых счетных и вычислительных машин. А. А Крупский

6060. **Счетные машины. Михельсон В. С.,** Матем. в школе, 1955, № 5, 1—10

Популярная статья, посвященная счетным машинам и приборам.

6061. **Цифровые вычислительные машины. Рис** (Digital computers. Rees Mina), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 6, 414—423 (англ.)

В популярной форме излагаются принципы работы цифровых вычислительных машин, перечисляются основные научные и производственные проблемы, решенные или решаемые с помощью этих машин.

6062. **Современные вычислительные машины в лаборатории. Часть I. Бут** (Modern calculating machines in the laboratory. Part I. Booth A. D.), Lab. Practice, 1956, 5, № 10, 367—370 (англ.)

Статья обзорного характера о современных средствах вычислительной техники. Указываются недостатки и преимущества, области применения, физические элементы вычислительных машин дискретного и непрерывного действия. Б. Н. Малиновский

6063. **Современные вычислительные машины в лаборатории. Часть II. Бут** (Modern calculating machines in the laboratory. Part II. Booth A. D.), Lab. Practice, 1956, 5, № 11, 409—413, 429 (англ.) Часть I см. реф. 6062.

Приводится описание простейших суммирующих, интегрирующих и функциональных элементов механических и гидравлических моделирующих устройств. Б. Н. Малиновский

6064. **Длина кода в цифровых вычислительных машинах. Мак-Краккен** (Word length in digital computers. McCracken D. D.), Computers and Automat., 1956, 5, № 7, 14—15 (англ.)

В электронных цифровых вычислительных машинах команды программы запоминаются, за редким исключением, в одном запоминающем устройстве вместе с исходными данными и результатами. Возможность изменять команды придает машине большую гибкость.

Объем запоминающего устройства определяет длину кода адреса команды. При постановке научных задач количество разрядов исходных чисел, промежуточных и конечных результатов примерно вдвое превышает количество разрядов в одноадресной команде. В связи с этим возникает проблема неполного использования запоминающего устройства при запоминании команд. Имеется ряд путей разрешения этой проблемы.

Прямым решением является создание специального запоминающего устройства для хранения команд (например, в машине Марк IV Гарвардского университета). Это решение ведет к некоторому усложнению конструкции, однако хорошо может быть использовано при создании специальных машин (например, управляющих).

Имеется ряд машин, в которых нет согласования длины команды и длины числа («Datatron»). Это имеет место также и в других машинах, когда не используются те или иные адреса команды (при многоадресных командах).

Хорошие результаты с точки зрения конструирования и программирования дает использование многоадресных команд. В ИБМ-650 при двухадресной команде второй адрес используется для отсылки к следующей команде. Вычислительные машины ИРА-1103, ЭЛЕКОМ-120 и 125 имеют двухадресные команды. В машине НОРК используется 3-адресная команда, а в машине СВАК — четырехадресная, где 4-й адрес определяет положение следующей команды.

Для одноадресных машин полное использование запоминающего устройства достигается помещением двух одноадресных команд в одну ячейку запоминающего устройства (ИБМ-701, УНИВАК). В этом случае либо каждой половине кода присваивается собственный адрес, либо обеим командам придается общий адрес, однако при совершении арифметических действий над командами необходимо указывать, над какой половиной кода они производятся. Это вызывает дополнительные трудности при программировании.

В недавно построенных машинах ИБМ-702 и 705 команды имеют фиксированную длину, но длина чисел является переменной от одной цифры до любого размера. Это представляет большие удобства при работе с числами различной длины, однако применение при этом последовательной арифметики снижает скорость вычислений.

В настоящее время имеется тенденция увеличения длины кода адреса, ввиду увеличения объема запоминающих устройств. Для ИБМ-702 длина кода достигает 15 разрядов, тогда как для ИБМ-701 она была равна 12 разрядам; имеются сведения о проектируемых машинах с длиной кода в 17—18 разрядов.

Стремление к использованию чисел с переменным количеством разрядов может привести к применению команд переменной длины, что даст экономию в запоминающем устройстве.

Утверждается, что конфликт между упрощением конструкции и упрощением программирования постепенно склоняется в сторону упрощения программирования. В. Д. Князев

6065. Техническая кибернетика. Цянь-Сюэ-сэнь. Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1956, 462 стр., илл., 17 р. 5 к.

6066 П. Оптическое вычислительное устройство. Пайети (Optical computer. Piety Raymond G.) (Phillips Petroleum Co.). Пат. США 2712416, кл. 235—61, 5.07.55

Предлагаются два варианта конструкции оптического вычислительного устройства, которое может быть использовано для перемножения двух функциональных зависимостей, причем результат получается в виде интеграла от произведения за некоторый интервал изменения независимого переменного. Эти же устройства могут быть использованы для вычисления корреляционных функций и для других расчетов, связанных, в частности, с расшифровкой результатов сейсмографического исследования нефтяных пластов. Для реализации произведения в оптическом вычислительном устройстве, отличительной особенностью которого является возможность перемножения знакопеременных функций, функциональные зависимости представляются в виде затемненных полос, нанесенных на прозрачные пластинки.

В обоих устройствах, отличающихся друг от друга формой источника света и системой линз, интеграл произведения двух переменных получается в виде тока на выходе фотоэлемента, освещаемого источником света через две пластинки с нанесенными функциональными зависимостями. И. М. Витенберг

6067 П. Счетный прибор для контроля мускульных движений. Шлезингер (Exercise counting apparatus. Schlesinger Robert A.). Пат. США 2717736, кл. 235—92, 13.09.55

Предлагается счетный прибор для визуального контроля правильности выполнения человеком заданного ритмического комплекса мускульных движений. Прибор предназначается для применения в лечебных учреждениях и при исследовании мускульной деятельности человека в трудно доступных условиях (например, под водой), для контроля моделей нервной и мускульной систем. Обычно при задании человеку определенного комплекса движений (амплитуда, частота, количество движений), человек стремится постепенно ускорять темп и уменьшать амплитуду, нарушая, таким образом, заданный комплекс. Описываемый прибор является счетным устройством, считающим только движения установленной амплитуды и частоты. Более частые движения или движения меньшей амплитуды пропускаются (не подсчитываются) устройством, поэтому пациент, наблюдающий за показаниями счетчика, будет стремиться совершать движения заданного характера. Прибор состоит из механического или фотоэлектрического ключа, установленного так, что при выполнении каждого движения заданной амплитуды осуществляется замыкание цепи.

Собственно счетная схема состоит из электромеханического счетчика импульсов, срабатывающего от реле, которое в свою очередь включается ключом. Между ключом и реле имеется цепь задержки, состоящая из емкости и переменного сопротивления. Таким образом, реле после замыкания ключа остается включенным еще некоторое время, определяемое постоянной времени цепи задержки. Любой последующий импульс от ключа, поступивший в течение этого интервала (т. е. раньше, чем предписано), не вызовет нового срабатывания реле, а значит, и счетчика. Изменением переменного сопротивления цепи задержки устанавливается предписанный ритм движений. Прибор очень прост и работает от обычной сети переменного тока. М. Б.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абэ 5789
Аветисян А. Е. 5512
Алексеев Н. И. 5877
Андронов А. А. 5551
Аржаных И. С. 5535
Асанага 5418

Б

Бабич В. М. 5602
Баврин И. 5509
Бадалян Г. В. 5481
Баренблатт Г. И. 5615, 5616
Баруздин В. И. 5761 К
Башмакова И. Г. 5283
Березанский Ю. М. 5603
Березин Ф. А. 5741 Д
Берман Д. Л. 5466, 5467
Бескин Н. М. 5826
Бирман М. Ш. 5580, 5711
Бицадзе А. В. 5584
Боярчук А. И. 5641
Будак Б. М. 5937
Булах Б. М. 5601
Бухараев Р. Г. 5857
Быков Я. В. 5631

В

Вайнберг М. М. 5737 К
Ведерников В. И. 5875
Векуа И. Н. 5269
Векуа Н. П. 5496, 5497
Виленкин Н. Я. 5369
Вишик М. И. 5615
Волк И. М. 5546
Воронов В. В. 5977

Г

Гаврилов М. А. 5403, 6055
Гаврилов Н. И. 5563
Гаек Я. 5763
Гаркави А. Л. 5518
Гегелия Т. Г. 5627
Гельфонд А. О. 5644
Геронимус Я. Л. 5454
Глускин Л. М. 5370
Гончарова М. К. 5761 К
Гребенюк Д. Г. 5453
Григорьев И. Н. 5883
Громов М. Я. 5861 К
Гуань Чжао-чжи 5713
Гугнина В. И. 5699

Д

Давиденко Д. Ф. 5931
Демаховская Р. И. 5856
Дородницын А. А. 5266
Дуб Дж. Л. 5755 К
Духовный М. А. 5802

Е

Ерышов С. П. 5486, 5487

З

Залгаллер В. А. 5923, 5924, 5925
Зерагия П. К. 604 Д
Зморович В. А. 74

И

Иванов В. В. 5945
Иванов В. К. 5591
Иванов В. Н. 5562
Ивницкий Т. Г. 5854
Иноуэ 5661 К

К

Каазик Ю. Я. 5742 Д
Калицин Г. С. 5817
Калужнин Л. А. 5359
Кангро Г. Ф. 5710
Канторович Л. В. 5947
Караниколов Хр. 5530
Карасев А. И. 5759 К
Кароль И. Л. 5579
Керопян К. К. 5652
Киотина Г. В. 5863 Д
Киприянов И. А. 5464
Кислицын С. Г. 5536
Коган Б. Я. 6045
Козлов Э. С. 6044
Колобов П. Г. 5865
Кондурарь В. Т. 5705
Коротышевская А. Ф. 5448, 5449
Костарчук В. Н. 5968
Костенко В. Г. 5439
Костин А. В. 5561
Кошелев А. И. 5583
Красовский Н. Н. 5564
Круковский Б. В. (Круковский-Синевич) 5648, 5649
Кручкович Г. И. 5899
Куратовский 5412

Л

Лаврентьев М. М. 5586, 5595
Лагунов В. Н. 5653
Ламбин Н. В. 5494
Левин Б. В. 5321, 5326
Левин Б. Я. 5505
Левицкий В. С. 5858 К
Леонтович Е. А. 5551
Ленский М. М. 5995
Либер А. Е. 5889, 5890
Лидский В. Б. 5555
Листов В. Н. 5984
Ли Юе-шэн 5559
Лупанов О. Б. 5402
Любич Ю. И. 5593
Любченко Г. Г. 6049
Люстерник Л. А. 5971
Ляпин Н. М. 5874

М

Магарик В. А. 5459
Маковер С. Г. 5963
Маркович Э. С. 5760 К
Марченко Л. И. 5859 К
Мельник И. М. 5506
Мельник С. И. 5942, 5943
Месис А. В. 5495
Минасян Р. С. 5589
Митани 5959
Митропольский А. К. 5786
Митькин А. М. 5846 К
Михельсон В. С. 6060
Морев И. А. 5523, 5527 Д
Мори 5521
Мушицки Т. 5639

Н

Нагами 5413
Накаока 5432
Нарский И. 5273
Насыров Р. М. 5613
Натансон И. П. 5472, 5675 К
Никитин Б. Д. 5851 К
Николаев Н. С. 6044
Николаева Г. А. 5490
Норден А. П. 5812

О

Обрешков Н. 5480
Овсянников Л. В. 5623
Оно 5732
Орлов С. А. 5556

П

Парасюк О. С. 5626
Пекелис А. С. 5363
Петров В. В. 5773
Поваров Г. Н. 5403
Погребысский И. Б. 5993
Полубаринова-Кочина П. Я. 5614
Поляцкий В. Т. 5717
Посвянский А. Д. 5860 К, 5975
Постников А. Г. 5316
Привалов И. И. 5849 К
Протасов В. И. 5539
Прянишникова З. И. 5858 К
Пугачев Б. П. 5968
Пхакадзе Ш. С. 5435
Пшеничный Н. Н. 5859 К

Р

Радов Е. А. 5816
Рапопорт И. М. 5569 К
Раскина Н. М. 5289
Рафальсон З. Е. 5677
Репина М. И. 5859 К
Рогинский В. Н. 5403
Родионов С. В. 5851 К
Русак Б. И. 5534
Рубинштейн Л. И. 5605 Д
Румынцев В. В. 5560
Русак Б. И. 5533, 5534
Рыжков В. В. 5884
Рыжов Н. Н. 5860 К

С

Салехов Г. С. 5940
Селиванова С. Г. 5461
Сениссон В. 5985
Сирык Г. В. 5489
Скитович В. П. 5750
Скоробогатько В. Я. 5578
Слободкин М. И. 5951
Слугин С. Н. 5949
Соболев А. И. 5678
Соболь И. М. 5553
Соколов И. Г. 5460
Солнцева Т. В. 5853
Солодовников А. С. 5897
Сон Вон Рок 5938
Стеклов В. А. 5572 К
Стоилов С. 5291
Ступина И. Д. 5451 Д
Су Бу-цин 5900, 5901
Сулейманова Х. Р. 5850 К
Сулиньский А. 5397 Д
Супруненко Д. А. 5386

Т

Такэути 5345 К
Талалян А. А. 5441, 5442
Тевзадзе Г. Н. 5886
Тевзадзе Н. 5680
Тевлин А. М. 5858 К
Темляков А. А. 5509, 5514
Тишин С. Д. 6010 К
Трантер К. Дж. 5704 К
Трапезников В. А. 6045
Тянь-Фан-цзэн 5713

У

У Вень-цзюнь 5417
Угодчиков А. Г. 5492
Улчар Дж. 5920
Ульянов П. Л. 5455
Уфлянд Я. С. 5617
Уэно 5753

Ф

Федотов Г. И. 5858 К
Федулов В. С. 5437
Фиников С. 5878

Фролов В. М. 5934
Фукс Б. А. 5511
Фукухара 5540
Фэн Кан 5729

Х

Харкевич А. Д. 5403
Хасимото 5414
Хведелидзе Б. В. 5629
Хигути 5805
Хилл Р. 5624 К
Хильтон П. Д. 5391
Хорошев О. В. 5802
Христов В. 5823 К

Ц

Цудзи 5807

Ч

Чарный И. А. 5614
Чернышенко Е. А. 5948
Чернова М. Л. 5814
Четверухин Н. Ф. 5858 К
Чжао Фан-сюн 5955
Чунихин С. А. 5354
Чэн Минь-дэ 5465
Чэнь Цзянь-гун 5679
Чэнь Юн-хэ 5465

Ш

Шестаков В. И. 5403
Широков А. П. 5887, 5888
Широков Ф. В. 5387
Шифрин К. С. 5656
Штыкан А. Б. 5994
Шудрова С. И. 5972
Шуликовский В. И. 5885

Э

Эзрохи И. А. 5469, 5470
Эскин Л. Д. 5689

Ю

Юсупов К. Ю. 5944
Юшков П. П. 5957

Я

Янов Ю. И. 6003 Д

A

Abbassi M. M. 5618
Adam A. 5987
Adams C. R. 5300
Adams J. F. 5419
Agliata S. 5543
Aguinaga Moreno E. 5841 К
Ahmad M. 5507
Aigner A. 5340
Albert A. A. 5344 К
Aleksandrov P. S. 5372 К
Altman M. 5709
Amici A. 5642
Amitsur S. A. 5385
Ananda-Rau K. 5479
Andersson J. 5830
Ankeny N. C. 5332
Antosiewicz H. A. 5989
Aparo E. 5969
Ari R. I. 5800
Arvesen O. P. 5855
Ascoli G. 5342 К
Athen H. 5997 К
Atta S. E. 6030
Aumann G. 5723
Auslander L. 5893, 5894

B

Bagemihl F. 5447
Bagley R. W. 5406
Baker J. P. 6051
Balada F. 5296
Ball B. J. 5443
Banach S. 5735 К
Bar-Hillel Y. 5311
Barner M. 5881
Bartholomew D. J. 5771
Baskervill M. 5983
Bastard J. 5996
Bastenaire F. 5706
Bauer H. 5727, 5728
Becker 5305 К
Becker W. 6007
Beckert H. 5927
Beesack P. R. 5573 Д
Behnke H. 5516
Bellman R. 5552, 5659
Bennett A. A. 5286
Bermant A. F. 5667 К
Berry R. M. 6008
Beyer H. 5965
Bieri H. 5928
Binford F. T. 5990
Birkhoff G. 5982
Blankenbaker J. 6058
Blanuša D. 5647
Blyth C. A. 5797
Boas R. P., Jr 5681
Bochner S. 5575, 5756 К, 5903
Böhm W. 5833
Booth A. D. 6027, 6033, 6062, 6063
Bose B. N. 5696
Boucher H. 6026
Bower R. E. 6031
Braier A. 5491
Brelot M. 5592
Brenner J. L. 5348
Brock P. 6028
Brode H. L. 5939
Brousseau R. 5935
Bruck R. H. 5334
Buck R. C. 5681
Burkill J. C. 5570 К
Burton L. P. 5532
Bush R. R. 5810 К
Butzer P. L. 5462, 5463

C

Caccioppoli R. 5672 К
Camp E. J. 5671 К
Carlitz L. 5684
Carr III J. W. 6029
Cartan H. 5422—5430
Cartier P. 5389
Cartwright M. L. 5524 К
Cassels J. W. S. 5324
Castellano V. 5270
Čech E. 5882 К
Chakravarty N. K. 5697, 5698
Chambers Ll. G. 5619
Chapman D. G. 5779
Chaput I. 5839 К
Chaudhuri S. B. 5775
Chemnitius F. 5663 К
Chong F. 5719
Chowla S. 5332
Ciliberto C. 5596
Cioranescu N. 5657
Ciucu G. 5752
Civin P. 5715
Clark J. R. 5956
Clutterham D. R. 5976
Coales J. F. 6067 П
Cohn H. 5333
Cohn P. M. 5356
Colberg R. 5279
Cole K. S. 5989
Colmez J. 5731
Colombo S. 5692
Comét S. 5991
Conrad R. 5986
Conti R. 5547
Cooke J. C. 5686
Cotlar M. 5712
Couffignal L. 6019 К
Crahay F. 5312
Cremona L. 5820
Crommelin C. A. 5284
Crowell R. H. 5434 Д
Cvetkov B. 5966

D

Dahmen G. 5537
Danskin J. M., Jr 5552
Dantzig G. B. 5791
Darling D. A. 5749
Das M. N. 5788
Davenport H. 5325, 5327
Davies R. 5796
Davis C. 5721
DeCarlo C. R. 6056
Delange H. 5320
Delsarte J. 5577
Devidé V. 5643
Diaz J. B. 5598, 5599
Din D. 5314
Dolph C. L. 5640
Doob J. L. 5754 К
Douglas J., Jr 5936
Dubreil P. 5293
Duchon R. 5592
Duffin R. J. 5520, 5607
Durieu M. 5831

E

Edgett G. L. 5774
Eggleston W. E. 6053
Einstein A. 5904
Eisenhart L. P. 5905
Elliott W. S. 6067 П
Ellis D. 5405
Epstein M. 5477
Evans G. W. 5935
Eweida M. T. 5683

F

Fagg S. V. 5567 К
Falgas M. 5482
Feldman J. 5722
Felsen L. B. 5687
Ferrar W. L. 5301
Finsler P. 5813
Finzi L 5818
Fischbach J. W. 5962
Fortet R. 5745
Foster D. M. E. 5328
Fraïssé R. 5396 Д
Freeman J. G. 5898
Freitas A. C. de 5693
Frola E. 5707
Fu Cheng Hsiang 5458
Fujiwara T. 5393

G

Gaeta F. 5864
Gait J. J. 6040
Gale D. 5794
Ganea T. 5473 К
Gardner J. W. 5978
Garres P. 5992
Gau E. 5998 К
Gautschi W. 5636, 5637
Gellman H. 5978
Gentile G. 5825
Chizzetti A. 5866 К
Chosh B. 5777
Gilbert N. E. G. 5782
Gillman L. 5445, 5447
Giltay J. 5808
Giuliano L. 5440
Gleason A. M. 5274
Godeaux L. 5811, 5867
Gonseth F. 5275
Goormaghtigh R. 5824, 5832
Grebenča M. K. 5668 К
Grell H. 5295
Greville T. N. E. 5804
Guggenheimer H. 5869, 5871, 5873, 5916

H

Haas F. 5558
Hadamard J. 5310
Hagelbarger D. W. 6025
Hajdin N. 5933
Hall M., Jr 5988
Hartman P. 5554
Hashizume Y. 5416
Hatcher J. R. 5628
Hausbrandt S. 5964
Hayes R. M. 5950
Head J. W. 5974
Heald C. 6043
Heineman E. R. 5840 К
Heinz E. 5582
Hemingway A. V. 6040
Hennequin F. 5902
Herrmann O. 5528 Д
Herson S. E. 6067 П
Hestenes M. R. 5638
Heywood P. 5457
Higman J. H. 6031
Higuti I. 5805
Hill N. D. 6067 П
Hille E. 5600, 5746
Hilton P. J. 5391
Hiong King-Lai 5500, 5501
Hlavaty V. 5910
Hochschild G. 5388
Hodge W. V. D. 5303, 5912
Hoffman A. J. 5791
Hofmann 5305 К
Hogg R. V. 5767
Hohmann J. 6057
Hopkins N. J. 5803
Horalek V. 5769
Hornfeck B. 5319
Horváth J. 5730
Hosokawa F. 5416
Hronec J. 5568 К
Huard de la Marre P. 5981
Hudson G. E. 5612
Hughes D. R. 5917
Hurewicz W. 5420
Hyltén-Cavallius C. 5498
Hynes R. W. 6040
Hyvärinen L. 5703

I

Inada K. 5795
Inoue S. 5720
Ioanin Gh. 5400
Ionescu-Tulcea C. T. 5758 К
Iséki K. 5408, 5409, 5411
Ishihara S. 5870
Itard J. 5847 К
Itô N. 5362

J

Jacobson N. 5392
Janković Z. 5690
Jarník V. 5665 К
Jenkins J. A. 5485
Johnson R. P. 5287
Julia G. 5298
Junge C. O., Jr 5779
Juve Y. 5526 Д

K

Kamke E. 5571 К
Kämmerer W. 6020
Kanold H.-J. 5336
Karadžic L. 5475, 5478
Kartasiński S. 5662 К
Kaufman B. 5904
Keirstead R. 5935
Kennedy 5488
Kent A. 6032
Khan N. A. 5346
Kimball W. S. 5285
Klee V. L., Jr 5272
Klein M. L. 6046
Klerk-Grobben G. 5766
Klingen H. 5366
Koseki K. 5410
Kosmák L. 5394
Koutský K. 5394
Koźniewska I. 5772
Krickeberg K. 5436
Królikowski W. 5622
Krook M. 5946
Krzywoblocki M. Z. E. 5610
Künzi H-P. 5541
Kuwagaki A. 5510
Kyner W. T. 5529

L

Laasonen P. 5930
La Barbera A. 5827
Lagally M. 5852 К
Lah I. 5980
Lalescu T. 5633 К
Larson R. E. 6048
Laugwitz D. 5368
La Vallée Poussin Ch. de 5499
Leilich H. O. 6022
Lemoine S. 5895
Lentin A. 5343 К
Levit R. J. 5339
Lichnerowicz A. 5585
Lilly J. E. 5966
Liverman T. P. G. 5519
Livingston A. E. 5658
Ljusternik L. A. 5733 К
Łojasiewicz S. 5597
Lombardo-Radice L. 5404
Lorch L. 5658
Lovass-Nagy V. 5350 К, 5606
Lukacs E. 6004
Luke Y. L. 5929, 5935

M

McCracken D. D. 6064
McDonald J. K. 6005, 6006
MacLean W. R. 5608
Macon N. 5983
Mair W. 6050
Mairhuber J. C. 5452
Ma Min-Yuan 5685
Mangeron D. 5491
Mannoury G. 5918
Markus L. 5545
Massera J. L. 5549
Matsushima Y. 5913
Matthes K. 5714
Maurer I. 5288
Meier-Wunderli H. 5360
Mejzlik L. 5941
Messel H. 5978
Meyer W. 5278
Meynieux R. 5868
Mihoc G. 5758 К
Milankovitch M. 5282
Miller J. T. 6038, 6039, 6042
Mills H. D. 5792
Mirkil H. 5515
Mises R. von 5611
Mitrinovitch D. S. 5337, 5682
Mlak W. 5531
Mohr E. 5688
Moisil Gr. C. 5398, 5399
Montgomery D. 5375 К
Moore P. G. 5768
Moore R. A. 5545
Mordell L. J. 5330
Morgan H. C. 6046
Morgenthaler G. W. 5744
Morin U. 5837 К
Moroney M. J. 5815 К
Moser J. 5550
Mossoux R. 5822
Mosteller F. 5810 К
Mostowski A. 5309
Motchane L. 5450
Mourier E. 5745
Muhly H. T. 5384
Müller O. 6016 К
Murata K. 5393
Mycielski J. 5743

N

Nakano H. 5738 К
Nardini R. 5620
Naumann H. 5919
Neugebauer O. 5300
Neumann B. H. 5358
Neville E. H. 6018 К
Ničе V. 5290
Nielsen K. L. 6014 К
Nisigaki H. 5522
Novoselov S. I. 5668 К
Novotný M. 5394

O

Ohshio S. 5926
Oikawa K. 5493
Oka K. 5513
Okołowicz M. 5662 К
Onicescu O. 5576, 5757 К, 5758 К
Ono K. 5361
Onoe M. 5691
Ostrowski A. 5960, 5973

P

Page E. S. 5764
Pallari R. 5806
Pallez A. 5276
Pan T. K. 5821
Panella G. 5921
Panow D. J. 6000 К
Parenti G. 5271
Parodi M. 5538
Pastori M. 5908
Paszkowski S. 5743
Patterson H. D. 5776
Pedro I. 5845 К
Peck J. E. L. 5932
Pekeris C. L. 5632
Perley R. 6047
Perry J. W. 6032
Péter R. 5308
Petherick E. J. 6023
Picasso E. 5879
Picone M. 5634, 5635
Piehler J. 5329
Piety R. G. 6065 П
Piloty H. 6022
Piloty R. 6022
Pini B. 5590
Pinto H. F. 5351 К, 5842 К, 6012 К
Piska R. 5302
Poenaru V. 5407
Pogorzelski W. 5669 К, 5670 К
Pond J. A. 5844 К
Pontreaghin L. S. 5374 К
Popken J. 5322, 5323
Popoviciu T. 5952
Popruzenko J. 5446
Porcelli P. 5702
Potts D. H. 5655
Pozzolo Ferraris G. 5650
Prince M. D. 6041
Proebster W. E. 6022
Protter M. H. 5594
Puig-Adam P. 5700
Punnis B. 5542
Putnam C. R. 5554

R

Rabinowitz P. 5989
Rahman Q. I. 5503, 5504
Rajna M. M. 6016 К
Rasiowa H. 5307
Rathie C. B. 5695
Raymond F. H. 6059
Reade M. O. 5484
Ree R. 5357
Rees M. 6061
Reich E. 5483
Reissig R. 5548
Rellich F. 5581
Revuz A. 5739 Д
Ribenboim P. 5381, 5382, 5383
Ricci G. 5318
Riesel H. 5967
Riesz F. 5734 К
Riley J. D. 5958
Riske M. 5277
Ritt R. K. 5640
Rivaud J. 5343 К
Rizza G. B. 5517
Rock S. 6028
Rooney P. G. 5701
Rosina B. A. 5866
Roth W. E. 5347
Roy P. M. 5780, 5784
Rozet O. 5876
Ruben H. 5770
Rutledge W. A. 5844 К
Rzewski K. 6011 К
Rzewuski J. 5622

S

Šabac Gh. I. 5664 К
Šafarevič I. R. 5377—5380
Şaichin A. 5651
Salzer H. E. 6009
Sakai S. 5716
Sánchez Ramos E. 6013 К
Sandberg H. D. 5766
Sangren W. C. 6030
Sansone G. 5547
Sard A. 5471
Sargan J. D. 5798
Sarton G. 5299
Sastry S. 5313, 5315
Satô M. 5456
Savage I. R. 6004
Scarborough J. B. 5999 К
Sce M. 5834
Schäffer J. J. 5338
Schlesinger R. A. 6066 П
Schmeidler W. 5630
Schottlaender S. 5609
Schubart H. 5502
Scorza-Dragoni G. 5674 К
Scott N. R. 6037
Scott W. R. 5365
Sebastião e Silva J. 5725, 5726
Sedili R. 5353 К
Seidel J. 5280
Senior J. K. 5433 К
Serre J.-P. 5421, 5431
Severi F. 5674 К, 5872
Shapiro V. L. 5645, 5646, 5654
Sholander M. 5395
Shute W. G. 5341 К
Sierpiński W. 5444, 5708
Siegel C. L. 5566 К
Siegert A. J. F. 5749
Sinden F. W. 5349 К
Singh R. 5315
Smart W. M. 5848 К
Smith R. R. 5835 К, 5836 К
Smoley C. K. 6017 К
Smoley E. R. (ed.) 6017 К
Smoley N. G. (ed.) 6017 К
Sobolew W. I. 5733 К
Soeda T. 5819
Soeder H. 5740 Д
Souriau 5892
Špaček A. 5748
Spearman F. R. J. 6040
Specht W. 5373 К
Speranza F. 5891
Spring R. F. 5376 Д
Stampacchia G. 5438
Stein E. 5922
Stein P. 5932
Stepanow W. W. 5565 К
Stiefel E. 6021
Stihi E. E. 5352 К
Stoilow S. 5292
Storchi E. 5909
St-Pierre J. 5778
Succi F. 5335
Suzuki M. 5371
Svoboda A. 5401
Swift J. D. 5988
Sz.-Nagy B. 5734 К

T

Takasu T. 5522, 5914
Takeno H. 5906
Takizawa S. 5915
Tarnoczy E. 5525 Д
Tatuzawa T. 5317
Taub A. H. 5976
Tautz G. L. 5587
Tenca L. 5676
Teodorescu I. 5907
Teodorescu N. 5268
Thébault V. 5828, 5829
Theodorescu R. 5751
Thompson H. R. 5787
Thompson W. A., Jr 5785
Thyssen M. 5588
Tindale J. 6067 П
Tits J. 5367
Todd J. 5970
Toraldo di Francia G. 5621
Tortorici P. 6002 К
Toscano L. 5694
Tournarie M. 5979
Tsuboi T. 5361

U

Ulrich J. F. 5835 К, 5836 К
Uluçay C. 5508
Upton C. J. F. 5468
Urbanik K. 5799
Ušpalis K. 5954

V

Valle Flores E. 5364
Vanagas V. 5954
Van der Waerden B. L. 5415
Veselý F. 5673 К
Vietoris L. 5660
Villa M. 5880, 5881
Vincensini P. 5574
Vint J. 5304
Vito L. de 5718

Vosper A. G. 5355
Vrănceanu G. 5896

W

Wall R. E., Jr 6054
Wasel A. D. 5625 Д
Washnitzer G. 5911
Wosow W. 5765
Watson G. S. 5762, 5783
Wazewski T. 5557
Weinstein A. 5598
Weston J. D. 5724
Williams F. K. 6046
Williams R. M. 5781
Wintner A. 5476
Wise J. 5747
Wisner R. J. 5357
Witt E. 5390
Wolfe P. 5793
Wolfer E. P. 5306 Д
Wright T. K. 6041

Y

Yood B. 5715
Young D. 5961

Z

Zaanen A. C. 5736 К
Zaidman S. 5407, 5544
Zappa G. 5862 К
Zeckendorf E. 5331
Žgurić S. 5801, 5809
Zinger A. 5778
Zippin L. 5375 К

Зак. 6. 5496

三谷尚正 5959
上野正 5753
中岡稔 5432
井上正雄 5661 К
馬康 5729
吳文俊 5417
小野貴生 5732
庫拉托夫斯基 К.5412
朝長康郎 5418
李岳生 5559
森明 5521
桶口伊佐夫 5805
橋本弘志 5414
永見啓應 5413
田方增 5713
福原滿洲雄 5549
程民德 5465
竹內五一 5345 К
蘇步青 5900, 5901
趙訪熊 5955
辻廣 5807
關肇直 5713
阿部統 5789
陳永和 5465
陳建功 5679
손 원 록 5938

Технический редактор *Р. М. Денисова*